

DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.3.20](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.3.20)

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ЛАВОВОГО КУПОЛА НА ВУЛКАНЕ КОЛИМА VOF И SPH МЕТОДАМИ

И.С. Стародубцев^{1,2}, И.А. Цепелев¹¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация²Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Российская Федерация

Потоки лавы при извержении вулканов могут иметь катастрофические последствия как для жизни человека, так и для окружающей среды. Моделирование подобных ситуаций представляет собой важную научную задачу. Основными движущими силами в эволюции упомянутых лавовых потоков являются гравитационные силы, силы вязкого трения на поверхности разлива и процессы кристаллизации расплавленных пород в лавовые плато, трубки и купола. По характеру процесса и составу выходящего материала все вулканические извержения делятся на три типа: взрывные (с выбросом большого объема газов и твердых элементов; лава не вытекает или вытекает в небольшом количестве), экструзивные (выдавливается густая вязкая магма) и эффузивные (лава изливается и растекается по земной поверхности или океаническому ложу). В данной работе изучается экструзивное извержение. Его математическая модель включает в себя уравнение Навье–Стокса, уравнение несжимаемости, уравнение переноса вязкой фазы, а также соответствующие начальные и граничные условия. Рассматриваются и сравниваются модели потоков вулканической лавы в рамках постановок Эйлера (Volume Of Fluid – VOF) и Лагранжа (Smooth Particle Hydrodynamic – SPH). Для проведения компьютерных вычислений привлекаются пакеты ANSYS Fluent, OpenFOAM и библиотека SPLisHSPlasH. Соответствующие алгоритмы реализуются на языке C++. Осуществляется численное моделирование эволюции реального лавового купола, сформировавшегося на вулкане Колима (Мексика) в феврале–марте 2013 года. Для этого эксперимента используется информация о динамике роста лавового купола, собранная во время извержения. Демонстрируется, как компьютерное моделирование позволяет установить зависимость морфологии лавового купола от реологических свойств высоковязкой жидкости и интенсивности истечения лавы.

Ключевые слова: вязкая жидкость, многофазная жидкость, уравнения Навье–Стокса, краевая задача, численное моделирование, гидродинамика гладких частиц, вулканические извержения, вулкан Колима

THE NUMERICAL MODELING OF LAVA DOME EVOLUTION AT VOLCÁN DE COLIMA USING VOF AND SPH METHODS

I.S. Starodubtsev^{1,2} and I.A. Tsepelev¹¹Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russian Federation²Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation

Lava flows from extrusive volcanic eruptions can have catastrophic consequences both for human life and the environment. Modeling such situations is an important scientific problem. The main driving forces in the evolution of the mentioned lava flows are gravitational forces, viscous friction forces on the surface of the spill, and the processes of crystallization of molten rocks into lava plateau, tubes, and domes. In this paper, the mathematical model of an extrusive volcanic eruption includes the Navier–Stokes equation, the incompressibility equation, the viscous phase transfer equation, as well as the corresponding initial and boundary conditions. Mathematical models of volcanic lava flows are considered and compared within the Euler (Volume Of Fluid – VOF) and Lagrange (Smooth Particle Hydrodynamic – SPH) formulations. ANSYS Fluent, OpenFOAM, and SPLisHSPlasH packages were used for computer simulation. Computer simulation algorithms for the problem are implemented in C++ language. Numerical modeling of the evolution of a real lava dome formed at the Colima volcano (Mexico) in February–March 2013 was carried out. For this experiment, information about the dynamics of lava dome growth, collected during the eruption, was used. It is shown how the computer simulation approach makes it possible to establish the dependence of the lava dome morphology on the rheology of a highly viscous fluid and the intensity of lava outflow.

Key words: viscous flow, multiphase flow, Navier–Stokes equations, boundary value problem, numerical simulation, smooth particle hydrodynamics, volcanic eruption, volcán de Colima

1. Введение

Разработка физико-математических моделей и соответствующего программного обеспечения дает новые возможности для прогнозирования районов с потенциально высоким риском деятельности близко расположенных активно действующих вулканов. При этом численные методы исследования сочетаются с традиционными лабораторными и полевыми наблюдениями и способствуют наиболее точному пониманию природы явления извержения. Работы [1], [2] аргументировано обосновывают, что математическое моделирование играет важную роль в понимании структур потока лавы, его морфологии и тепловой эволюции. В данной работе обсуждаются и сравниваются два подхода к построению численных моделей. Эйлеровый подход — VOF (Volume Of Fluid) метод [3], моделирует процесс эволюции вулканической лавы как движение многофазной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести в пространственной области. При втором подходе — лагранжевом, поток жидкости представляется набором отдельных взаимодействующих друг с другом частиц; в его основе лежит гидродинамика

сглаженных частиц — SPH (Smooth Particle Hydrodynamics) [4]. Эти подходы позволяют изучать лавовые потоки на реальной топографии земной поверхности с учетом сложных реологических свойств вязкой среды и различных граничных условий.

Основная идея эйлеровых алгоритмов состоит в том, что область непрерывного изменения аргумента заменяется конечным (дискретным) множеством точек (узлов), называемым сеткой. Вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции или только в узлах сетки, или как среднеинтегральные в ячейках (конечных элементах или конечных объемах) [5]. Как правило, расчетная сетка является неструктурированной и может перестраиваться в процессе счета с целью адаптации к отыскиваемому решению, например, при наличии тонких слоев или областей с большим градиентом параметров задачи. При наличии межфазной границы она перемещается по сетке, и для определения ее положения нужны специальные методики. Наиболее распространенным и доступным в этом случае является метод VOF, основанный на нахождении объемной доли жидкости в ячейках [3].

Основная идея методов сглаженных частиц (SPH методов) состоит в том, что сплошная среда рассматривается как набор виртуальных частиц, которые свободно перемещаются вдоль характеристик уравнения адвекции. Таким образом, естественно рассматривать уравнения динамики сплошной среды в лагранжевых координатах. После дискретизации дифференциальные уравнения для скорости, давления, местоположения частиц, температуры и других характеристик среды, записанные в частных производных, преобразуются в обыкновенные дифференциальные уравнения эволюции каждой частицы. Число таких дифференциальных уравнений соответствует количеству частиц в дискретной расчетной области задачи. SPH методы применимы для математического моделирования лавовых потоков благодаря тому, что, с одной стороны, они способны описывать свободную поверхность потока, представляющего собой многокомпонентную среду (а именно многофазную среду газ–жидкость–твердое тело). Основное препятствие для распространения SPH методов в моделировании природных явлений — это высокая сложность вычислений, которая традиционно разрешается путем использования вычислительных кластеров. С другой стороны, метод демонстрирует высокую степень распараллеливания, которая позволяет эффективно реализовать его на современном оборудовании, например, на новом поколении графических сопроцессоров (Graphics Processing Unit — GPU), графических карт.

Обсудим содержательную сторону проблемы. Рассмотрим какой-либо процесс, в котором высоковязкая магма выдавливается из отверстия на некоторой поверхности и растекается по ней. Если в магме содержится мало кристаллов и много растворенных газов, то она относительно маловязкая и взрывоопасная. Лавы средней вязкости формируют пологие вулканические купола. Если же вязкость лавы при ее выжимании из жерла в миллиард раз больше, чем вязкость меда, то образуется неустойчивый объект, который выглядит как обелиск. Лавовые купола обычно имеют твердую поверхность — панцирь, но остаются подвижными и деформируются в течение дней или месяцев. Обрушение таких объектов может вызвать взрывное извержение магмы, камнепад, обвалы и излияние пирокластических потоков — смеси высокотемпературных вулканических газов, пепла и обломков пород. Уметь максимально точно прогнозировать такие извержения, вовремя защитить людей и инфраструктуру — важная задача вулканологии. На морфологию лавовых куполов влияют реологические свойства магмы и скорость ее поступления из жерла вулкана. Вязкость магмы обуславливается объемной долей кристаллов, образование которых в свою очередь определяется кинетикой кристаллизации [6]. Таким образом, по известным реологии магмы (зависящей от кинетики роста кристаллов) и расходу лавы (на рассматриваемом рельефе местности) можно осуществить моделирование эволюции лавового купола.

Сведениями о вязкости лавы авторы данной работы не располагали. Была доступна информация о скорости роста массы лавового купола и границе взаимодействия высоковязкой лавы и воздуха, собранная во время извержения. Чтобы оценить вязкость магмы в образованном ею лавовом куполе, осуществляется поиск минимальной разницы между наблюдаемой и рассчитанной формами купола. Этот параметр, как правило, используется в компьютерном зрении и теории обработки изображений. По установленной таким образом модели формы лавового купола находятся параметры реологической модели. Следуя этой методике, далее необходимо численно решать модельную задачу с различными распределениями вязкости в лаве и сравнивать эти результаты с данными мониторинга. При этом тепловые и нелинейные эффекты в математической модели во внимание не принимаются, хотя они оказывают значимое влияние на морфологию лавового купола. Однако обосновать аналитически корректность модели с их учетом невозможно, поэтому оценить, насколько получаемые результаты достоверны, может только вулканолог.

Далее представляются результаты компьютерного моделирования реального лавового купола, сформировавшегося на вулкане Колима (Мексика) в феврале–марте 2013 года. Вулкан Колима [7] является одним из самых активных вулканов Северной Америки и располагается в западной части Транс-Мексиканского вулканического пояса на высоте 3860 м. Динамика вулкана представляет собой периодически повторяющиеся эпизоды взрывных и эффузивных извержений. Такие извержения с образованием лавовых куполов обычно характеризуются низкой скоростью экструзии магмы из вулканического жерла (скорость порядка 10^{-4} м/с) и высокой вязкостью магмы (вязкость порядка 10^{10} Па·с и выше).

2. Двухфазная модель эволюции лавового купола

Моделируемая область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ построена на основе данных наблюдений; в частности, топография кратера вулкана Колима по состоянию на январь 2013 года учитывается в модели как топография нижней границы области (Рис. 1). Ширина кратера, в котором растет купол, составляет 120 м, глубина — 18 м [7]; глубина модельного канала принята равной 30 м. Ширина жерла вулкана и угол вулканического склона равняются, соответственно, 14 м и 56° (так показывают спутниковые радарные снимки высокого разрешения [8]).

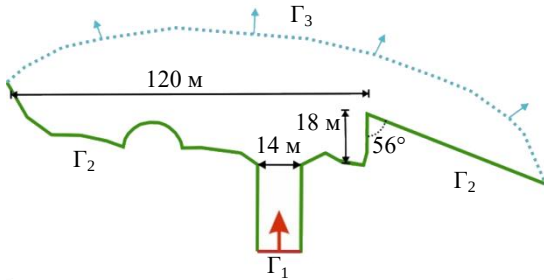


Рис. 1. Моделируемая область и ее граница по данным аэрофотосъемки

Извержения с образованием лавовых куполов обычно характеризуются низкой скоростью экструзии магмы из вулканического жерла (расход в несколько $\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$) и ее высокой вязкостью [8]. Для моделирования движения высоковязкой несжимаемой ньютоновской изотермической жидкости в поле силы тяжести используется двухфазная модель [9]. Многофазный поток — это поток из нескольких жидкостей. В многофазном потоке каждая жидкость может иметь свое собственное поле скорости или общее. Жидкости не смешиваются, но обладают некоторой зоной взаимодействия и могут влиять друг на друга посредством межфазных сил, например, сил поверхностного натяжения. Течение такого потока

в декартовых координатах на отрезке времени $t \in [0, 9]$, описывается нестационарным уравнением Навье–Стокса [10, 11] с начальным условием $\mathbf{u}(t=0, \mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$:

$$\frac{\partial(\rho_{\text{mix}}(\alpha)\mathbf{u})}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\rho_{\text{mix}}\mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \left(((\eta_L - \eta_A)\alpha + \eta_A)(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) \right) + \mathbf{G}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

и уравнением неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2)$$

Здесь: $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ — вектор скорости; $\rho_{\text{mix}}(\alpha) = (\rho_L - \rho_A)\alpha + \rho_A$ — плотность потока как функция объемной доли жидкости (α), где ρ_A и ρ_L — плотность воздуха и лавы; $\mathbf{G} = (0, -g\rho_{\text{mix}}(\alpha))$ — вектор внешних массовых сил, где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения; p — давление в потоке; η_A и η_L — динамическая вязкость воздуха и лавы; $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ — пространственные координаты; t — время; ∇ и $(\nabla \cdot)$ — операторы градиента (дивергенции); $\mathfrak{G}$ — продолжительность течения.

Перенос двухфазной жидкости с начальным условием описывается уравнением адвекции:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) = 0, \quad \alpha(t=0, \mathbf{x}) = \alpha_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

где $\alpha(t, \mathbf{x}) \in [0, 1]$ — объемная доля жидкости (лавы) в точке $\mathbf{x} \in \Omega$ в момент времени t . В начальный момент модельная область заполнена воздухом, поэтому $\alpha_0(\mathbf{x}) = 0$. В модели приняты ограничения: не учитываются тепловые эффекты, эффекты межфазового взаимодействия, рассматриваются только ньютоновские среды.

Ранее в работе [12] введено понятие обобщенного решения, исследован вопрос о корректной разрешимости начально-краевой задачи (1)–(3) и получены оценки искомого решения задачи в зависимости от начальных и граничных условий, принятых в модели. Аналитически установлена зависимость магнитуды поля скоростей от отношений ρ_L/ρ_A , η_L/η_A и $\nabla\alpha$.

Магма поднимается по каналу и в кратере образуется лавовый купол. Динамика магмы/лавы с воздухом описывается как динамика несжимаемой вязкой жидкости, состоящей из двух несмешиваемых фаз: магмы/лавы и воздуха. Влияние воздушной фазы на рост лавового купола пренебрежимо мало из-за большого отличия величин плотности и вязкости у магмы и воздуха. Магма представляет собой расплавленную породу и состоит из жидкой фазы, газа и твердых кристаллов, которые стремятся к равновесному состоянию. В зависимости от изменения температуры, давления, состава газов меняется

состояние расплава, и весь его объем непрерывно эволюционирует. Кристаллизация, по сравнению с охлаждением, является основным процессом, который ответственен за увеличение вязкости во время формирования лавовых куполов [13]. Поэтому, несмотря на более сложную реологию лавы, предполагается, что вязкость лавы η_L зависит только от объемной доли кристаллов [14]:

$$\eta_L(\varphi) = \eta_* (1 + \varphi^\delta) \left[1 - (1 - \xi) \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2(1 - \xi)} \varphi (1 + \varphi^\gamma) \right) \right]^{-B\varphi_*}. \quad (5)$$

Здесь: η_* — коэффициент удельной вязкости лавы; $\varphi = \phi/\phi_*$, где ϕ — объемная доля кристаллов, ϕ_* — удельная объемная доля кристаллов, представляющая критическую долю твердой фракции при начале экспоненциального увеличения вязкости лавы; δ , γ , ξ — эмпирические параметры, значения которых $\delta = 7,24$, $\gamma = 5,76$ и $\xi = 4,63 \cdot 10^{-4}$ взяты из работ [14], [15]; $\operatorname{erf}(\cdot)$ — функция ошибки; теоретическое значение коэффициента B определяется из уравнения Эйнштейна как $B = (\eta_L(\phi) - 1)/\phi$ [16] и изменяется от 1,5 до 5, что экспериментально установлено в [17].

Объемная доля кристаллов ϕ в магме находится из решения эволюционного уравнения, описывающего упрощенную кинетику роста содержания кристаллов при кристаллизации, вызванной дегазацией (см. например [6]):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = - \frac{\phi - \phi_{eq}}{\tau}, \quad (6)$$

с краевым условием для объемной доли кристаллов на Γ_1 и начальным условием $\phi(t=0, \mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Здесь: ϕ_{eq} — объемная доля кристаллов в состоянии равновесия, которая зависит от количества воды, содержащейся в магме, и от температуры; τ называется временем релаксации, которое требуется для уменьшения в e (в $\sim 2,72$) раз разности между фактическим (ϕ) и равновесным (ϕ_{eq}) значением объемных долей кристаллов по отношению к начальной разности $(\phi_{in} - \phi_{eq})$, где ϕ_{in} — начальная объемная доля кристаллов в магме.

При проведении численного эксперимента с использованием пакета программ ANSYS Fluent [18] реализованы процедуры на языке C для вычисления объемной доли кристаллов и вязкости в модели (1)–(6). В модельной области строилась неструктурированная сетка из ~ 30000 конечных объемов — гексаэдров. Максимальный угол неортогональности сетки составлял $\sim 22^\circ$, среднее значение $\sim 2,5^\circ$. Численные коды основывались на многофазной нестационарной VOF модели, а в решателе при интегрировании по времени уравнений (1)–(3) для совместного определения полей скоростей, давления и объемной доли жидкости с учетом уравнения кинетики кристаллов (4) использовалась неявная схема. На части Γ_1 нижней поверхности, где располагается жерло, для магмы задавались условия: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, $\rho = \rho_L$, $\eta = \eta_L$, $\phi_{in} = 0,6$, где $\mathbf{u}_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ м/с — скорость экструзии магмы, $\rho_L = 2500$ кг/м³, $\rho_A = 1,0$ кг/м³, $\eta_A = 10^{-4}$ Па·с, $\eta_* = 8 \cdot 10^4$ Па·с. На Γ_2 полагалось $\mathbf{u} = 0$. На верхней границе модельной области Γ_3 для воздуха выполнялись условия: $\nabla \mathbf{u} = 0$, $p = 0$, $\eta = \eta_A$, $\rho = \rho_A$. Время релаксации составляло $\tau = 3$ суток. Также были известны значения объемной доли кристаллов в равновесии ($\phi_{eq} = 0,82$) и удельной объемной доли кристаллов ($\phi_* = 0,591$).

Временной шаг при решении линейных алгебраических уравнений, полученных после дискретизации задачи, выбирался в диапазоне от 1 до 10 с. Неявная схема позволила выполнить стабильные вычисления с относительно большим временным шагом. Следует заметить, что хотя неявные схемы интегрирования не требуют жесткого ограничения величины числа Куранта, большие шаги по времени могут приводить к размыванию границы фаз, неограниченному росту магнитуды поля скоростей в воздухе. Явные же схемы интегрирования, которые, с точки зрения реализации, менее затратны, не позволили осуществить стабильные расчеты даже при малых числах Куранта. Для обеспечения устойчивости вычислительного процесса с учетом нелинейности математической модели шаг по времени и параметр релаксации для скорости эмпирически уменьшались. В виду очень высокой вязкости лавы ее течение медленное, характеризующее его число Рейнольдса мало. При этом для течения воздуха свойственно большое число Рейнольдса, что говорит о том, что течения в воздухе могут быть турбулентными. Выбранная ламинарная модель вязкости для всей модели дала возможность получать и контролировать магнитуду скорости

воздуха, что, говорит о некоторой искусственности описания его поведения. Но это не важно, так как движение воздуха не оказывает обратного влияния на лаву.

Параллельные вычисления производились на одном узле кластера «Уран» под управлением OS Linux на процессоре Intel® Xeon® X5675 (3.07GHz) и ОЗУ 48 ГБ без использования GPU.

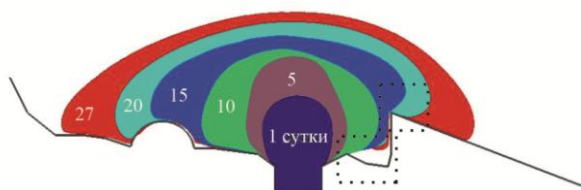


Рис. 2. Результаты компьютерного эксперимента в пакете ANSYS Fluent: эволюция лавового купола в разные моменты времени

На рисунке 2 демонстрируется рост лавового купола в течение 27 суток. На основе результатов наземной фотограмметрии [8] проведено компьютерное моделирование с подбором таких характеристик, при которых численное решение (расчетная форма купола) и наблюдаемый лавовый купол получились достаточно близкими, и стало возможным определение вязкости лавы. Такой подход к решению задачи реконструкции неизвестной вязкости вполне осуществим, поскольку, как сказано в разделе 1, принятая модель течения не учитывает зависимость вязкости лавы от температуры и скоростей

сдвига. Вязкость лавы при этом принимает значения от 10^7 до $7 \cdot 10^{10}$ Па·с (доля кристаллов изменяется от 0,6 до равновесного значения 0,82). Пунктиром выделены участки с нетипичным поведением найденного решения задачи, несоответствующим аналитическому решению, установленному в работе [19].

Для верификации результатов, представленных на рисунке 2, была написана программа в пакете OpenFOAM V.2.3 [20]. Численные коды основывались на двухфазной модели *interFoam*, а решатель включал явную по времени схему интегрирования уравнений (1)–(3). Число Куранта не превышало 0,25. Параметр релаксации для скорости и давления выбирался эмпирически так, чтобы обеспечивалась устойчивость вычислений. Перестройка сетки, уменьшение шага по времени и значений параметров, влияющих на скорость сходимости итерационного метода решения задачи, в осуществленных авторами вычислительных экспериментах не вызвали изменения морфологии проблемных (выделенных прямоугольниками) участков расчетной области (см. Рис. 3а). Однако расчеты с теми же исходными данными, но при искусственно заниженной вязкости лавы, привели к тому, что расчетная форма купола стала соответствовать аналитической из работы [19] (см. Рис. 3б), а также качественно отвечать аналитическим оценкам из [12].

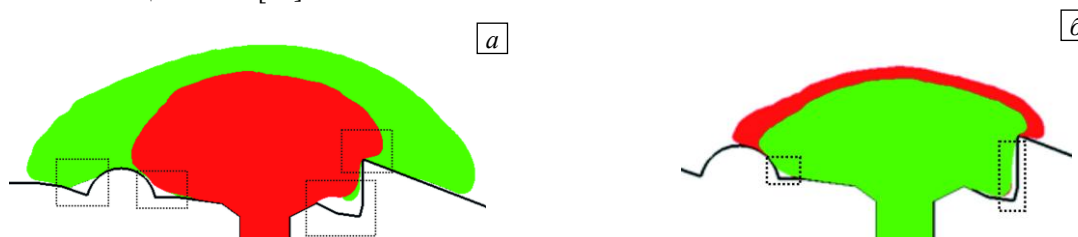


Рис. 3. Результаты компьютерного эксперимента для модели (1)–(6) в пакете OpenFOAM: (а) – все параметры расчета совпадают с данными расчета в ANSYS Fluent; демонстрируется положение лавы через 15 и 27 суток; (б) – вязкость купола понижена до 10^{10} Па·с; моменты времени для демонстрации выбраны произвольно; прямоугольниками выделены зоны, в которых решение задачи существенно отличается от аналитических оценок в модели (см. линию границы Γ_2)

3. Математическая модель SPH метода

Течение вязкой неоднородной слабо сжимаемой однофазной жидкости в поле силы тяжести в лагранжевых координатах в области, рассмотренной при расчете (см. Рис. 4), описывается уравнением Навье–Стокса [21]

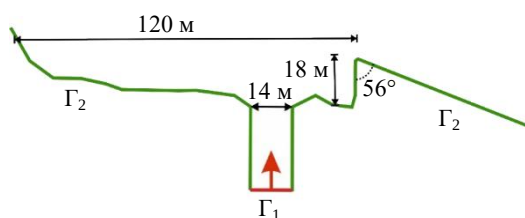


Рис. 4. Геометрия расчетной области (кратера вулкана, в котором развивается купол)

$$\rho_L \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot (\eta_L (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)) = -\nabla p + \rho_L \mathbf{g} \quad (7)$$

с начальным условием: $\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$.

На поверхности растекания лавы выполняется условие вязкого трения:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad f_G = \mu_G \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial \mathbf{n}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \subset \mathbb{R}. \quad (8)$$

Уравнение неразрывности задается в форме:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (9)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ — вектор скорости, $\mathbf{g} = (0; -9,81)$ — вектор ускорения свободного падения, p — давление, ρ_L — плотность лавы, η_L — динамическая вязкость лавы, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1, x_2)$ — характеристика уравнения адвекции (3), t — время, $\partial \mathbf{u}_\tau$ — проекция вектора скорости на касательную плоскость в точках поверхности Γ_2 , $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности Γ_2 , $\nabla (\nabla \cdot)$ — операторы градиента (дивергенции).

В координатах Лагранжа уравнение разрешимо аналитически, и объемная доля кристаллов ϕ имеет вид:

$$\phi(t, \mathbf{x}(t)) = \phi_{eq} + (\phi_{in} - \phi_{eq}) \exp(-t/\tau).$$

Вязкость лавы η_L в зависимости от объемной доли кристаллов определяется соотношением (5).

В подходе SPH сплошная среда представляется в виде совокупности N частиц, взаимодействующих друг с другом при приложении различных сил $\mathbf{F}$. Согласно (1), для каждой частицы справедлив закон Ньютона. Частица с номером i ($i = 1, \dots, N$) в момент времени t располагается в точке $\mathbf{x}_i(t)$, движется со скоростью $\mathbf{v}_i(t)$ и имеет физические характеристики, а именно давление p_i , массу m_i , плотность ρ_i , вязкость μ_i , объемную долю кристаллов ϕ_i . Влияние отдельной частицы на свойства жидкости оценивается в соответствии с расстоянием от нее до интересующей точки. Дискретные частицы обладают характерным радиусом $h > 0$ (иногда этот параметр называют дистанцией влияния конкретной частицы на соседей). В направлении увеличения дистанции влияния свойства частицы сглаживаются с помощью симметричной функции с ядром $W(|\mathbf{r}|, h)$, $\mathbf{r} = |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}|$, то есть значение скалярной физической величины A (давления p_i , массы m_i , плотности ρ_i , вязкости μ_i , объемной доли кристаллов ϕ_i) в точке $\mathbf{x}(t)$ описывается выражением:

$$A(\mathbf{x}(t)) = \int_{\mathbb{R}^2} A(\mathbf{x}) W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{x}.$$

При этом ядро W должно удовлетворять следующим условиям:

1. $W(|\mathbf{r}|, h) \geq 0$;
2. $\int_{\mathbb{R}^2} W(|\mathbf{r}|, h) d\mathbf{r} = 1$ — условие нормирования;
3. $\int_{\mathbb{R}^2} A(\mathbf{r}') \lim_{h \rightarrow 0} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}' = A(\mathbf{r})$ — условие вырождения, то есть при $h \rightarrow 0$ величина определена только в одной точке пространства;
4. $W(|\mathbf{r}|, h)|_{|\mathbf{r}|=h} = 0$, $\nabla W(|\mathbf{r}|, h)|_{|\mathbf{r}|=h} = 0$, $\nabla^2 W(|\mathbf{r}|, h)|_{|\mathbf{r}|=h} = 0$.

Выбор конкретного вида ядра имеет большое значение, поскольку от этого зависят точность, устойчивость, соблюдение фундаментальных физических законов в ходе вычислительного процесса и объем вычислительных затрат. При выборе ядра влиянием удаленных частиц можно пренебречь, так как $W(|\mathbf{r}|, h) = 0$ при $|\mathbf{r}| > h$. При этом отпадает необходимость проводить интегрирование по всем частицам, достаточно ограничиться лишь соседними:

$$\int_{\mathbb{R}^2} A(\mathbf{x}) W(|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}|, h) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2 \cap |\mathbf{r}| \leq h} A(\mathbf{x}) W(|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}|, h) d\mathbf{x},$$

что может значительно сократить время вычислений. Преимущество гидродинамики сглаженных частиц состоит в простоте вычисления частных производных в уравнениях (7)–(9), поскольку оно сводится к дифференцированию ядра. Интегрирование (7) по объему V_i позволяет записать второй закон Ньютона для i -й частицы в виде:

$$m_i \frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = \mathbf{F}_i^{\text{visc}} + \mathbf{F}_i^{\text{press}} + \mathbf{F}_i^{\text{ext}}. \quad (10)$$

Вязкость жидкости показывает, насколько жидкость способна противостоять деформации. Вода — это типичный пример жидкости с низкой вязкостью, тогда как мед имеет сравнительно высокую вязкость. В SPH вязкостью считается тенденция частиц двигаться вместе со своими соседями. Поэтому $\mathbf{F}_i^{\text{visc}}$ является внутренней силой, и для ее определения необходимо принимать во внимание влияние вязкости, плотности и скорости окружающих частиц с учетом расстояния.

Силы давления $\mathbf{F}_i^{\text{press}}$ внутри объема жидкости рассчитываются на основе плотности каждой частицы. Давление характеризует отличие плотности движущейся частицы от плотности покоя ρ_0 . Плотность покоя — это заранее заданная плотность, которой обладает жидкость, когда она полностью неподвижна. Следует отметить, что для несжимаемых или слабо сжимаемых сред из уравнения (9) следует, что $\rho(t, \mathbf{x}(t)) = \text{const}$. Жидкость пытается достичь состояния, в котором ее плотность становится равной плотности покоя у всех частиц. Там, где плотность ниже, $\mathbf{F}_i^{\text{press}}$ заставляет частицу сжимать поток, а там, где плотность выше, эта сила, наоборот, раздвигает частицы в потоке. Таким образом, сила $\mathbf{F}_i^{\text{press}}$ приводит частицы в состояние равновесия: $\rho(t, \mathbf{x}(t)) = \rho_0$.

Далее, на каждом временном шаге $(t, t + \Delta t)$ рассматриваются $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t)$, $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t)$, $\rho_i = \rho_i(t)$, $m_i = m_i(t)$, $\mu_i = \mu_i(t)$, то есть положение, скорость, плотность, массу и вязкость i -й частицы, а также шаг по времени Δt . Последовательно для каждой частицы выполняются следующие шаги:

1. Для частицы с координатой $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, \dots, N$) создается список ее соседей $\{\mathbf{x}_j : j = [1, M_i] \subset \mathbb{N}\}$ по правилу $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \leq h$. Далее производится суммирование по $j = [1, M_i]$.

2. Рассчитывается промежуточная скорость, которая учитывает в $\mathbb{R}^d$ влияния внешних и вязких сил согласно (10) [22], где $d = 2$:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{\rho_i} 2(d+2)\Delta t \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \cdot \frac{2\mu_i\mu_j}{\mu_i + \mu_j} \cdot \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot \nabla_i W_{ij}}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2 + 0.01h} \right) \mathbf{u}_i^* + \frac{1}{\rho_i} 2(d+2)\Delta t \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \cdot \frac{2\mu_i\mu_j}{\mu_i + \mu_j} \cdot \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot \nabla_i W_{ij}}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2 + 0.01h} \mathbf{u}_j^* = \\ & = \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{g}\Delta t; \\ & \mathbf{F}_i^{\text{visc}} + \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = m_i (\mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i) (\Delta t)^{-1}. \end{aligned}$$

Для вычисления вязких сил используется неявная по времени схема. В результате получается система линейных алгебраических уравнений с положительно определенной симметричной матрицей. Для решения системы применяется метод сопряженных градиентов. Неявная схема обладает свойством безусловной устойчивости и позволяет решать задачи в случаях с высокой вязкостью жидкости. Для учета вязких сил приемлема и явная по времени схема, которая легко и эффективно реализуется на графических картах.

Но при этом необходимо ограничивать шаг по времени: $\Delta t \leq (1/2^d) h^2 \min_i \rho_i \left(\max_i \mu_i \right)^{-1}$.

Устойчивость численных методов решения задач течения жидкости с конвекцией или волновыми явлениями определяется согласно условию Куранта–Фридрихса–Леви; для решения уравнения неразрывности (9) шаг по времени выбирается как

$$\Delta t \leq 0.1 h \left(\max_i |\mathbf{u}_i| \right)^{-1}.$$

Сначала методом Эйлера решается уравнение $D\rho/Dt = \rho \nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0$, затем пересчитывается плотность частиц по формуле:

$$\rho_i^* = \rho_i + \Delta t \rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_j^*) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (i = 1, \dots, N).$$

В результате решения уравнения Пуассона $\Delta t \nabla \cdot ((1/\rho^*) \nabla p) = \nabla \cdot \mathbf{u}^*$ вычисляется давление [23]:

$$p_i = \frac{\rho_i^* - \rho_i}{\Delta t^2} \rho_i^2 \left(\left| \sum_j m_j \nabla_i W_{ij} \right|^2 + \sum_j |m_j \nabla_i W_{ij}|^2 \right)^{-1} \quad (i=1, \dots, N).$$

После этого корректируются значения скорости:

$$\mathbf{u}_i^{**} = \Delta t \, m_i^{-1} \mathbf{F}_i^{\text{press}} = \mathbf{u}_i^* - \Delta t \sum_j m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij}.$$

В момент времени $t=0$ поверхность Γ_1 покрывается частицами: размер частицы $R=0,25$ м (что соизмеримо с размером конечных объемов в VOF методе), скорость частиц $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0$ и физические характеристики $\rho=\rho_L$, $\eta=\eta_L$, $\phi_{in}=0,6$ соответствуют модели (1)–(6). В граничном условии (8) полагается $\mu_G=10^{14}$ Па·с. В начальный момент времени кратер заполнен жидкостью с постоянным количеством кристаллов: $\phi(t=0)=0,6$ (см. начальное состояние, Рис. 5). Препятствие на поверхности растекания лавы, которое в первом эксперименте моделируется заданием геометрии области, в данном случае представляется с помощью частиц жидкости с высокой вязкостью 10^{14} Па·с [24]. Через интервал времени, равный $2R|\mathbf{u}_0|^{-1}$ с (этим гарантируется соблюдение условия несжимаемости (9)), поверхность Γ_1 покрывается новыми частицами с теми же самыми характеристиками.

Ядро имеет вид кубического сплайна:

$$W(\mathbf{r}, h) = \sigma_3 \begin{cases} 6(q^3 - q^2) + 1, & 0 \leq q \leq 0,5, \\ 2(1-q)^3, & 0,5 \leq q \leq 1, \\ 1, & q \notin [0, 1], \end{cases} \quad q = |\mathbf{r}|h^{-1},$$

где σ_3 — нормирующий множитель.

Динамику взаимодействия двух жидкостей демонстрирует рисунок 5. При его сравнении с рисунком 3 видно, что решение задачи методом SPH ближе к ее аналитическому решению из [19].

Следует заметить, что через 11 и 14 суток на поверхности высоковязкой жидкости нарушается условие несжимаемости, и плотность отличается от заданного в модели значения. Для обсуждаемой задачи это не является критичной ошибкой численного моделирования. Более того, данный факт может быть использован для идентификации участков лавы, которая взаимодействует с внешней средой. Однако качественное выделение границ взаимовлияния различных жидкостей в рамках многофазных моделей

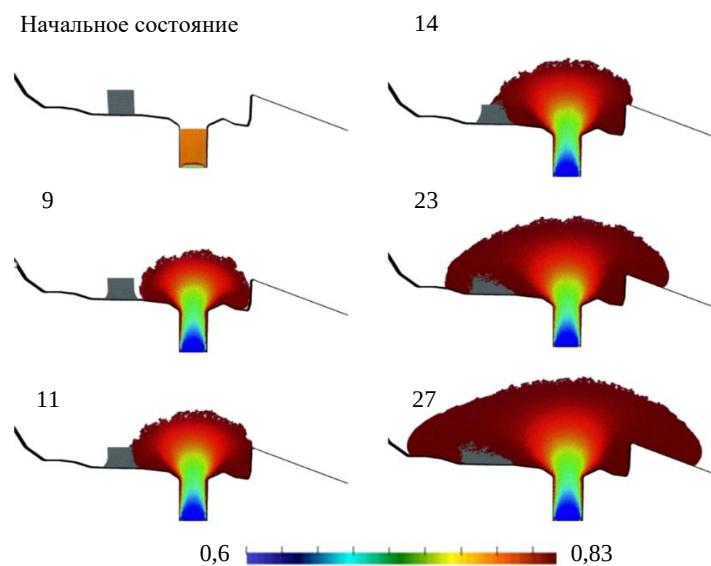


Рис. 5. Результаты моделирования лавового купола методом SPH; номер кадра соответствует времени расчета в сутках, цветовая градация – объемной доле кристаллов

SPH методами представляет собой затратную вычислительную проблему (см., например, [25]), в отличие от VOF метода, где такая идентификация легко осуществляется путем анализа объемной доли жидкости в ячейке сетки алгебраическим или геометрическим методом [3].

Программные коды для организации численного эксперимента разработаны на основе SPLisHSPlasH — библиотеки с открытым исходным кодом для физического моделирования жидкостей на языке C++. Основные возможности пакета изложены в [26]. Для моделирования динамики лавы написан программный код с учетом переменной вязкости, внесены изменения в решатель при расчете давлений и добавлены коды для расчета кинетики роста кристаллов и вязкости. Вычисления реализованы на персональном компьютере под управлением OS Ubuntu 14.10 без использования GPU. Распараллеливание осуществляется на основе интерфейса OpenMP, который предназначен для программирования многопоточных приложений на многопроцессорных системах с общей памятью.

4. Сравнение результатов численных экспериментов

Метод VOF имеет следующие преимущества и недостатки:

1. Необходимо генерировать сетку и гарантировать ее качество. Это отдельная и довольно трудоемкая (особенно в 3D случае) задача, от ее качественного решения зависит точность и устойчивость вычислительного процесса, а также адекватность численных расчетов по поставленной математической модели. Однако сетку можно адаптировать в процессе решения задачи и тем самым управлять его точностью.

2. Вычислительная сложность полностью определяется размерностью дискретной задачи (количеством элементов в разбиении пространственной области и величиной шага по времени). Эти расчетные параметры должны быть обоюдно согласованными для обеспечения нужной точности и устойчивости вычислений.

3. Возможность проведения вычислений в параллельном режиме позволяет решать задачи высокой размерности на современном оборудовании. В настоящее время вычислительный кластер способен объединить вычислительные модули с процессорами x86–64 и несколькими графическими сопроцессорами. Для передачи данных между вычислительными узлами созданы высокоскоростные сети, что позволяет распределить выполнение расчетов между вычислительными узлами. Обмен данными и синхронизация осуществляется посредством передачи сообщений MPI (Message Passing Interface). Использование графических карт достаточно проблематично.

Метод SPH имеет следующие преимущества и недостатки:

1. Точность метода зависит от численных методов аппроксимации дифференциальных операторов и размера взятых для исследования дискретных частиц. Параметры последних являются фиксированными в ходе вычислительного эксперимента, их изменение в процессе расчета не производится. Время расчета нелинейно возрастает по мере увеличения количества частиц. Это критично при решении задач в больших пространственных областях. Для повышения эффективности расчетов привлекаются открытые программные пакеты: OpenMP — для организации многопоточковых расчетов на процессорах с многоядерной архитектурой и общей памятью; CUDA — при необходимости использования в расчетах GPU. Реализовать эффективный параллельный алгоритм для систем с распределенной памятью средствами MPI достаточно проблематично.

2. Возможность учета сил взаимодействия между жидкими и твердыми частицами может быть встроена в метод, что позволяет легко моделировать как воздействие, так и деформацию твердых тел, а также процессы фазового перехода из жидкого состояния в твердое. Для описания поведения расчетных частиц на участках границы требуется дополнительная аппроксимация дифференциальных операторов. Метод не предназначен для расчета стационарных течений.

5. Заключение

В данном исследовании представлены две математических модели движения высоковязкой ньютоновской жидкости в поле силы тяжести. Проведено сравнение VOF и SPH подходов к компьютерному моделированию эволюции реального лавового купола, сформировавшегося на вулкане Колима (Мексика) в феврале–марте 2013 года. Математические модели для каждого из методов учитывают конкретные особенности алгоритмов для эффективной организации вычислительного эксперимента. Демонстрируются преимущества и недостатки методов применительно к данной задаче. Для пакетов ANSYS Fluent, OpenFOAM и библиотеки SPLisHSPlasH разработаны компьютерные коды на языке C++ для проведения вычислений. Выполненные с помощью выбранных методов расчеты взаимно дополняют друг друга и могут расширить возможности традиционных полевых подходов к изучению деятельности вулканов.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ и DFG в рамках научного проекта № 20-51-12002. Вычисления осуществлялись на суперкомпьютере «Уран» ИММ УрО РАН (г. Екатеринбург).

Литература

- Costa A., Macedonio G. Computational modeling of lava flows: A review // *Kinematics and dynamics of lava flows* / Ed. M. Manga, G. Ventura. London, Geological Society of America, 2005. P. 209-218. <https://doi.org/10.1130/0-8137-2396-5.209>
- Cordonnier B., Lev E., Garel F. Benchmarking lava-flow models // *Detecting, Modelling and Responding to Effusive Eruptions* / Ed. A.J.L. Harris, T. De Groeve, F. Garel, S.A. Carn. Geological Society of London, 2016. P. 425-445. <https://doi.org/10.1144/SP426.7>
- Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *J. Comput. Phys.* 1981. Vol. 39. P. 201-225. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90145-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90145-5)
- Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics // *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 1992. Vol. 30. P. 543-574.
- Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. М.: Издательство МЭИ, 2003. 312 с.
- Tsepelev I., Ismail-Zadeh A., Melnik O. Lava dome morphology inferred from numerical modeling // *Geophys. J. Int.* 2020. Vol. 223. P. 1597-1609. <https://doi.org/10.1093/gji/ggaa395>
- Zobin V.M., Arámbula R., Bretón M., Reyes G., Plascencia I., Navarro C., Téllez A., Campos A., González M., León Z., Martínez A., Ramírez C. Dynamics of the January 2013–June 2014 explosive-effusive episode in the eruption of Volcán de Colima, México: insights from seismic and video monitoring // *Bull. Volcanol.* 2015. Vol. 77. P. 31. <https://doi.org/10.1007/s00445-015-0917-z>
- Walter T.R., Harnett C.E., Varley N., Bracamontes D.V., Salzer J., Zorn E.U., Bretón M., Arámbula R., Thomas M.E. Imaging the 2013 explosive crater excavation and new dome formation at Volcan de Colima with TerraSAR-X, time-lapse cameras and modelling // *J. Volcanol. Geoth. Res.* 2019. Vol. 369. P. 224-237. <https://doi.org/10.1016/j.jvolgeores.2018.11.016>
- Низматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Часть 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
- Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Clarendon Press, 1961. 652 p.
- Tsepelev I.A., Ismail-Zadeh A.T., Melnik O.E. Lava dome evolution at Volcán de Colima, México during 2013: Insights from numerical modeling // *J. Volcanolog. Seismol.* 2021. Vol. 15. P. 491-501. <https://doi.org/10.1134/S0742046321060117>
- Короткий А.И., Стародубцева Ю.В., Цепелев И.А. Гравитационное течение двухфазной вязкой несжимаемой жидкости // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2021. Т. 27, № 4. С. 61-73. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-61-73>
- Chevrel M.O., Platz T., Hauberet E., Baratoux D., Lavallée Y., Dingwell D.B. Lava flow rheology: A comparison of morphological and petrological methods // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2013. Vol. 384. P. 109-120. <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2013.09.022>
- Lejeune A.-M., Richet P. Rheology of crystal-bearing silicate melts: An experimental study at high viscosity // *J. Geophys. Res.* 1995. Vol. 100. P. 4215-4229. <https://doi.org/10.1029/94JB02985>
- Costa A., Caricchi L., Bagdassarov N. A model for the rheology of particle-bearing suspensions and partially molten rocks // *Geochem. Geophys. Geosys.* 2009. Vol. 10. Q03010. <https://doi.org/10.1029/2008GC002138>
- Mardles E.W.J. Viscosity of suspensions and the Einstein equation // *Nature.* 1940. Vol. 145. P. 970. <https://doi.org/10.1038/145970a0>
- Jeffrey D.J., Acrivos A. The rheological properties of suspensions of rigid particles // *AIChE J.* 1976. Vol. 22. P. 417-432. <https://doi.org/10.1002/aic.690220303>
- <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent> (дата обращения 25.08.2022)
- Lister J.R. Viscous flows down an inclined plane from point and line sources // *J. Fluid Mech.* 1992. Vol. 242. P. 631-653. <https://doi.org/10.1017/S0022112092002520>
- <https://openfoam.org/> (дата обращения 25.08.2022)
- Liu G.R., Liu M.B. Smoothed particle hydrodynamics: A meshfree particle method. World Scientific. 2003. 472 p. <https://doi.org/10.1142/5340>
- Violeau D. Dissipative forces for Lagrangian models in computational fluid dynamics and application to smoothed-particle hydrodynamics // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 80. 036705. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.036705>
- Bender J., Koschier D. Divergence-free SPH for incompressible and viscous fluids // *IEEE Trans. Visual. Comput. Graph.* 2016. Vol. 23. P. 1193-1206. <https://doi.org/10.1109/TVCG.2016.2578335>
- Bender J., Kugelstadt T., Weiler M., Koschier D. Volume maps: An implicit boundary representation for SPH // *Proc. of the MIG '19: Motion, Interaction and Games.* Newcastle upon Tyne, United Kingdom, October 28-30, 2019. Art. 26. 10 p. <https://doi.org/10.1145/3359566.3360077>
- Sandim M., Cedrim D., Nonato L.G., Pagliosa P., Paiva A. Boundary detection in particle-based fluids // *Comput. Graph. Forum.* 2016. Vol. 35. P. 215-224. <https://doi.org/10.1111/cgf.12824>
- <https://splishsplash.readthedocs.io/en/2.9.0/about.html> (дата обращения 25.08.2022)

References

- Costa A., Macedonio G. Computational modeling of lava flows: A review. *Kinematics and dynamics of lava flows*, ed. M. Manga, G. Ventura. Geological Society of America, 2005. P. 209-218. <https://doi.org/10.1130/0-8137-2396-5.209>
- Cordonnier B., Lev E., Garel F. Benchmarking lava-flow models. *Detecting, modelling and responding to effusive eruptions*, ed. A.J.L. Harris, T. De Groeve, F. Garel, S.A. Carn. Geological Society of London, 2016. P. 425-445. <https://doi.org/10.1144/SP426.7>
- Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.*, 1981, vol. 39, pp. 201-225. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90145-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90145-5)
- Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 1992, vol. 30, pp. 543-574.

5. Patankar S.V. *Computation of conduction and duct flow heat transfer*. CRC Press, 2019. 370 p.
6. Tsepelev I., Ismail-Zadeh A., Melnik O. Lava dome morphology inferred from numerical modeling. *Geophys. J. Int.*, 2020, vol. 223, pp. 1597-1609. <https://doi.org/10.1093/gji/ggaa395>
7. Zobin V.M., Arámbula R., Bretón M., Reyes G., Plascencia I., Navarro C., Téllez A., Campos A., González M., León Z., Martínez A., Ramírez C. Dynamics of the January 2013–June 2014 explosive-effusive episode in the eruption of Volcán de Colima, México: insights from seismic and video monitoring. *Bull. Volcanol.*, 2015, vol. 77, p. 31. <https://doi.org/10.1007/s00445-015-0917-z>
8. Walter T.R., Harnett C.E., Varley N., Bracamontes D.V., Salzer J., Zorn E.U., Bretón M., Arámbula R., Thomas M.E. Imaging the 2013 explosive crater excavation and new dome formation at Volcan de Colima with TerraSAR-X, time-lapse cameras and modelling. *J. Volcanol. Geoth. Res.*, 2019, vol. 369, pp. 224-237. <https://doi.org/10.1016/j.jvolgeores.2018.11.016>
9. Nigmatulin R.I. *Dynamics of multiphase media*. Vol. 1. Hemisphere Pub. Corp., 1991. 532 p.
10. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Clarendon Press, 1961. 652 p.
11. Tsepelev I.A., Ismail-Zadeh A.T., Melnik O.E. Lava dome evolution at Volcán de Colima, México during 2013: Insights from numerical modeling. *J. Volcanolog. Seismol.*, 2021, vol. 15, pp. 491-501. <https://doi.org/10.1134/S0742046321060117>
12. Korotkii A.I., Starodubtseva Yu.V., Tsepelev I.A. Gravitational flow of a two-phase viscous incompressible liquid. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 61-73. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-61-73>
13. Chevrel M.O., Platz T., Hauberet E., Baratoux D., Lavallée Y., Dingwell D.B. Lava flow rheology: A comparison of morphological and petrological methods. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 2013, vol. 384, pp. 109-120. <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2013.09.022>
14. Lejeune A.-M., Richet P. Rheology of crystal-bearing silicate melts: An experimental study at high viscosity. *J. Geophys. Res.*, 1995, vol. 100, pp. 4215-4229. <https://doi.org/10.1029/94JB02985>
15. Costa A., Caricchi L., Bagdassarov N. A model for the rheology of particle-bearing suspensions and partially molten rocks. *Geochem. Geophys. Geosys.*, 2009, vol. 10, Q03010. <https://doi.org/10.1029/2008GC002138>
16. Mardles E.W.J. Viscosity of suspensions and the Einstein equation. *Nature*, 1940, vol. 145, p. 970. <https://doi.org/10.1038/145970a0>
17. Jeffrey D.J., Acrivos A. The rheological properties of suspensions of rigid particles. *AIChE J.*, 1976, vol. 22, pp. 417-432. <https://doi.org/10.1002/aic.690220303>
18. <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent> (accessed 25 August 2022)
19. Lister J.R. Viscous flows down an inclined plane from point and line sources. *J. Fluid Mech.*, 1992, vol. 242, pp. 631-653. <https://doi.org/10.1017/S0022112092002520>
20. <https://openfoam.org/> (accessed 25 August 2022)
21. Liu G.R., Liu M.B. *Smoothed particle hydrodynamics: A meshfree particle method*. World Scientific. 2003. 472 p. <https://doi.org/10.1142/5340>
22. Violeau D. Dissipative forces for Lagrangian models in computational fluid dynamics and application to smoothed-particle hydrodynamics. *Phys. Rev. E*, 2009, vol. 80, 036705. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.036705>
23. Bender J., Koschier D. Divergence-free SPH for incompressible and viscous fluids. *IEEE Trans. Visual. Comput. Graph.*, 2016, vol. 23, pp. 1193-1206. <https://doi.org/10.1109/TVCG.2016.2578335>
24. Bender J., Kugelstadt T., Weiler M., Koschier D. *Proc. of the MIG '19: Motion, Interaction and Games. Newcastle upon Tyne, United Kingdom, October 28-30, 2019. Art. 26. 10 p.* <https://doi.org/10.1145/3359566.3360077>
25. Sandim M., Cedrim D., Nonato L.G., Pagliosa P., Paiva A. Boundary detection in particle-based fluids. *Comput. Graph. Forum*, 2016, vol. 35, pp. 215-224. <https://doi.org/10.1111/cgf.12824>
26. <https://splishsplash.readthedocs.io/en/2.9.0/about.html> (accessed 25 August 2022)

Поступила в редакцию 04.07.2022; после доработки 27.07.2022; принята к опубликованию 26.07.2022

Сведения об авторах

Стародубцев Илья Сергеевич, кфмн, зав. сектором, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (ИММ УрО РАН), 620108, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16; e-mail: starodubtsevis@robolab.tk

Цепелев Игорь Анатольевич, кфмн, снс, ИММ УрО РАН; e-mail: tsepelev@imm.uran.ru