

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТОРГОВЛИ МЕЖДУ ХОЗЯЙСТВУЮЩИМИ СУБЪЕКТАМИ

А.С. Урусова

Работа представлена кафедрой информатики и вычислительной математики Карачаево-Черкесского государственного университета им.У. Дж. Алиева.

В данной работе изучается обратная задача сбалансированной торговли в мировой экономике: по заданным $x_i \geq 0, i, j = 1, \dots, n$, определить $a_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, n$, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1, j = 1, \dots, n$. Предложен метод ее решения, который позволяет свести решение к задаче квадратичного программирования. Решая задачу с помощью средств Microsoft Excel, находим неотрицательные элементы матрицы A .

В задаче используются статистические данные Южного Федерального округа.

Постановка задачи. Математическая модель сбалансированной мировой торговли между n странами имеет вид [1]:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где x_i – национальный доход i -ой страны, $i = 1, \dots, n$, a_{ij} – доля (часть) национального дохода, которую j -я страна тратит на закупку товаров в i -ой стране.

Очевидно, $x_i > 0, a_{ij} \geq 0, i, j = 1, \dots, n$.

Кроме того, $\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1, j = 1, \dots, n$. (2)

Условие (2) показывает ту часть национального дохода j -ой страны, которая тратится (уходит) на внешнюю торговлю с другими странами.

Согласно Н. Ш. Кремер [1], модель (1) позволяет по заданным a_{ij} определять $x_i, i = 1, \dots, n$.

Кроме того заметим, что модель (1) применима не только к группе торгующих стран, но и к группе торгующих субъектов внутри одной страны. А это означает, что обратную задачу, поставленную примени-

тельно к торгующим странам, можно ставить и решать указанным ниже способом и к торгующим между собой субъектам одной страны.

В Статистическом сборнике «Карачаево-Черкесская Республика» [2] представлены сравнительные данные валового продукта по регионам Южного федерального округа (ЮФО) (таблица 1).

Исследуем следующую задачу: используя статистические данные таблицы 1, организовать сбалансированную торговлю между регионами Южного федерального округа.

Введем обозначения: x_i – национальный доход i -го региона, $i = 1, \dots, 12$, a_{ij} – доля (часть) регионального дохода, которую j -ый регион тратит на закупку товаров в i -ом регионе.

Очевидно, $x_i \geq 0, a_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, n$, и кроме того выполняется условие (2).

Поставленная задача сводится к задаче квадратичного программирования [3]: по заданному вектору x найти матрицу A с неотрицательными элементами, удовлетво-

Таблица 1
Данные валового продукта по регионам Южного федерального округа (млн руб.)

	Регион Южного федерального округа	2003 г.
Южный федеральный округ		900312,7
1	Карачаево-Черкесская Республика	11885,5
2	Республика Адыгея	10164,8
3	Республика Дагестан	54851,7
4	Республика Ингушетия	4821,7
5	Кабардино-Балкарская Республика	27003,8
6	Республика Калмыкии	9530,6
7	Алания	20938,5
8	Краснодарский край	275820,3
9	Ставропольский край	110142,7
10	Астраханская область	54279,2
11	Волгоградская область	137448,1
12	Ростовская область	183425,8

ряющими условием (1), которая доставляет минимум

$$|(E - A)x|^2,$$

т.е. к задаче квадратичного программирования

$$|(E - A)x|^2 \rightarrow \min, \quad A \geq 0, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{вектор валового регионального продукта;}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \text{единичная матрица размерности } n \times n;$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица прямых затрат.}$$

В более подробной записи (3) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,29 & 0,37 & 0 & 0,29 & 0 & 0,18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,12 & 0,26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,46 & 0 & 1 & 0,14 & 0 & 0 & 0,54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,81 & 0,14 & 0 & 0,66 & 0 & 0 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,29 & 0,02 & 0 & 0 & 0,16 & 0,17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,88 & 0 & 0 & 0,51 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,77 & 0,29 & 0 & 0,68 & 0 & 0 & 0,48 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & (-a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_1)^2 + \\ & + (a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_2)^2 + \dots + \\ & + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots - a_{nn}x_n + x_n)^2 \rightarrow \min_{a_{ij}} \end{aligned}$$

$$a_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

Согласно данным, приведенным в таблице 1, $n = 12$,

$$\begin{aligned} x = & (11885,5, 101164,8, 54851,7, \\ & 4821,7, 27003,8, 9530,6, 20938,5, \\ & 275820,3, 110142,7, 54279,2, \\ & 137448,1, 183425,8)^T, \end{aligned}$$

где T – операция транспонирования.

Задача (4) принимает вид:

$$\begin{aligned} & (-10164,8a_{11} + 54851,7a_{12} + \dots + \\ & + 9530,6a_{1,12} + 10164,8)^2 + \\ & + (10164,8a_{21} - 54851,7a_{22} + \dots + \\ & + 9530,6a_{2,12} + 10164,8)^2 + \dots + \\ & + (10164,8a_{12,1} + 54851,7a_{12,2} + \dots - \\ & - 9530,6a_{12,12} + 10164,8)^2 \rightarrow \min_{a_{ij}} \end{aligned} \quad (5)$$

$$a_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{12} a_{ij} \leq 1, \quad j = 1, \dots, 12.$$

Решая задачу (5) с помощью средств Microsoft Excel, находим неотрицательные элементы матрицы A

Матрица A показывает, какую долю национального дохода, один регион должен тратить на покупку товаров у другого региона, чтобы торговля между ними была сбалансированной.

Так, например, обращаясь к первому столбцу матрицы A (в первом столбце, согласно данным таблицы 1 и обозначению a_{ij} , расположены данные по торговле Карачаево-Черкесской Республики с другими регионами), заключаем, что доля дохода, которую Карачаево-Черкессия должна тратить на закупку товара в других республиках должна составить (при сбалансированной торговле)

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0,29, & a_{12} &= 0,37, & a_{13} &= 0, \\ a_{14} &= 0,29, & a_{15} &= 0, & a_{16} &= 0,18, \\ a_{17} &= a_{18} = a_{19} = a_{10} = a_{11} = a_{12} = 0. \end{aligned}$$

Список литературы

1. *Н.Ш.Кремер и др.* Высшая математика для экономистов : учебник для студентов вузов. 3-е издание. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. 479 с.
2. Карачаево-Черкесская Республика: статистический сборник. Черкесск : Карачаево-Черкесскстат. 2005. 253 с.
3. *Сизиков В.С.* Математические методы обработки результатов измерений: учебник для вузов. Спб. : Политехника, 2001. 240 с.