### МОДЕЛЬ ОБРАБОТКИ ГРАВИТАЦИОННО-ВОЛНОВОГО СИГНАЛА ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ПУЛЬСАРНОГО ТАЙМИНГА

#### С. А. Андрианов

Санкт-Петербургский государственный университет

В настоящей работе представлена статистическая модель выделения сигнала слабого стохастического гравитационно-волнового (ГВ) фона в наблюдениях массива радиопульсаров, проводимых по программам тайминга. Модель представляет собой блок генерации низкочастотного ГВ шума в наблюдательных данных и блок обработки полученного сигнала. Обработка данных производится с помощью методов статистики, основанных на частотной трактовке вероятности. Приведенная модель используется для обработки одной из внедряемых реализаций ГВ фона. Результатом обработки являются оценки вероятности присутствия ГВ сигнала в данных и амплитуды стохастического ГВ поля.

### MODEL OF GRAVITATIONAL WAVE SIGNAL PROCESSING IN FRAMEWORK OF PULSAR TIMING ARRAY

#### S. A. Andrianov

St Petersburg university

This work describes a statistical model of detection of a weak stochastic gravitational wave (GW) present in the timing data of a pulsar array. The model consists of a generator of the low-frequency noise modeled the signal of the stochastic GW background and a block of pulsar timing array data processing. The data processing is carried out with the help of statistical methods based on the frequentist interpretation of probability. The model under discussion is used for processing one of the generated GW background realizations. The result of the data processing is the estimates of the likelihood of detection of the GW signal in timing data and the magnitude of the stochastic GW field.

# Введение

В 2023 г. несколько исследовательских групп сообщили об обнаружении в данных тайминга массива пульсаров наличия сигнала стохастического гравитационно-волнового фона [1, 2]. Тайминг пульсаров позволяет обнаруживать ГВ в диапазоне сверхнизких частот (~10<sup>-6</sup>—10<sup>-8</sup> Гц), недоступном наземным ГВ интерферометрам типа LIGO/VIRGO, и расширяет возможности наземной ГВ астрономии. Основы поиска ГВ посредством тайминга аналогичны методам, разработанным для наземных наблюдений [3], однако, ввиду геометрических особенностей — астрономических расстояний до пульсаров (~1 кпк), требуют длительных временных интервалов наблюдений (порядка десятков лет). Поэтому для предсказания ожидаемых результатов наблюдений и отладки методов обнаружения низкочастотных ГВ необходимо разрабатывать различные физические модели стохастического ГВ сигнала и совершенствовать модели его обработки.

⑦ Андрианов С. А., 2024

## Модель гравитационно-волнового фона

Пульсарный тайминг — это процесс определения моментов прихода импульсов пульсара на регистрирующее устройство. Результатами тайминга являются набор детерминированных параметров модели вращения пульсара и остаточные уклонения, представляющие собой ошибки моделирования [4]. ГВ, как и другие эффекты, не учтенные в модели тайминга, отражаются на остаточных уклонениях как компоненты временного ряда, имеющие особенную для каждого параметра структуру. Вклад стохастического фона в остаточные уклонения есть шум, который необходимо выделить из других видов шумов. Примечательно, что сам ГВ шум не имеет выделенной структуры, однако его можно идентифицировать по специфической форме корреляции между парами остаточных уклонений пульсаров [5].

Инъекция сигнала (добавление искомого ГВ шума) в остаточные уклонения производится согласно методам, описанным в [5]. Предполагается, что ГВ описываются линеаризованными уравнениями поля Эйнштейна, где за фоновую метрику принимается метрика Минковского. Так как наиболее вероятным сценарием генерации ГВ на данный момент является сигнал от ансамбля неразрешенных равномерно распределенных на небесной сфере сливающихся пар сверхмассивных черных дыр, Фурье гармоники возмущающей метрики являются нормальными случайными величинами. Первый момент распределения гармоник тождественно равен нулю, а второй описывает степенной спектр поля (с показателем степени -2/3) и его изотропность, неполяризованность и стационарность. Относительно пульсаров предполагается, что модель тайминга идеальна, но в остаточных уклонениях моментов прихода импульсов присутствует так называемый пульсарный шум, обусловленный внутренними процессами, происходящими в пульсаре, моделируемый как фликкер-шум. Мощность ГВ шума много меньше мощности фликкер-шума. Для расчета моментов прихода импульсов на основании модели вращения пульсара используется программный пакет Тетрог [6]. В рамках изложенных положений индуцируемые ГВ остаточные уклонения описываются формулой Сажина — Детвеллера [5], а кросс-корреляционный паттери пар пульсаров — кривой Хеллингса — Даунса [5].

Модуль обработки сигнала содержит статистические оценки, выводимые из функции правдоподобия в рамках частотной трактовки вероятности [3]. Функция правдоподобия описывает ожидаемую форму остаточных уклонений и представляет собой многомерное распределение Гаусса. Из функции правдоподобия формируются точечные оценки величины сигнала, его дисперсии и статистика обнаружения сигнала. Статистика обнаружения  $\Lambda$  в пределе малого сигнала представляет собой квадрат отношения сигнал/шум SNR<sup>2</sup>. Отметим, что максимизация правдоподобия также приводит к оптимальной фильтрации, позволяющей усилить ГВ шум на фоне других шумов.

Проведение интервальных оценок сопряжено со статистическим моделированием (симуляцией) множества реализаций поля. Параметры симуляций выбираются так, чтобы результаты максимально повторяли исследуемые наблюдения. Уровень сигнала семплируется вокруг значения данной точечной оценки, мощность и спектр пульсарного шума устанавливаются равными наблюдаемым. В качестве результатов симуляций интерес представляют:

- распределение статистики обнаружения в отсутствие сигнала  $p(\Lambda | \mu = 0)$ , из которой устанавливается порог обнаружения, соответствующий заданному уровню ложного обнаружения  $\alpha$ ;
- зависимость вероятности верного обнаружения сигнала от его мощности  $\gamma(\mu)$  при заданном пороговом значении обнаружения, строящаяся из семейства распределений  $p(\Lambda|\mu)$ ;
- распределение величины сигнала, получающегося в эксперименте  $\hat{\mu}$  при заведомо известном ожидаемом значении  $\mu$ :  $p(\hat{\mu}|\mu)$ , которое используется для проведения ин-

тервальных оценок величины сигнала, таких как верхний предел или доверительный интервал (в случаях необнаружения или обнаружения сигнала в данных соответственно).

# Пример обработки сигнала

В настоящем разделе приведен пример обработки симулируемых данных, трактуемых как реальные наблюдения. В начале обработки были произведены точечные оценки параметров уровня сигнала  $\hat{\mu}$ , величины дисперсии сигнала  $\hat{\sigma}^2$  и отношения сигнал/шум. Эти параметры были использованы для массовой симуляции (порядка 10<sup>5</sup> реализаций) ожидаемых исходов эксперимента. По завершении инъекций был выбран пороговый уровень обнаружения, соответствующий вероятности ложного обнаружения 5 %, и сделан вывод в пользу гипотезы присутствия влияния ГВ в «реальных» наблюдениях (рис. *a*). Далее была построена эмпирическая функция  $\gamma(\mu)$  и вынесено заключение, что сигнал мощности  $\hat{\mu}$ , полученный в эксперименте, имеет вероятность верного обнаружения 91 % (рис. *b*).



Результаты обработки ГВ фона в рамках частотной статистики: a — распределение статистики обнаружения SNR<sup>2</sup> при отсутствии сигнала в данных. Синяя сплошная линия отмечает порог с вероятностью ложного обнаружения 5 %, оранжевая пунктирная линия отмечает значение статистики, полученное в эксперименте; b — функция  $\gamma(\mu)$  вероятности верного обнаружения сигнала мощности  $\mu$ . Оранжевая пунктирная линия отмечает полученную в эксперименте оценку  $\mu$  с соответствующей вероятностью обнаружения; c — распределение уровня инъектируемого сигнала  $\mu$  в экспериментах, дающих точечную оценку  $\hat{\mu} \pm \hat{\sigma}$ . Оранжевая пунктирная линия отмечает полученную в экспериментах, дающих точечную оценку  $\hat{\mu}$  сплошные линии — доверительный интервал, синяя сплошная линия — действительный уровень инъектированного сигнала

В заключение анализа точечной оценке был присвоен 68 % доверительный интервал, т. е. проведена оценка на уровне значимости  $1\sigma$ . Из семплированной выборки распределения мощности сигнала был выбран интервал инъектируемого сигнала  $\mu$ , соответствующий  $\hat{\mu} \pm \hat{\sigma}$ . Заметим, что распределение заранее известной мощности  $\mu$  (рис. c) смещено влево, т. е. реальная мощность сигнала статистически значимо меньше точечной оценки. Подобное поведение прослеживается для всех уровней внедряемого сигнала. Оно вызвано ненулевой корреляцией шума (любой коррелирующий шум относится программой обработки к сигналу). Достоверно зная, что модель поля верна, доверительный интервал можно центрировать на моду соответствующего распределения. Однако при обработке реальных наблюдений утверждать идеальность модели невозможно, поэтому подобное повышение точности не имеет смысла. Все результаты анализа проиллюстрированы на рисунке.

### Обсуждение результатов

Хотя описанный выше алгоритм обработки дал удовлетворительные результаты при значении отношения сигнал/шум порядка 1, нельзя забывать, что используемая в обработке модель была заведомо верна. Очевидно, что описанная модель подходит только для простейшей обработки, быстрой оценки результатов наблюдений. Для полноты модель необходимо дополнить инструментами байесовой статистики, а также выбрать функцию правдоподобия, учитывающую результаты тайминга пульсаров (в котором происходит оценка гораздо большего количества параметров, порядка десятков), т. е. отказаться от предположения идеальности модели тайминга. Также использование в блоке симуляции иных распределений и природы источников генерации поля и альтернативных теорий гравитации может позволить сравнивать наблюдательные данные с реализациями разных физических моделей и выбирать из предложенных наиболее близко описывающие реальность.

Таким образом, на данном этапе развития модель является хорошей иллюстрацией процесса обработки ГВ наблюдений, однако для использования ее в качестве реального инструмента необходим ряд доработок.

Автор выражает благодарность профессору, д. ф.-м. н. Копейкину Сергею Михайловичу за плодотворные консультации, многочисленные советы и рекомендации, позволившие существенно улучшить данную работу.

#### Библиографические ссылки

- Agazie G., Anumarlapudi A., Archibald A. M. et al. The NANOGrav 15 yr Data Set: Evidence for a Gravitational-wave Background // The Astrophysical Journal Letters. - 2023. - Vol. 951, № 1. -P. L8.
- [2] EPTA Collaboration and InPTA Collaboration:, Antoniadis J., Arumugam P. et al. The second data release from the European Pulsar Timing Array - III. Search for gravitational wave signals // A&A. - 2023. - Vol. 678. - P. A50.
- [3] Romano J., Cornish N. Detection methods for stochastic gravitational-wave backgrounds: A unified treatment // Living Reviews in Relativity. - 2017. - Vol. 20.
- [4] Lorimer D. R. Binary and Millisecond Pulsars // Living Reviews in Relativity. 2005. Vol. 8, № 1. - P. 7.
- [5] Anholm M., Ballmer S., Creighton J. D. E. et al. Optimal strategies for gravitational wave stochastic background searches in pulsar timing data // Phys. Rev. D. - 2009. - Vol. 79, iss. 8. - P. 084030.
- [6] Hobbs G. B., Edwards R. T., Manchester R. N. tempo2, a new pulsar-timing package I. An overview // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2006. - Vol. 369, № 2. - P. 655-672. https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/369/2/655/11178603/ mnras0369-0655.pdf.