— недостаток инвестиций;

— нехватка квалифицированного управленческого персонала;

— недостаточно интенсивное использование сельскохозяйственных земель;

— недостаточный уровень диверсификации производительных сил;

— недостаточная развитость нормативной правовой базы, регулирующей инвестиционную деятельность;

— слабая освоенность имеющихся рекреационных ресурсов;

— высокая зависимость бюджета от федеральной финансовой помощи, дефицит собственных финансовых ресурсов.

Выявленный комплекс проблем республики является типичным для многих регионов России: спад промышленного производства, ухудшение демографической ситуации, падение уровня жизни. Тем не менее, на фоне остальных северокавказских республик Северная Осетия выделяется относительно высокими перспективами экономического роста.

Список литературы

1. Регионы России. Социально-экономические показатели 2008 : стат. сборник / Росстат. М., 2008. 999 с.

2. Малое предпринимательство в Республике Северная Осетия — Алания : стат. сборник. Владикавказ, 2008.

3. Основные показатели деятельности малого предпринимательства по Республике Северная Осетия — Алания (январь — декабрь 2008 г.) : бюллетень. Владикавказ, 2009.

УДК 330.42

ключевые слова: региональная экономика, спрос, предложение, устойчивость, хаотические состояния, странный аттрактор

Л. А. Коршунов, Г. П. Быстрай

ДЕТЕРМИНИРОВАННОЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКОЕ ИЗМЕНЕНИЕ ВАЛОВОГО РЕГИОНАЛЬНОГО ПРОДУКТА[1]

Классическая задача спроса и предложения на товар, сформулированная впервые А. Маршаллом, сведена в нелинейной постановке к модели Лоренца и описывает устойчивые циклические процессы товарного рынка, включая возрастание амплитуды цен при приближении к кризису (инфляцию), нарушение устойчивости при возрастании непроизводственных затрат, основные стадии развития кризиса, включая стадию хаотического поведения времени нахождения в каждом из аттракторов (точек равновесия), возможность выхода из кризисной ситуации за счет изменения некоторых параметров. Данный подход использован для построения качественной модели изменения цен товаров в предкризисный и кризисный периоды, а также нахождения времени достоверного прогнозирования.

А. Маршаллом установлен механизм воздействия соотношения спроса и предложения на формирование цен товаров в условиях совершенной конкуренции [6]. Спрос и предложение имеют связь с ценой: спрос, как правило, при росте цены уменьшается и при ее уменьшении растет; предложение в большинстве случаев с ростом цены растет и при снижении цены падает. Поэтому устойчивая цена, цена равновесия, устанавливается в той точке, где спрос уравнивается с предложением (т. е. при графическом изображении в точке пересечения кривых спроса и предложения). Цена, превышающая цену равновесия, ведет к превышению предложения над спросом, что неминуемо действует в сторону снижения цены. Цена, оказавшаяся ниже цены равновесия, ведет к превышению спроса над предложением, что действует в сторону повышения цены. Только при цене равновесия X^0 спрос уравнивается с предложением (уравнивается в том смысле, что не возникает стимулов для изменения трех функционально связанных величин — спроса, предложения, цены). Одним из аспектов экономического кризиса может быть нарушение равновесия между спросом и предложением на

[1] Работа частично финансировалась за счет Целевой программы УрО РАН поддержки междисциплинарных проектов, выполняемых в содружестве с учеными СО и ДВО РАН в рамках интеграционного проекта «Социально-экономический иммунитет региона: диагностика и прогноз защищенности от кризисных явлений» (проект №09-С-6-1001 «Диагностика состояния, моделирование тенденций и прогноз развития регионов России на период до 2030 г.»).

товары и услуги. Особенности формирования кризисной ситуации в формализуемой базе знаний быстро меняющегося рынка интересуют не только его участников — покупателей и продавцов, но и практикующих экономистов, а также представителей ортодоксальной экономики и экономической синергетики; сравнительный анализ этих направлений дается в [1, 6]. Наше исследование посвящено изучению регионального рынка валового регионального продукта (ВРП), хотя первоначально задача ставится для любого рынка товара в рамках представлений А. Маршалла.

Неравновесный рынок товара. Непроизводственные затраты. Формализованная модель прогнозирования. Будем считать, что объемы спроса и предложения при слабом отклонении от точки равновесия (рис. 1) в условиях неограниченной конкуренции в некоторый момент времени описываются уравнениями

$$J_e = J^0 + \delta J_e,\ J_i = J^0 + \delta J_i,$$
$$\delta J_e \equiv < \overline{\Delta J_e} >,\ \delta J_i \equiv < \overline{\Delta J_i} >. \qquad (1)$$

Приращения — последние слагаемые в (1) — могут иметь различный знак. Эти приращения для объемов товара являются средними для малого временного интервала и средними по всем покупателям и производителям товара соответственно. Предполагая спрос и предложение взаимозависимыми, приходим к вариационной схеме описания неравновесных процессов:

$$\delta J_e = L^0_{ee}\delta X_e + L^0_{ei}\delta X_i,\ \delta J_i = L^0_{ie}\delta X_e + L^0_{ii}\delta X_i,$$
$$X_e = X^0 + \delta X_e,\ X_i = X^0 + \delta X_i, \qquad (2)$$

здесь X^0 — гипотетическая цена равновесия (в ней цены спроса и предложения равны друг другу). Коэффициенты L^0_{ee} и L^0_{ii} в (2) называются прямыми, а L^0_{ie}, L^0_{ei} — перекрестными коэффициентами эластичности: $L^0_{ie} = \delta J_i / \delta X_e$, $L^0_{ei} = \delta J_e / \delta X_i$, $L^0_{ee} = \delta J_e / \delta X_e$, $L^0_{ii} = \delta J_i / \delta X_i$, вычисляемыми через вариации, и которые могут быть нормированы на значение объемов и цен в точке равновесия. Индекс «0» будет здесь и далее соответствовать точке равновесия.

Приращения цен также являются средними для рассматриваемого временного локального интервала и средними по всем покупателям и производителям товара соответственно: $\delta X_e \equiv < \overline{\Delta X^t_e} >, \delta X_i \equiv < \overline{\Delta X^t_i} >$. Размерности этих величин следующие $[X]$ = *руб./у.е.т.* (цена одной условной единицы товара), $[J]$ = *у.е.т./мес* (объем товара в единицу времени).

В равновесии (в неподвижной точке) объем спроса равен объему предложения $J_e = J_i = J^0$. Система линейных уравнений (1–2) связывает спрос и предложение и соответствующие цены в неравновесных задачах и соответствует классической схеме рыночной экономики А. Маршалла. В линейной задаче, когда спрос влияет на предложение так же, как предложение влияет на спрос, перекрестные коэффициенты являются симметричными: $L^0_{ie} = -L^0_{ei}$. Наличие знака минус здесь обусловлено различной зависимостью спроса и предложения от цены (рис. 1). В нелинейных задачах указанные коэффициенты (или хотя бы некоторые из них) зависят от цен [1].

На рис. 1 приведен типичный график спроса и предложения на товар, где точками обозначены определяемые значения. Значения цены в равновесии и объем товара восстанавливаются из решения обратной задачи, например, для указанных кривых: X^0 = 17,4 руб./у.е.т., J^0 = 14,5 тыс. у.е.т./день, с коэффициентами эластичности $L^0_{ii} = 2, L^0_{ie} = 1{,}2, L^0_{ei} = -1{,}2, L^0_{ee} = -3$.

Странный аттрактор Лоренца для нелинейного рынка А. Маршалла. Проведем обсуждение системы трех нелинейных дифференциальных уравнений для классического рынка спроса и предложения на рынке отдельно взятого товара в самой простой постановке, предполагая у него наличие хотя бы одной точки равновесия (неподвижной точки) и известных коэффициентов эластичности.

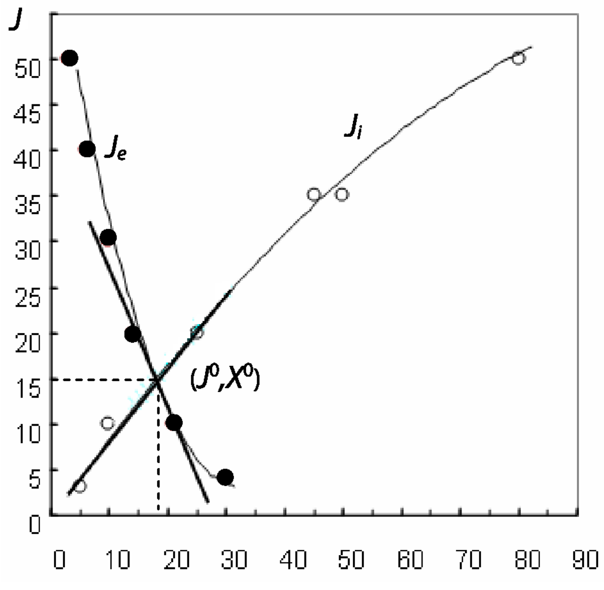


Рис. 1. *Типичный график спроса и предложения на товар в условиях неограниченной конкуренции, на котором помимо точек указаны также аппроксимирующие их линии. Пересекаются кривые в точке равновесия, в которой цена равна X^0, а объем — J^0. В окрестности этой точки спрос и предложение являются линейными функциями цен, что отражено прямыми линиями*

1. Считаем, что скорость изменения цены предложения формируется благодаря некоторому потенциальному рыночному полю с функцией G: $\dot{X}_i = -\varepsilon(\partial G / \partial X_i)$; она зависит от спроса, предложения и соответствующих цен, ε — размерная константа. Правую часть уравнения можно представить в виде градиента от этой функции $G = -J_e X_e + J_i X_i + \sigma$ (прибыль с обратным знаком), включающей также затраты непроизводственного характера σ. Разница между спросом и предложением в наличии σ для данного момента времени может быть представлена в виде выражения $P = J_e X_e - J_i X_i - \sigma$. Введем в рассмотрение некоторый коэффициент $\chi \geq 1$, определяющий эти расходы как некоторую долю от затрат на производство: $\sigma = (\chi - 1) J_i X_i$; при $\chi = 1$ имеем нижнюю границу $\sigma = 0$. Верхняя граница неопределена, однако случаи очень больших значений χ маловероятны. Функция издержек в линейной задаче является квадратичной функцией цен и определяется [1] квадратичной формой $G = -L_{ee}^0 X_e^2 - L_{ei}^0 X_e X_i + \chi(L_{ie}^0 X_e X_i + L_{ii}^0 X_i^2)$; ее градиент равен $G_{X_i} = (-L_{ei}^0 + \chi L_{ie}^0) X_e + 2\chi L_{ii}^0 X_i$, тогда $\dot{X}_i = -2\chi L_{ii}^0 \varepsilon X_i + (L_{ei}^o - \chi L_{ie}^0)\varepsilon X_e$. Взяв вариационную производную от левой и правой частей этого уравнения, получаем для скорости отклонения цены издержек от X_0 вариационное уравнение:

$$\delta \dot{X}_i = -\alpha(\delta X_i) + \beta(\delta X_e), \qquad (3)$$

где $\alpha = 2\chi L_{ii}^0 \varepsilon > 0$, $\beta = (L_{ei}^0 - \chi L_{ie}^0)\varepsilon$.

2. Второе вариационное уравнение, имеющее в левой части производную $\mathrm{d}(\delta X_e) / \mathrm{d}t$, описывает изменение во времени возмущение цены спроса на рынке:

$$\delta \dot{X}_e = -\gamma(\delta X_e) + cL_{ii}(\delta X_i), \ \gamma = 1/\tau_{\delta Xe}, \qquad (4)$$

где L_{ii} — коэффициент эластичности предложения по цене предложения, γ и c — некоторые параметры; $\tau_{\delta Xe}$ — время релаксации цены спроса к новой точке равновесия.

3. Рассмотрим рыночную ситуацию, для которой из всех четырех коэффициентов эластичности матрицы $\|L_{ie}\|$ только коэффициент эластичности предложения по цене предложения L_{ii} является переменным. Поэтому запишем для него вариационное уравнение в виде:

$$\delta \dot{L}_{ii} = -\Gamma \delta L_{ii} + k(\delta X_i)(\delta X_e), \ L_{ii} = \delta J_i / \delta X_i,$$
$$\delta L_{ii} \equiv L_{ii}^{00} - L_{ii}, \ \Gamma = 1/\tau_L, \qquad (5)$$

где L_{ii}^{00} — некоторый коэффициент прямой эластичности, отклонение от которого и рассматривается по уравнению (5), k — некоторый коэффициент, τ_L — время релаксации коэффициента эластичности при переходе к новой точке равновесия.

Сведение системы уравнений к системе уравнений Лоренца. В целях упрощения вида уравнений заменим переменные δX_i, δX_e, L_{ii} на новые переменные x, y, ω, а параметры $\Gamma, \gamma, \alpha, \beta, k, c, L_{ii}^0$ — на параметры b, l, r. Считаем справедливыми следующие соотношения: $t \equiv \gamma t$, $x = \delta X_i / X^0$, $y = (\beta / \alpha)(\delta X_e / X^0)$, $\omega = (\beta / \alpha)(cL_{ii} / \gamma)$; $X^0 = \gamma / \sqrt{kc}$, $b = \Gamma / \gamma$, $l = 2\chi L_{ii}^0 \varepsilon / \gamma$, $r = (\beta / \alpha)(cL_{ii}^{00} / \gamma)$. Для приведенных цен спроса и предложения соответственно имеем:

$$X_e^* = 1 + \alpha y / \beta, \ X_i^* = 1 + x,$$

где $X_i^* = X_i / X^0$, $X_e^* = X_e / X^0$.

Кривые для спроса и предложения (1) записываем в виде нелинейных безразмерных выражений:

$$J_e^* = 1 + L_{ee}^{0*} y + L_{ei}^{0*} x, \ J_i^* = 1 + L_{ie}^{0*} y + A(1 + Bz)x, \qquad (6)$$

здесь

$$J_e^* = \frac{J_e}{J^0}, \ L_{ee}^{0*} = \frac{\alpha L_{ee}^0 X^0}{\beta J^0}, \ L_{ei}^{0*} = \frac{L_{ee}^0 X^0}{J^0}; \ L_{ie}^{0*} = \frac{\alpha L_{ie}^0 X^0}{\beta J^0},$$

$$A = \frac{L_{ii}^{00} X^0}{J^0}, \ B = \frac{\gamma}{cL_{ii}^{00}}; \ J_i^* = \frac{J_i}{J^0},$$

$$L_{ii}^* = \frac{(L_{ii}^{00} + \delta L_{ii}) X^0}{J^0} = A(1 + Bz)x, \ z = \frac{c}{\gamma}\delta L_{ii}.$$

В результате уравнения (4)–(5) приводятся к простому виду $\dot{x} = l(y - x)$, $\dot{y} = -y + x\omega$, $\dot{\omega} = -b\omega + br - xy$ и могут быть сведены к уравнениям Лоренца [1, 4] при $\omega = r - z$

$$\dot{x} = l(y - x), \ \dot{y} = -y + rx - xz, \ \dot{z} = -bz + xy; \qquad (7)$$

последние можно решить численными методами.

В уравнении (7) новая переменная равна относительному изменению коэффициенту эластичности: $z = r - \omega = (c / \gamma)\delta L_{ii} \equiv \delta L_{ii} / L_{ii}^0$. Величина γ/c имеет размерность коэффициента эластичности. Отсюда следует условие равновесия для уравнения (3): $cL_{ii}^0 / \gamma = 1$, $B = 1/r$. При больших значениях r — параметр $B \sim 1$. Например, при $r = 1$ параметр $B = 1$; при $r \sim 30$, $B \sim 0{,}03$. Условие равновесия для (1) дает $\alpha / \beta = 1$.

Таким образом, в интерпретации предложенной нелинейной рыночной схемы переменная x отвечает отклонению цены предложения от равновесного значения, y — соответствуещему отклонению цены спроса, а переменная z характеризует относительное изменение коэффициента эластичности предложения по цене предложения.

Результаты численных расчетов. Странный аттрактор рыночной экономики. Вначале рас-

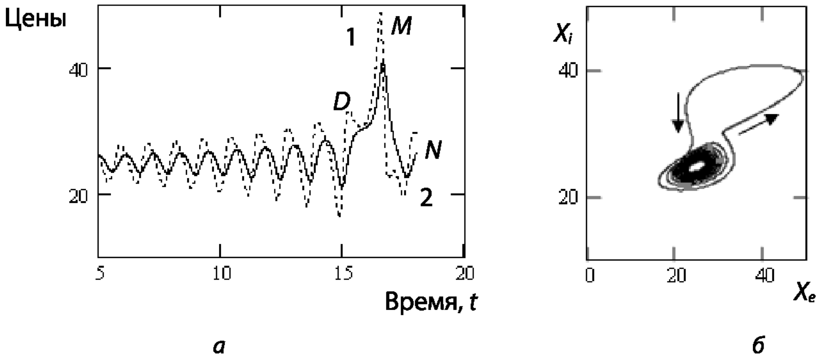


Рис. 2. *Динамика перехода в кризисное состояние и выход из него на первой временной стадии: 1 — цены спроса (потребительские цены, у.е.), 2 — цены предложения (цены от производителя у.е.) при $l = 2\chi L^0_{ii}\varepsilon / \gamma = 3$, $r = (\beta / \alpha)(cL^{00}_{ii} / \gamma) = 29$. D — начало кризиса, M — пик кризиса, N — выход из кризиса.*

смотрим гипотетический рынок в отсутствии непроизводственных расходов $\sigma = 0$, $\chi = 1$. В результате численных расчетов системы уравнений Лоренца (7) при значениях параметров $b = 8/3$, $l = 10$, $r = 29$ в широкой области изменения начальных условий получаем странный аттрактор [1], когда траектория, находящаяся в области существующей точки равновесия (более правильно их называть неподвижными точками [7]), покидает свою область притяжения и устремляется к другому аттрактору (рис. 2). Аттрактор — это область притяжения фазовых траекторий.

На последующих временных стадиях траектория «мечется» между двумя аттракторами, делая перескоки непериодического характера. В окрестности каждой из неподвижных точек справедлива гипотеза А. Маршалла о взаимосвязи спроса, предложения и соответствующих цен с коэффициентами эластичности. Наибольший интерес представляет переход к новой точке равновесия (кризис).

Такое поведение полученных решений получило название детерминированного хаоса [1, 7, 8], так как хаос возникает не из-за влияния шумов в правых частях полученной системы уравнений, а вследствие нелинейных свойств системы. Кризис начинается с резкого возрастания цен спроса (область D на рис. 2а), затем растут цены издержек, а коэффициент эластичности предложения уменьшается до своего нижнего предела и стремится к значениям, которые наблюдались до кризиса. В области M имеет место пик кризиса. Предкризисное состояние характеризуется циклическим годовым процессом. Область N соответствует выходу из кризиса. Далее (на третьей временной стадии) следуют циклы с малой амплитудой по ценам, которые в данной работе не анализируются. На рис. 2 приводятся теоретические временные зависимости на первой временной стадии цен спроса и предложения от времени, а на рис. 3 — цены производителей промышленных товаров Алтайского края (X_i) и потребительские цены (X_e) на эти товары в 1999–2008 гг. [2].

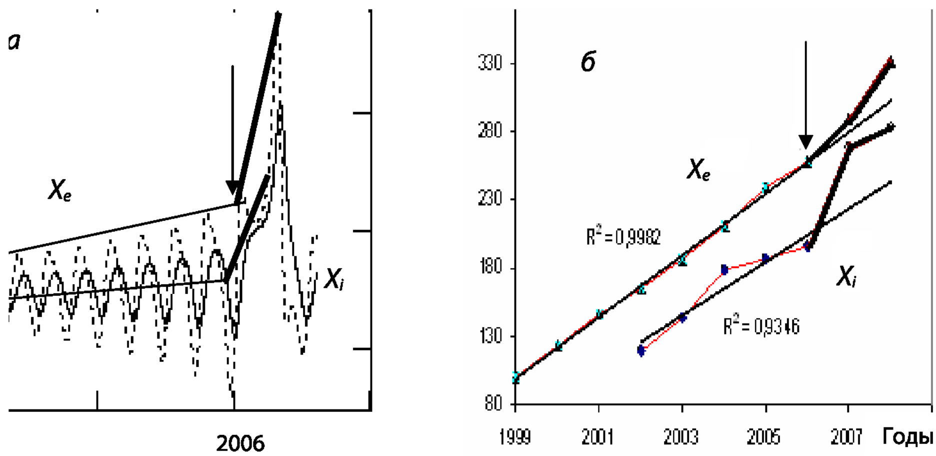


Рис. 3. *Цены производителей промышленных товаров Алтайского края (X_i, цены 1999 года взяты за 100%) и потребительские цены (X_e, цены 1999 года взяты за 100%) на эти товары в 1999–2008 гг., приведенные к одной базе (2000 г.) на первой временной стадии: а — качественная модель, б — статистические данные*

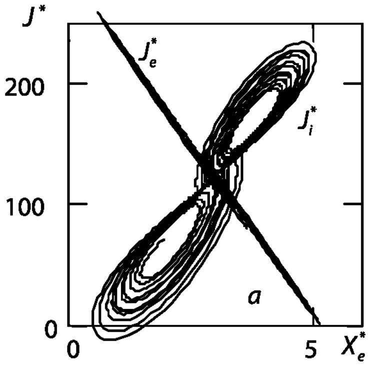


Рис. 4. *Зависимости спроса и предложения по А. Маршаллу, восстанавливаемые из расчета по уравнениям Лоренца (при А ~ 1)*

При возвращении к безкризисной ситуации, как следует из рисунка, характерное время возвращения к прежнему уровню цен примерно в два раза меньше.

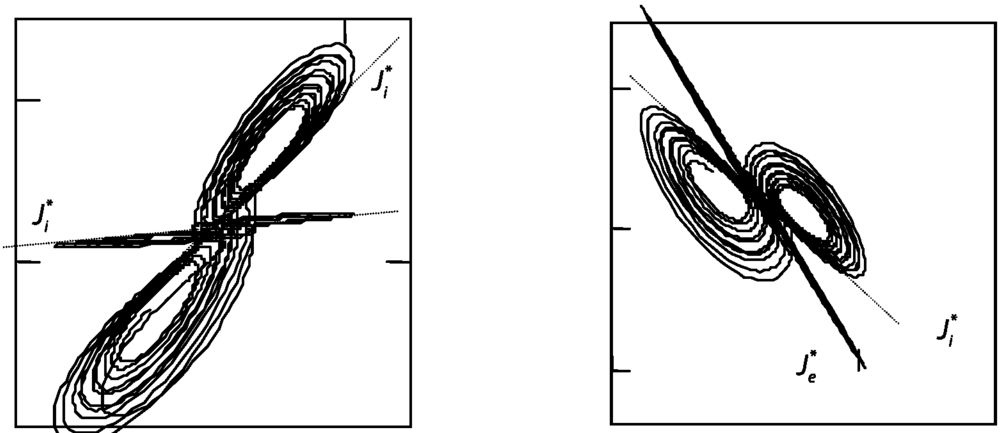
Рис. 4 дает наглядное представление о кривых спроса и предложения по А. Маршаллу (для заданных приведенных коэффициентов эластичности) во всем рассматриваемом интервале времени для всех трех временных стадий. Если кривую спроса, имеющую хаотический характер, можно аппроксимировать в виде линии с уменьшающимся спросом при возрастании цены, то кривая предложения для обсуждаемой модели соответствует большой плотности возможных траекторий решений, пересекающей кривую спроса как выше, так и ниже точки равновесия.

Начиная с 2006 года (отмечено стрелками) темпы роста резко меняются (повышаются). Предкризисный период характеризуется в модели плавным изменением обеих цен, несмотря на то, что в годичном цикле они периодически меняются (пунктирная кривая для X_i на рис. 3а и непрерывная линия для X_e).

Другие состояния рынка. Изменением коэффициентов L_{ee}^{0*}, L_{ii}^{0*}, L_{ie}^{0*}, L_{ei}^{0*} можно получить различные состояния рынка (рис. 4, 5), характеризуемого высокоэластичным или низкоэластичным спросом (рис. 4, рис. 5а) или другими характерными особенностями. Можно констатировать, что представление кривых спроса и предложения в виде прямых линий (рис. 1) является условным приемом при описании рынка, так как производителей товара и их потребителей на рынке много и каждый из них выступает со своей иррациональностью в отношении как цен, так и объемов. Особенно это проявляется при кризисе.

Такой подход не противоречит теории А. Маршалла. Цена, превышающая цену равновесия, ведет к превышению предложения над спросом, что, как правило, действует в сторону снижения цены.

Время прогнозирования. Данный подход позволяет оценить время достоверного прогнозирования состояния рынка. Анализ хаотических и регулярных процессов в нелинейных системах обычно начинается с построения разности траекторий и определения показателей Ляпунова λ [1]. Показатели Ляпунова λ дают информацию о расходимости двух соседних по мало различающимся начальным условиям траекторий. В этой задаче зафиксируем начальный малый сдвиг между ценами предложения $\mu_0 = (\delta x)_0$ В нелинейной динамике он называется конечным порядком огрубления фазового пространства m_0. Величина $(\delta x)_0$ — начальное расстояние между двумя траекториями цен предложения $x'(t)$ и $x''(t)$, очень незначительно отличающимися друг от друга по начальным условиям. Спустя время t расстояние между траекториями $\delta x(t) = |x'(t) - x''(t)|$ описывается экспонентой:



а б

Рис. 5. *Крест А. Маршалла для хаотических рынков с различной эластичностью на I–III стадиях развития кризиса (при $\gamma z/c >> 1$, А~1): а) рынок с низкоэластичным спросом $L_{ee}^{0*} = -1$, $L_{ei}^{0*} = 5$, $L_{ie}^{0*} = 30$, $L_{ii}^{0*} \equiv L_{ii}^{*}(0) = 20$; б) рынок, для которого и спрос и предложение уменьшаются с увеличением цены $L_{ee}^{0*} = -60$, $L_{ei}^{0*} = 5$, $L_{ie}^{0*} = -30$, $L_{ii}^{0*} \equiv L_{ii}^{*}(0) = 20$*

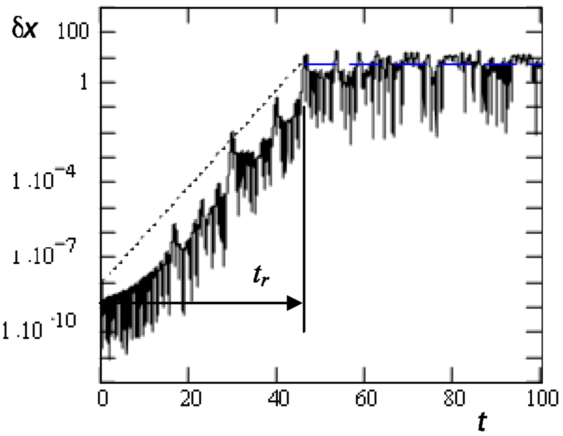


Рис. 6. *Временная зависимость для расстояния между двумя траекториями величины цен предложения x.* $\mu_0 = 9{\cdot}10^{-9}$, $\lambda=0{,}45$, $\overline{\delta x} = 5{,}3$, $t_r = 44{,}9$, $t \equiv t/t_0$, *масштаб времени по рис. 3 соответствует* $t_0 = 0{,}35$ *года*

$\delta x(t) = (\delta x)_0 \exp(\lambda t)$, где λ — некоторый показатель, который в нелинейной динамике и называется показателем Ляпунова. Время достоверного прогнозирования состояния рынка t_r вычислялось по формуле [1]

$$t_r = \frac{1}{K_0} \ln\left(\frac{\overline{\delta x}}{\mu_0}\right), \tag{8}$$

где $\overline{\delta x}$ — среднее значение, которое образовалось за промежуток времени t_r путем увеличения начального значения $(\delta x)_0$, K_0 — энтропия Колмогорова. Для численного решения дифференциального уравнения энтропия Колмогорова равна положительным значениям показателя Ляпунова $K_0 = 1$. Для перехода к размерным величинам необходимо умножить левую и правую части выражения (8) на масштаб времени $t_0 = 0{,}35$ года.

Численные расчеты показали, что для Алтайского края время прогнозирования составляет $t_r = 15{,}7$ года, что на рис. 3 соответствует 2013 году.

Список литературы

1. *Белоцерковский О. М., Быстрай Г. П., Цибульский В. Р.* Экономическая синергетика. Вопросы устойчивости. Новосибирск : Наука, 2006. 116 с.

2. Индикаторы, характеризующие экономические и социальные процессы в Алтайском крае : стат. бюл. / Территориальный орган федеральной службы государственной статистики по Алтайскому краю. Барнаул, 2009. 110 с.

3. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. М. : Издательство физико-математической литературы, 2001. 296 с.

4. *Лоренц Э.* Детерминированное непериодическое движение // Странные аттракторы. М., 1981. с. 88–116.

5. *Маршалл А.* Антология экономической мысли. М. : Эксмо-Пресс, 2007. с. 832.

6. *Чернавский Д. С., Старков Н. И., Щербаков А. В.* О проблемах физической экономики. УФН. Т. 172, №9. с. 1045–1065.

7. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М. : Мир. 1988. 240 с.

8. *Bystrai G. P.* Analitic Macroeconomics: Dynamics of The non-equilibrium Economics Processes // Book of Abstracts an Interdiscipl. Integrat. Forum on Studies of General Sistems and Applications in Engineer., Economics, Social and Other Sciences. Juli 13–15, 1995. p. 39–40. Slippery Rock.