

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ЧИСЛЕННОМУ АНАЛИЗУ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

С. П. Трофимов, О. Г. Трофимова

*Институт радиоэлектроники и информационных технологий — РтФ
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина,
Екатеринбург, Россия
tspb1@mail.ru*

А. В. Иванов

*Свердловский областной медицинский колледж,
Екатеринбург, Россия,
av.ivanov.2014@yandex.ru*

Аннотация. В работе предлагается асимптотический метод нахождения порядков малости бесконечно малых функций, представимых в виде обобщенного ряда Тейлора. Рассматривается приложение метода к решению задачи разложения в ряд Пюизё решений алгебраических уравнений.

Ключевые слова: бесконечно малая функция, обобщенный ряд Тейлора, ряд Пюизё, численный инфинитезимальный анализ, алгебраическая кривая.

Введение

Бесконечно малые и бесконечно большие функции (БМФ и ББФ соответственно) являются важным аппаратом исследования асимптотического поведения методов решения задач классического и дробного анализа, алгебры, вычислительной математики, оптимизации и теории алгоритмов [1–3]. Как правило, исследование сводится к определению для некоторой специально построенной БМФ или ББФ порядков малости и коэффициента пропорциональности при соответствующем мономе. Однако точное нахождение данных характеристик возможно лишь в ограниченных случаях. Поэтому нахождение характеристик БМФ и ББФ является важной вычислительной задачей и требует построения численных алгоритмов.

Статья организована следующим образом.

В разделе 1 предлагается подход к анализу БМФ, использующий асимптотические свойства логарифма заданной функции.

В разделе 2 асимптотический метод применяется для построения алгоритма разложения БМФ в сумму мономов с неизвестными коэффициентами и дробными степенями.

Разделы 3 и 4 посвящены исследованию графиков неявных функций, задающих плоские алгебраические кривые.

Логарифмическое изображение бесконечно малых функций

В работе рассматриваются БМФ одной переменной $f(x)$, допускающие представление в виде ряда

$$f(x) = \sum_{i=1}^n C_i x^{p_i} + o(x^{p_n}), \quad 0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n, \quad (1)$$

где $C_i \in \mathbb{R}$, $p_i \in \mathbb{R}_{++}$ — неизвестные коэффициенты и порядки мономов, $C_1 x^{p_1}$ — главный моном БМФ.

Логарифмическим изображением (log-изображением) БМФ $y = f(x)$ назовем функцию

$$\tilde{y} = g(\tilde{x}) = \Phi(f(x)), \quad (2)$$

где $\tilde{x} = \lg |x|$, $\tilde{y} = \lg |y|$.

График функции (2) (или *log-log*-график) в декартовой системе координат совпадает с графиком функции $y = f(x)$ в логарифмической системе координат. Заметим, что подобное логарифмическое преобразование функций применяется в теории управления (диаграмма Боде), оптимизации (геометрическое программирование [4]), лингвистике (закон Ципфа), экологии (кривая видового накопления).

Асимптотический метод разложения БМФ в обобщенный ряд Тейлора

Базовым шагом разложения БМФ в ряд (1) является процедура нахождения характеристик главного монома БМФ. График *log*-изображения БМФ (1) имеет левую наклонную асимптоту

$$\tilde{y} = \tilde{C}_1 + p_1 \tilde{x}, \quad (3)$$

где $\tilde{C}_1 = \lg C_1$, p_1 — коэффициенты асимптоты.

Таким образом, характеристики главного монома БМФ (1) восстанавливаются из коэффициентов линейного тренда (3).

Отметим, что в ряде прикладных задач значения БМФ (1) являются выходом некоторого численного метода и соответственно могут содержать погрешность. В таком случае аналитическое определение точных характеристик главного монома становится невозможным и становится актуальной задача разработки численного алгоритма разложения неточно заданной БМФ (НЗБМФ).

Приведем алгоритм разложения НЗБМФ в ОРТ:

Вход: Набор точек НЗБМФ $\hat{f}: \{x_i, \hat{y}_i\}_{i=1}^m$, где $\hat{y}_i = f(x_i) + \varepsilon_i$.

Шаг 1. Положить $k = 1$.

Шаг 2. Построить БМФ $\hat{f}_k(x) = \hat{f}(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{C}_j x^{\hat{p}_j}$.

Шаг 3. Построить \log -изображение БМФ $\hat{g}_k: \{\tilde{x}_i, \Phi(\hat{f}_k(x_i))\}_{i=1}^m$.

Шаг 4. Определить коэффициент пропорциональности \hat{C}_k и порядок малости \hat{p}_k главного монома БМФ $\hat{f}_k(x)$ на основе идентификации коэффициентов \log - \log -графика $\hat{g}_k(\tilde{x})$.

Шаг 5. Если $k < n$, то $k = k + 1$, переход на шаг 1.

Выход: набор оценок параметров мономов исходной НЗБМФ $\{(\hat{C}_j, \hat{p}_j)\}_{j=1}^n$.

Построенный алгоритм обладает следующим свойством.

Утверждение. Пусть БМФ $f(x)$ допускает представление в виде (1). Тогда после k -итераций вычисления первых k -мономов БМФ $f(x)$ справедливо следующее неравенство:

$$\Phi \left| f(x) - \sum_{i=1}^k \hat{C}_i x^{\hat{p}_i} \right| \geq \max_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} \{ \tilde{C}_i + \hat{p}_i \tilde{x} \}, \quad (4)$$

где \tilde{C}_i — десятичный логарифм пропорциональности БМФ $\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i-1} \hat{C}_j x^{\hat{p}_j} \right|$.

Таким образом, на k -й итерации шага 3 алгоритма \log - \log -график БМФ $\hat{f}_k(x)$ представляет из себя «склею» асимптот мономов $\left\{ |C_j - \hat{C}_j| x^{p_j} \right\}_{j=1}^{k-1}$ с показателями более низкими, чем у главного монома БМФ $\hat{f}_k(x)$. При этом ось $O\tilde{x}$ разбивается на интервалы доминирования мономов с порядками малости $\left\{ p_j \right\}_{j=1}^{k-1}$.

Иллюстрация неравенства (4) на примере разложения БМФ $f(x) = C_1 x^{p_1} + C_2 x^{p_2}$ ($0 < p_1 < p_2$) приведена на рис. 1. Порядок малости главного монома найден точно $\hat{p}_1 = p_1$, коэффициент пропорциональности найден с погрешностью $\Delta C_1 = |C_1 - \hat{C}_1|$. Как видно на рис. 1 график \log -изображения $\Phi |f(x) - \hat{C}_1 x^{\hat{p}_1}|$ состоит из двух частей: \log -графика монома $\Delta C_1 x^{\hat{p}_1}$ и \log -графика монома $C_2 x^{p_2}$.

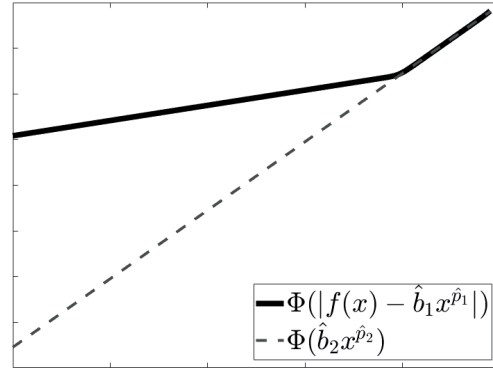


Рис. 1. Иллюстрация к утверждению на примере разложения БМФ $f(x) = C_1 x^{p_1} + C_2 x^{p_2}$ ($0 < p_1 < p_2$)

Построение графиков неявных функций и их инфинитезимальный анализ

Традиционно к элементарным преобразованиям функции одной переменной $y = f(x)$ относят аддитивные и мультипликативные операции с константами вида:

$$y = af(bx + c) + d. \quad (5)$$

Графики подобных функций строятся по хорошо известным алгоритмам, основанным на преобразовании графика $y = f(x)$ в декартовой системе координат Oxy .

Мы предлагаем в качестве обобщения алгоритм построения графика неявной функции

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = f(b_1 x + b_2 y + b_3). \quad (6)$$

Выполним замену переменных $y' = a_1 x + a_2 y + a_3$, $x' = b_1 x + b_2 y + b_3$. Построим новую аффинную систему координат $O'x'y'$. Ось $O'x'$ имеет уравнение $y' = 0$ в новой системе или $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$ в старой системе координат. Ось $O'y'$ имеет уравнение $b_1 x + b_2 y + b_3 = 0$. Получили прямые, содержащие новые оси, пересечение которых задает новое начало O' .

Точка $1'$ на оси $O'x'$ является пересечением двух прямых: оси $O'x'$ и прямой $x' = 1$. Таким образом строим масштабные сетки на обеих осях. В системе $O'x'y'$ (6) имеет вид $y' = f(x')$, совпадающий с исход-

ной функцией. Осталось построить преобразованный график исходной функции в системе $O'x'y'$.

В качестве примера рассмотрим построение графика функции $x + y = (y - x + 1)^2$. Обозначив $y' = x + y$, $x' = y - x + 1$, получаем уравнение для оси $O'x'$ $y' = -x'$, для оси $O'y'$ $y' = x' - 1$. $1'$ на оси $O'x'$ находится на прямой $y = x$, $1'$ на оси $O'y'$ находится на прямой $y = 1 - x$. Вид графика $y' = (x')^2$ представлен на рис. 2.

Разложение БМФ в ряд Пуизё

Рядом Пуизё с одной переменной называется формальное алгебраическое выражение вида

$$f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ряды Пуизё применяются для исследования решений алгебраических уравнений, систем полиномиальных уравнений, исследования сингулярных точек алгебраических кривых [5, 6].

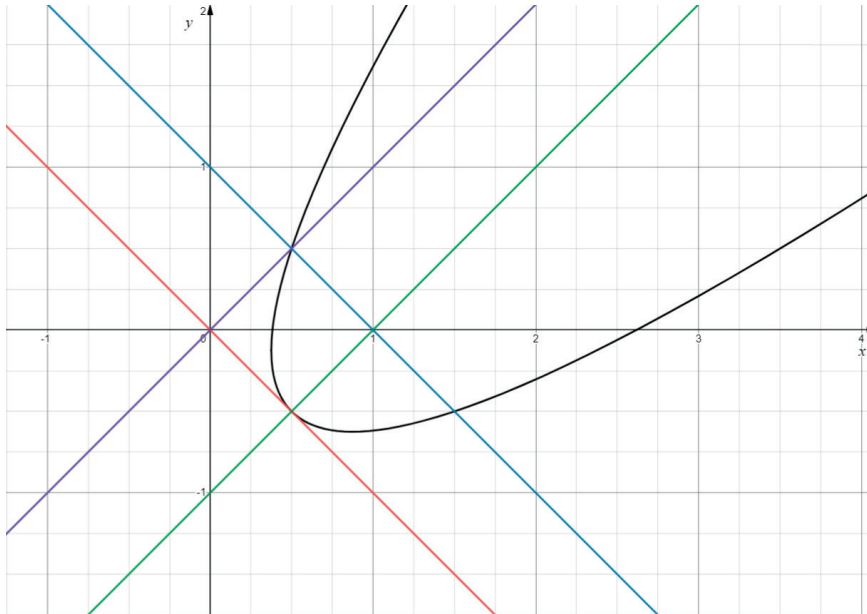


Рис. 2. График неявной функции $x + y = (y - x + 1)^2$

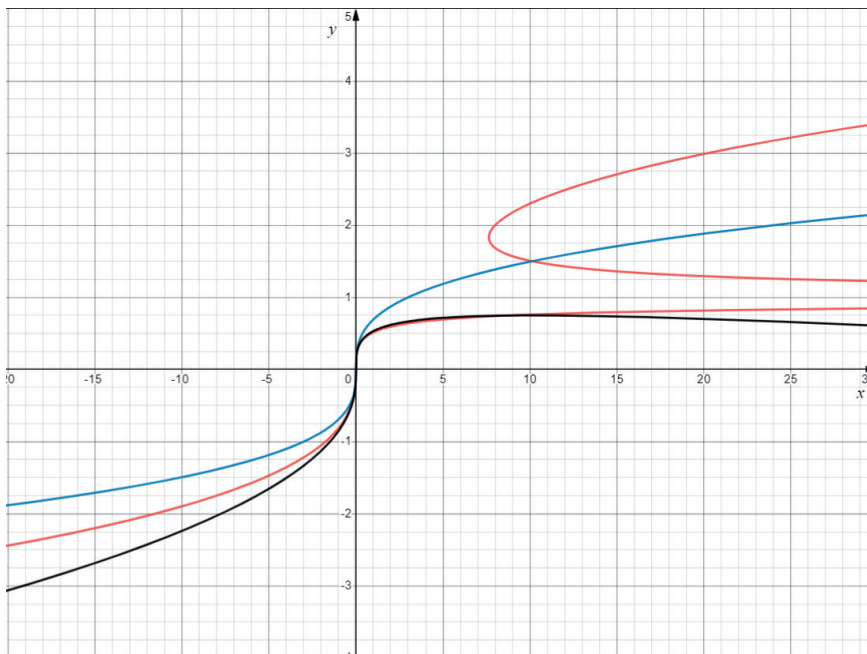


Рис. 3. Графики неявной функции (цвет — красный) $y^5 - 3y^4 + 3y^3 - x(1-y)^2 = 0$, одного слагаемого ряда Пуизё (цвет — синий), двух слагаемых ряда Пуизё (цвет — черный)

Примером возникновения ряда Пуизэ является действительное решение $y(x)$ алгебраического уравнения [7]

$$f(x, y) = y^5 - 3y^4 + 3y^3 - x(1 - y)^2 = 0, \quad (7)$$

относительно переменной x , которое удовлетворяет условию $y(0) = 0$.

Действительное решение имеет вид

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{3}} - \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{x}{3}} \right)^2 - \frac{1}{9} \left(\sqrt[3]{\frac{x}{3}} \right)^3 + \frac{4}{81} \left(\sqrt[3]{\frac{x}{3}} \right)^4 + \dots$$

На рис. 3 изображен графики алгебраической кривой (7) и нескольких слагаемых ряда Пуизэ, соответствующего ветви действительного решения.

Применение численного алгоритма разложения БМФ, получающейся переносом алгебраической кривой (7), из точки с ординатой

$$y_0 = \frac{-14}{81 \left(\frac{197}{729} + \frac{\sqrt{57}}{27} \right)^{1/3}} + \left(\frac{197}{729} + \frac{\sqrt{57}}{27} \right)^{1/3} + \frac{11}{9} \approx 1,8305$$

и абсциссой

$$x(y_0) = \frac{y_0^5 - 3y_0^4 + 3y_0^3}{(1 - y_0)^2} \approx 7,6408$$

в начало координат, дает главный моном с дробным порядком:

$$y(x) \approx 0,2646\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

Библиографический список

1. Трофимов С. П., Иванов А. В. Вычисление дробной производной с помощью LOG-алгоритма определения порядка малости // СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии : материалы 26-й Междунар. Крым. конф. Севастополь, 2016. Т. 4. С. 561–567.
2. Trofimov S., Ivanov A. Numerical One-Dimensional Infinitesimal Analysis and Its Application to the Study of Optimization Problems // Ural Symposium on Biomedical Engineering, Radioelectronics and Information Technology, USBEREIT. 2019. P. 288–291.
3. Trofimov S., Ivanov A., Fettser Yu. An Infinitesimal Approach for Analysis of Convex Optimization Problem with Duality Gap // CEUR Workshop Proceedings. 2017. Vol. 1987. P. 570–577.
4. A tutorial on geometric programming / S. Boyd, S. J. Kim, L. Vandenberghe et al. // Optim. Eng. 2007. Vol. 8. P. 67–127.
5. Брюно А. Д., Батхин А. Б. Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2011. № 10. 30 с.
6. Ghys E. A Singular Mathematical Promenade. Arxiv: 1612.06373, 300 p.
7. Герасимов И. А. Задача двух неподвижных центров Э. Эйлера. Фрязино : Век 2, 2007. 172 с.