ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.977

СЛАБЫЕ СО ЗВЕЗДОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ[1]

Н. Н. Субботина, Е. А. Крупенников

В данной работе для аффинной детерминированной динамической системы рассмотрена задача динамической реконструкции наблюдаемой фазовой траектории $x^*(\cdot)$ этой системы и породившего ее управления на базе текущей информации о неточных дискретных замерах $x^*(\cdot)$. Уточняется корректная постановка задачи о построении аппроксимаций $u^l(\cdot)$ искомого нормального управления $u^*(\cdot)$, порождающего $x^*(\cdot)$. Обсуждается решение этой задачи, которое получено с помощью вариационного подхода, предложенного авторами. Приведены условия на входные данные задачи и условия согласования параметров аппроксимации (параметров точности и частоты замеров траектории и вспомогательного регуляризирующего параметра). При выполнении этих условий реконструированные траектории $x^l(\cdot)$ динамической системы равномерно сходятся к наблюдаемой траектории $x^*(\cdot)$ в пространстве непрерывных функций $\mathbb{C}$ при $l \to \infty$. В работе конкретизирован алгоритм построения вспомогательных функций, интерполирующих известные замеры, и получено условие согласования параметров аппроксимации, при котором предлагаемые управления $u^l(\cdot)$ сходятся слабо со звездой к $u^*(\cdot)$ в пространстве суммируемых функций $\mathbb{L}^1$.

Ключевые слова: задачи динамической реконструкции, выпукло-вогнутая невязка, задачи вариационного исчисления, гамильтоновы системы.

N. N. Subbotina, E. A. Krupennikov. Weak* approximations for the solution of a dynamic reconstruction problem.

We consider the problem of the dynamic reconstruction of an observed state trajectory $x^*(\cdot)$ of an affine deterministic dynamic system and the control that has generated this trajectory. The reconstruction is based on current information about inaccurate discrete measurements of $x^*(\cdot)$. A correct statement of the problem on the construction of approximations $u^l(\cdot)$ of the normal control $u^*(\cdot)$ generating $x^*(\cdot)$ is refined. The solution of this problem obtained using the variational approach proposed by the authors is discussed. Conditions on the input data and matching conditions for the approximation parameters (parameters of the accuracy and frequency of measurements of the trajectory and an auxiliary regularizing parameter) are given. Under these conditions, the reconstructed trajectories $x^l(\cdot)$ of the dynamical system converge uniformly to the observed trajectory $x^*(\cdot)$ in the space of continuous functions C as $l \to \infty$. It is proved that the proposed controls $u^l(\cdot)$ converge weakly* to $u^*(\cdot)$ in the space of summable functions L^1.

Keywords: dynamic reconstruction problems, convex–concave discrepancy, problems of calculus of variations, Hamiltonian systems.

MSC: 65K10, 34A55, 49K15

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-208-220

Введение

Статья посвящена задачам динамической реконструкции управлений (ЗДРУ) для детерминированных управляемых аффинных систем. Роль допустимых управлений играют ограниченные измеримые функции. Реконструкция проводится в реальном времени по мере поступления дискретных неточных замеров реализующейся (базовой) траектории управляемой системы, порождаемой неизвестным допустимым управлением. ЗДРУ состоит в реконструкции так называемого нормального управления — допустимого управления, порождающего базовую траекторию и имеющего минимальную норму в пространстве $\mathbb{L}^2$.

Проблемы восстановления управлений часто возникают в прикладных задачах, требующих анализа и синтеза управлений динамическими процессами (см., например, в механике [1], экономике [2], медицине [3]).

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-01-00362).

В частности, в рамки ЗДРУ укладываются актуальные задачи идентификации параметров детерминированных и распределенных динамических систем. Этой тематике посвящена значительная часть мировой литературы по динамическим системам.

Так, развитию классического подхода к решению задач идентификации, основанного на использовании метода наименьших квадратов, посвящена работа [4]. Решение задач идентификации с помощью анализа отклика (поведения модели в ответ на специального вида управления) рассмотрено в [5]. В работе [6] получено решение задачи идентификации нагрузок с помощью регуляризованной функции фильтрации.

Авторы работы [7] Ж. Чунг, А. К. Сайбаба, М. Браун, М. Вестман рассматривают эффективные итеративные методы, не использующие теорию матриц, основанные на обобщенной бидиагонализации Голубь — Кахана (Golub–Kahan bidiagonalization), которая допускает автоматическую регуляризацию параметров. В [8] исследуется обратная задача оценки внешнего воздействия на системы в реальном времени. Предложенный подход к решению опирается на теорию групп Ли. Также задачи идентификации параметров анализировались, например, М. С. Д'Аутилья, И. Сгура, Б. Боццини в работе [9], в которой предлагается решать подобные задачи с помощью рядов Фурье.

ЗДРУ можно рассматривать в рамках теории обратных задач, методам решения которых посвящена обширная часть математической литературы. Обзоры современных методов решения обратных задач можно найти в статьях [10–12].

Отметим работы С. И. Кабанихина и О. И. Криворотько (см. [13]), в которых предлагается оптимизационный подход к идентификации моделей на основе методов градиентного типа. Обратные задачи формулируются в виде операторного уравнения и затем сводятся к минимизации соответствующих функционалов невязки.

На основе регуляризации по Тихонову в работах У. Шмитта и др. (см. [14]) разработаны теоретические и прикладные подходы к решению обратных задач. В этих работах исследуются дискретные по времени линейные операторные уравнения, и для решения обратных задач минимизируется функционал Тихонова, где дополнительный штрафной член приводит к гладкости минимизатора по времени.

Хорошо известный подход к решению ЗДРУ был предложен А. В. Кряжимским и Ю. С. Осиповым (подход ОК, см. [15]). В основе подхода ОК лежит процедура экстремального прицеливания. Эта идея имеет истоки в работах школы Н. Н. Красовского по теории позиционного оптимального управления (см. [16]). Разработаны численные методы решения обратных задач, основанные на подходе ОК. Обзор этих методов приведен в работе [17].

В представленной работе развивается вариационный подход к решению ЗДРУ, который был предложен авторами этой статьи, а также Т. Б. Токманцевым (см. [1–3], подход СКТ). При этом для решения используются вспомогательные неклассические вариационные задачи на минимум интегрального выпукло-вогнутого функционала невязки. Предложены пошаговые алгоритмы решения ЗДРУ, синхронизированные с поступлением точек измерения и базирующиеся на подходе СКТ (см. [1–3]). Эти алгоритмы сводят ЗДРУ к интегрированию систем линейных ОДУ. В подходах ОК и СКТ применяются варианты регуляризации по Тихонову (см. [18]).

В статье рассматриваются аффинные детерминированные динамические управляемые системы. Ставится задача динамической реконструкции фазовой траектории $x^*(\cdot)$ такой системы и породившего ее неизвестного управления на базе текущей информации о неточных дискретных замерах наблюдаемой траектории $x^*(\cdot)$. Уточняется корректная постановка задачи о построении аппроксимаций $u^l(\cdot)$ искомого нормального управления $u^*(\cdot)$, порождающего $x^*(\cdot)$. Обсуждается решение этой задачи, которое получено с помощью вариационного подхода, предложенного авторами. Приведены условия на входные данные задачи и условия согласования параметров аппроксимации (параметров точности и частоты замеров траектории и вспомогательного регуляризирующего параметра). При выполнении этих условий реконструированные траектории $x^l(\cdot)$ динамической системы равномерно сходятся к наблюдаемой траектории $x^*(\cdot)$

в пространстве непрерывных функций $\mathbb{C}$ при $l \to \infty$ (см. [3]). В данной работе конкретизирован алгоритм построения вспомогательных функций, интерполирующих известные замеры. Получено условие согласования параметров аппроксимации, при котором предлагаемые управления $u^l(\cdot)$ сходятся слабо со звездой к $u^*(\cdot)$ в пространстве суммируемых функций $\mathbb{L}^1$.

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая задача динамической реконструкции управлений.

1.1. Динамика

Динамика рассматриваемых управляемых систем имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = G(t, x(t))u(t) + f(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, T], \quad m \geq n, \quad T < \infty, \tag{1.1}$$

где x — вектор фазовых переменных, а u — вектор управлений.

Допустимые управления — измеримые функции, удовлетворяющие ограничениям

$$u(t) \in \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m \quad \text{почти всюду на} \quad [0, T], \tag{1.2}$$

где $\mathbf{U}$ — выпуклый компакт.

1.2. Входные данные

Наблюдается некоторое движение системы (1.1) $x^*(\cdot)\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$, которое называется *базовой траекторией*. Допустимое управление, порождающее это движение, неизвестно. В реальном времени поступают неточные дискретные замеры y_k^δ базовой траектории $x^*(\cdot)\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$. Точность замеров $\delta > 0$ и шаг замеров $h^\delta > 0$ зафиксированы. Подразумевается, что

$$h^\delta = h(\delta) \overset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \frac{\delta}{h^\delta} \overset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{1.3}$$

Замеры имеют вид

$$\big\{ y_k^\delta \colon \|y_k^\delta - x^*(t_k)\| \leq \delta, \ t_k = kh^\delta, \ k = \overline{0, N}, \ N = \lceil T/h^\delta \rceil \big\}. \tag{1.4}$$

Символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму.

На основании этих данных производится реконструкция неизвестного управления, порождающего базовую траекторию.

1.3. Предположения

Будем считать, что входные данные (1.1)–(1.4) удовлетворяют следующим предположениям.

A.1. Существуют такие константы $\delta_0 > 0$, $h_0 > 0$, $d_0 > 0$ и компакт $\Psi \subset \mathbb{R}^n$, что для любой точности $\delta \in (0, \delta_0]$ и любого шага $h^\delta \in (0, h_0]$

$$\bigcup_{k = \overline{0, N}} B_{d_0}[y_k^\delta] \subset \Psi.$$

Символ $B_r[x]$ обозначает шар радиуса r с центром в точке x.

A.2. В динамике (1.1) элементы матричной функции $G\colon [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$ и вектор-функции $f\colon [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ липшицевы по совокупности переменных при $(t, x) \in D_0 \overset{\triangle}{=} [0, T] \times \Psi$ с константой $L_{D_0} > 0$.

A.3. Ранг матрицы $G(t, x)$ равен n при $(t, x) \in D_0$.

1.4. Задача динамической реконструкции

Обозначим через $\mathbf{U}^*$ множество допустимых управлений, порождающих $x^*(\cdot)$. Это множество непусто, поскольку предполагается, что базовая траектория порождается некоторым допустимым управлением. Однако это множество может состоять более, чем из одного элемента (в том числе из континуума элементов). Поэтому задача реконструкции управления некорректна. Чтобы корректно сформулировать эту обратную задачу, вводится понятие нормального управления.

Нормальное управление $u^*(\cdot) \in \mathbf{U}^*$ — это управление, имеющее минимальную норму в пространстве $\mathbb{L}^2$ среди всех элементов множества $\mathbf{U}^*$.

Для того чтобы доказать, что нормальное управление определяется единственным образом при сделанных выше предположениях, рассмотрим следующую вспомогательную минимизационную задачу.

Для фиксированного момента времени $t \in [0,T]$ такого, что существует производная $dx^*(t)/dt$, найти элемент $u \in \mathbb{R}^m$, который доставляет минимум величине $0.5\langle u,u\rangle$ при следующих ограничениях:

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = f(t,x^*(t)) + G(t,x^*(t))u.$$

Символ $\langle \cdot,\cdot \rangle$ означает скалярное произведение.

Эта задача на условный экстремум сводится (см. [19, п. 1.1.1]) к задаче на минимум функции Лагранжа

$$0.5\langle u,u\rangle + \Big\langle \psi, \frac{dx^*(t)}{dt} - f(t,x^*(t)) - G(t,x^*(t))u \Big\rangle \to \min, \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad \|\psi\| \neq 0. \tag{1.5}$$

Если выполняется предположение **A.3**, то для матрицы $Q(t,x^*(t)) = G(t,x^*(t))\big(G(t,x^*(t))\big)^\top$ существует обратная матрица $\big(Q(t,x^*(t))\big)^{-1}$ (см. [20, с. 27]), и задача (1.5) имеет единственное решение

$$u^* = u^*(t) = \big(G(t,x^*(t))\big)^\top \psi(t), \quad \psi(t) = \big(Q(t,x^*(t))\big)^{-1}\Big(\frac{dx^*(t)}{dt} - f(t,x^*(t))\Big). \tag{1.6}$$

В общем случае построенное управление $u^*(\cdot)$ может не удовлетворять ограничению (1.2). В связи с этим вводится дополнительное предположение.

A.4. Управление $u^*(\cdot)$ (1.6) удовлетворяет ограничению (1.2).

З а м е ч а н и е. Предположение **A.4** выполнено, в частности, в случае, когда $m = n$ при условии выполнения предположений **A.1**–**A.3**. Действительно, в таком случае из предположения **A.3** следует, что

$$\big(Q(t,x^*(t))\big)^{-1} = \big((G(t,x^*(t)))^\top\big)^{-1}\big(G(t,x^*(t))\big)^{-1}$$

$$\Rightarrow u^*(t) = \big(G(t,x^*(t))\big)^{-1}\Big(\frac{dx^*(t)}{dt} - f(t,x^*(t))\Big) = \tilde{u}(t) \quad \text{почти всюду на} \quad [0,T],$$

где $\tilde{u}(\cdot)$ — допустимое управление, порождающее $x^*(\cdot)$, которое должно удовлетворять ограничению (1.2), а значит, ему будет удовлетворять и $u^*(\cdot)$.

Итак, в силу того, что решение (1.6) единственно, измеримое нормальное управление $u^*(\cdot)$ определяется единственным образом для любого момента времени $t \in [0,T]$, в котором существует производная $dx^*(t)/dt$.

Таким образом, мы можем рассмотреть следующую задачу динамической реконструкции управлений (ЗДРУ), решаемую в реальном времени.

ЗДРУ. Для любых $\delta \in (0, \delta_0]$, $h^\delta \in (0, h_0]$, $t_k = t_0 + kh^\delta$, $k = 1, 2, \ldots, N$ и набора замеров $\{y_i^\delta\}$, $i = 0, 1, \ldots, k$ (1.4) найти такое измеримое управление $u^\delta(\cdot)\colon [t_0, t_k] \to \mathbb{R}^m$, что в конечный момент времени T (т. е. к моменту окончания процесса реконструкции) выполняются следующие условия.

Б.1. Значения управлений $\{u^\delta(t)\}$ ограничены существенно и равномерно по $\delta \in (0, \delta_0]$.

Б.2. Каждое управление $u^\delta(\cdot)$ порождает такую траекторию $x^\delta\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$ системы (1.1) с краевыми условиями $x^\delta(0) = y_0^\delta$, что

$$\lim_{\delta \to 0} \|x^\delta(\cdot) - x^*(\cdot)\|_C = 0.$$

Б.3. Управления $\{u^\delta(\cdot)\}$ слабо со звездой сходятся к нормальному:

$$u^\delta(\cdot) \overset{w^*}{\to} u^*(\cdot) \quad \text{при} \quad \delta \to 0,$$

где $\|x(\cdot)\|_C$ — обозначение нормы в пространстве $\mathbb{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$, а $\overset{w^*}{\to}$ обозначает слабую со звездой сходимость в пространстве $\mathbb{L}^1([0, T], \mathbb{R}^m)$.

Предполагается, что построение управлений ведется в реальном времени согласованно с поступлением точек замеров.

2. Решение задачи динамической реконструкции управлений

Приведем описание алгоритма решения задачи **Б.1**–**Б.3** при условии выполнения предположений **А.1**–**А.4**.

Алгоритм является пошаговым. Шаг алгоритма совпадает с шагом поступления замеров h^δ. Выполнение каждого k-го шага алгоритма инициализируется при поступлении k-й точки замеров y_k^δ. На каждом шаге искомая функция $u^\delta(\cdot)$ достраивается на временной интервал $[t_{k-1}, t_k]$.

На каждом шаге выполняются следующие процедуры.

2.1. Интерполяция замеров

При поступлении k-й точки замеров достраивается на временной интервал $[t_{k-1}, t_k]$ функция $y^\delta\colon [0, t_k] \to \mathbb{R}^n$, которая является интерполяцией дискретных замеров (1.4). Интерполяция производится кубическими полиномами, удовлетворяющими на каждом шаге следующим условиям.

В.1. Функция $y^\delta(\cdot)$ имеет вид

$$y^\delta(t) = y_k^\delta(t) = a_k^3(t - t_k)^3 + a_k^2(t - t_k)^2 + a_k^1(t - t_k) + a_k^0, \quad a_k^3, a_k^2, a_k^1, a_k^0 \in \mathbb{R}^n,$$

на каждом отрезке $[t_{k-1}, t_k]$.

В.2. Значения самой функции и ее производной задаются на концах отрезка $[t_{k-1}, t_k]$:

$$y_k^\delta(t_{k-1}) = y_{k-1}^\delta, \quad y_k^\delta(t_k) = y_k^\delta, \quad \frac{dy_k^\delta(t_{k-1})}{dt} = f(t_{k-1}, y_{k-1}^\delta), \quad \frac{dy_k^\delta(t_k)}{dt} = f(t_k, y_k^\delta).$$

Заметим, что в силу построения функция $y^\delta(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, и при выполнении условий **В.1**, **В.2** справедливо

$$\|y^\delta(t) - x^*(t)\| \le 14\,(\delta + h^\delta K), \quad t \in [0, T], \tag{2.1}$$

$$a_k^0 = y_{k-1}^\delta, \quad a_k^1 = f(t_{k-1}, y_{k-1}^\delta), \quad \|a_k^2\| \le \frac{4\,(\delta + h^\delta K)}{(h^\delta)^2}, \quad \|a_k^3\| \le \frac{6\,(\delta + h^\delta K)}{(h^\delta)^3}, \quad k = \overline{1, N}, \tag{2.2}$$

$$K \overset{\triangle}{=} \max_{u \in \mathbf{U},\, (t,x) \in D_0} [G(t, x)u + f(t, x)].$$

2.2. Вспомогательная задача вариационного исчисления

Фиксируется отрезок времени $[t_{k-1}, t_k]$, $k \in \overline{1,N}$, и рассматривается следующая вспомогательная задача вариационного исчисления (ВЗВИ).

Найти пару функций $(x_k(\cdot), u_k(\cdot)) \in \mathbb{C}^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{C}^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R}^m)$ таких, чтобы выполнялись следующие условия.

Г.1. Функции удовлетворяют уравнениям динамики (1.1), а функции $u_k(\cdot)$ имеют структуру

$$u_k(t) = -\frac{1}{\alpha^2}\left(G(t_{k-1}, y^\delta(t_{k-1}))\right)^\top s_k(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad s_k(\cdot) \in \mathbb{C}^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R}^n), \quad k = \overline{1,N}.$$

Г.2. Функции удовлетворяют краевым условиям

$$x_1(0) = y_0^\delta, \quad u_1(0) = 0, \quad k = 1,$$
$$x_k(t_{k-1}) = y^\delta(t_{k-1}), \quad s_k(t_{k-1}) = s_k(t_{k-1}), \quad k = \overline{2,N}.$$

Г.3. Функции составляют стационарную точку в задаче на минимум функционала

$$I\left(x(\cdot), u(\cdot)\right) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Big[-\frac{\|x(t) - y^\delta(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2\|u(t)\|^2}{2}\Big]\, dt,$$

где α — малый регуляризирующий (по Тихонову, см. [18]) параметр.

2.3. Необходимые условия оптимальности во вспомогательной задаче вариационного исчисления

Как известно (см. [19, гл. 2]), необходимые условия экстремума во ВЗВИ сводятся к гамильтоновой системе вида

$$\begin{gathered}
\frac{dx_k(t)}{dt} = -\alpha^{-2}\, G\left(t, x_k(t)\right)\big(G(t, x_k(t))\big)^\top s_k(t) + f(t, x_k(t)), \\
\frac{s_{k,i}(t)}{dt} = x_{k,i}(t) - y_i^\delta(t) \\
+\, \alpha^{-2}\left\langle s_k(t), \frac{\partial}{\partial x_{k,i}}\, G(t, x_k(t))\big(G(t, x_k(t))\big)^\top s_k(t)\right\rangle + \left\langle s_k(t), \frac{\partial}{\partial x_{k,i}}\, f(t, x_k(t))\right\rangle, \\
u_k(t) = \alpha^{-2}\left(G(t, x_k(t))\right)^\top s_k(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad i \in \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,N},
\end{gathered} \tag{2.3}$$

с краевыми условиями

$$x_1(0) = y_0^\delta, \quad s_1(0) = 0 \quad \text{при} \quad k = 1,$$
$$x_k(t_{k-1}) = y_{k-1}^\delta, \quad s_k(t_{k-1}) = s_{k-1}(t_{k-1}), \quad k = \overline{2,N},$$

где $s\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n)$ — вектор-функция сопряженных переменных.

З а м е ч а н и е. В предложенном далее алгоритме используются лишь известные необходимые условия экстремума во ВЗВИ. Поэтому не проверяется, достигается ли экстремум в этой вспомогательной задаче, и непосредственно решение ВЗВИ не ищется.

2.4. Построение решения задачи динамической реконструкции управлений

На каждом шаге $k = 1, \ldots, N$ рассматривается следующая краевая задача для системы, которая является линеаризацией системы (2.3):

$$\begin{gathered}
\bar{z}_k(t) \overset{\triangle}{=} \bar{x}_k(t) - y^\delta(t), \\
\frac{d\bar{z}_k(t)}{dt} = -\alpha^{-2}\, Q_k\, \bar{s}_k(t) + f_k - \frac{dy^\delta(t)}{dt}, \\
\frac{d\bar{s}_k(t)}{dt} = \bar{z}_k(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = \overline{1, N}, \\
\bar{x}_1(0) = y_0^\delta, \quad \bar{s}_1(0) = 0, \quad k = 1, \\
\bar{z}_k(t_{k-1}) = 0, \quad \bar{s}_k(t_{k-1}) = \bar{s}_{k-1}(t_{k-1}), \quad k = \overline{2, N},
\end{gathered} \tag{2.4}$$

где $Q_k \overset{\triangle}{=} G(t_{k-1}, y_{k-1}^\delta)\big(G(t_{k-1}, y_{k-1}^\delta)\big)^\top$, $f_k \overset{\triangle}{=} f(t_{k-1}, y_{k-1}^\delta)$. Система (2.4) имеет единственное решение $(x_k^{\alpha,\delta},\ s_k^{\alpha,\delta})\colon [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, поскольку она является системой линейных дифференциальных уравнений с непрерывными неоднородными членами. Это решение используется для построения решения ЗДРУ, а именно, в качестве такого решения рассматриваются кусочно-непрерывные функции

$$\begin{gathered}
u^{\alpha,\delta}(t) = -\alpha^{-2}\, G^\delta(t)\, s^{\alpha,\delta}(t), \quad t \in [0, T], \\
G^\delta(t) \overset{\triangle}{=} \big\{\big(G(t_{k-1}, y_{k-1}^\delta)\big)^\top,\ t \in [t_{k-1}, t_k)\big\}, \quad s^{\alpha,\delta}(t) \overset{\triangle}{=} \big\{s_k^{\alpha,\delta}(t),\ t \in [t_{k-1}, t_k]\big\}.
\end{gathered} \tag{2.5}$$

3. Сходимость построенных управлений

Рассмотрим семейство функций

$$\tilde{S} = \Big\{\, \tilde{s}^{\alpha,\delta}(\cdot) \overset{\triangle}{=} -\frac{s^{\alpha,\delta}(\cdot)}{\alpha^2}\colon \alpha \in (0, 1],\ \delta \in (0, \delta_0] \Big\} \subset \mathbb{C}([0, T], \mathbb{R}^n).$$

Согласно [3, формула (38)] функции семейства $\tilde{S}$ оцениваются следующим образом:

$$\Big\| \frac{s^{\alpha,\delta}(t)}{\alpha^2} \Big\| \le 2\, nT\, \frac{1}{\alpha h^\delta \sqrt{\lambda_*}}\, r\,(h^\delta, \alpha), \quad t \in [0, T]. \tag{3.1}$$

Функция $r\,(h^\delta, \alpha)$ является равномерной по k оценкой выражения

$$\max_{j=\overline{1,n}} \Big\| \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sin\Big(\frac{\sqrt{\lambda_{k,j}}}{\alpha}(t - \tau) \Big) \Big(f_k - \frac{dy_k^\delta(\tau)}{d\tau} \Big)\, d\tau \Big\|, \tag{3.2}$$

согласно [3, формулы (32), (34)]. Здесь $\lambda_* > 0$ — наименьший элемент замкнутого (см. [20, гл. 8, § 7]) множества собственных значений матриц $\big\{Q(t, x) \overset{\triangle}{=} G(t, x)\big(G(t, x)\big)^\top\colon (t, x) \in D_0\big\}$ (где компакт D_0 — из предположения **A.2**), а $\{\lambda_{k,j},\ j = \overline{1, n}\}$ — собственные значения матрицы Q_k.

С учетом того, что $y_k^\delta(\cdot)$ как полином третьей степени имеет нулевую четвертую производную, интеграл (3.2) путем интегрирования по частям дважды обращается в выражение

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda_*}} \Big[(f_{k-1} - f_k) - \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda_*}} \frac{d^2\, y_k^\delta(t_k)}{dt^2} \sin\Big(\frac{\sqrt{\lambda_*} h^\delta}{\alpha} \Big) + \frac{\alpha^2}{\lambda_*} \frac{d^3\, y_k^\delta(t_k)}{dt^3} \Big(1 - \cos\Big(\frac{\sqrt{\lambda_*}\, h^\delta}{\alpha} \Big) \Big) \Big]. \tag{3.3}$$

Из условий **B.1**, **B.2** для функций $y_k^\delta(\cdot)$ следует, что

$$\frac{d^2\, y_k^\delta(t_k)}{dt^2} = 2\, a_k^2, \quad \frac{d^3\, y_k^\delta(t_k)}{dt^3} = 6\, a_k^3, \quad k = \overline{1, N}.$$

Тогда с учетом (2.2) и липшицевости функции $f(t, x)$ норма (3.3) оценивается величиной

$$r\,(h^\delta, \alpha) = \frac{\alpha\, h^\delta}{\sqrt{\lambda_*}} \left[2\, L_{D_0} \Big(2\, \frac{\delta}{h^\delta} + K + 1 \Big) + 12\, \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda_*}\, (h^\delta)^2} \Big(\frac{\delta}{h^\delta} + 3\, K \Big) + 48\, \frac{\alpha^2}{\sqrt{\lambda_*} (h^\delta)^3} \Big(\frac{\delta}{h^\delta} + 3\, K \Big) \right]. \quad (3.4)$$

В таком случае при выполнении условий согласования параметров аппроксимации (1.3) и

$$\alpha = \alpha(\delta) \xrightarrow{\delta \to 0} 0, \quad \lim_{\delta \to 0} \frac{\alpha(\delta)}{(h^\delta)^2} = K_0 > 0 \quad (3.5)$$

из (3.1) и (3.4) получаем, что

$$\lim_{\delta \to 0} \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{s^{\alpha, \delta}(t)}{\alpha^2} \right\| \le 2\, L_{D_0}(K + 1) + 36\, \frac{1}{\lambda_*}\, K\, K_0. \quad (3.6)$$

Условие (3.6) влечет равномерную по δ ограниченность непрерывных функций семейства $\tilde{S}$. Тогда по [21, теорема 3, гл. IV, § 3, п. 4] из последовательности $\tilde{s}^{\alpha, \delta}(\cdot) \subset \mathbb{L}^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ можно извлечь подпоследовательность $\tilde{s}^{\alpha_l, \delta_l}(\cdot)$, сходящуюся слабо со звездой в пространстве $\mathbb{L}^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ к некоторой измеримой функции $s_0\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$:

$$\tilde{s}^{\alpha_l, \delta_l}(\cdot) \xrightarrow{w^*} s_0(\cdot), \quad l \to \infty. \quad (3.7)$$

Для краткости в этом разделе используются обозначения

$$G^*(t) \triangleq \big(G(t, x^*(t)) \big)^\top, \quad s^l(t) \triangleq \tilde{s}^{\alpha_l, \delta_l}(t).$$

Теперь покажем, что элементы $g_{i,j}^\delta(\cdot)$ матрицы $G^\delta(t)$ из (2.5) сходятся равномерно к элементам $g_{i,j}^*(\cdot)$ матрицы $G^*(t)$ при $\delta \to 0$. Действительно, в силу предположений **A.2**, **B.1**, **B.2** и соотношения (2.1) при всех $t \in [0, T]$ выполняются оценки

$$|g_{i,j}^\delta(t) - g_{i,j}^*(t)| \le |g_{j,i}(t_{k-1}, y^\delta(t_{k-1})) - g_{j,i}(t, y^\delta(t))| + |g_{j,i}(t, y^\delta(t)) - g_{j,i}(t, x^*(t))|$$

$$\le 16\, (\delta + h^\delta K)\, L_{D_0} \xrightarrow{\delta \to 0} 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T], \quad (3.8)$$

где t_{k-1} — ближайший к t узел разбиения отрезка $[0, t]$ шагом h^δ.

Наконец, покажем, что кусочно-непрерывные функции $u^l(t) = G^l(t) s^l(t)$ слабо со звездой сходятся в $\mathbb{L}^1([0, T], \mathbb{R}^m)$ к измеримой функции $u_0(t) = G^*(t) s_0(t)$. Рассмотрим следующие выражения, где $\varphi\colon [0, T] \to \mathbb{R}^m$ — произвольная непрерывная функция:

$$\lim_{l \to \infty} \int_0^T (\varphi(t))^\top \big[G^{\delta_l}(t) s^l(t) - G^*(t) s_0(t) \big]\, dt$$

$$= \lim_{l \to \infty} \int_0^T (\varphi(t))^\top \big[(G^{\delta_l}(t) - G^*(t))\, s^l(t) \big]\, dt + \int_0^T (\varphi(t))^\top \big[G^*(t) (s^l(t) - s_0(t)) \big]\, dt$$

$$= \lim_{l \to \infty} \int_0^T \sum_{j = \overline{1, m}} \Big[\varphi_j(t) \sum_{i = \overline{1, n}} \big[(g_{j,i}^{\delta_l}(t) - g_{j,i}^*(t)) s_i^l(t) \big] \Big]\, dt$$

$$+\lim_{l\to\infty}\int\limits_0^T (\varphi(t))^\top \big[G^*(t)(s^l(t)-s_0(t))\big]\,dt. \tag{3.9}$$

Из (3.8), ограниченности непрерывной функции $\varphi(t)$ и равномерной ограниченности семейства функций $\tilde{S}$ вытекает, что при всех $t\in[0,T]$ справедливо, что

$$\lim_{l\to\infty}\varphi_j(t)\,s_i^l(t)(g_{j,i}^{\delta_l}(t)-g_{j,i}^*(t))=0,\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,m},\quad t\in[0,T].$$

Тогда по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получим

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_0^T \sum_{j=\overline{1,m}}\Big[\varphi_j(t)\sum_{i=\overline{1,n}}\big[(g_{j,i}^{\delta_l}(t)-g_{j,i}^*(t))s_i^l(t)\big]\Big]\,dt=0. \tag{3.10}$$

Более того, из непрерывности элементов $(\varphi(\cdot))^\top G^*(\cdot)$ и слабой со звездой сходимости (3.7) в $\mathbb{L}^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ функций $s^l(t)$ к $s_0(t)$ при $l\to\infty$ следует, что

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_0^T (\varphi(t))^\top G^*(t)[s^l(t)-s_0(t)]\,dt=0. \tag{3.11}$$

Из (3.9)–(3.11) выводим

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_0^T (\varphi(t))^\top\big[G^{\delta_l}(t)\,s^l(t)-G^*(t)\,s_0(t)\big]\,dt=0\ \ \forall\varphi(\cdot)\in\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^m).$$

Иначе говоря, в пространстве $\mathbb{L}^1([0,T],\mathbb{R}^m)$

$$u^{\alpha_l,\delta_l}(\cdot)\overset{w^*}{\to}u_0(\cdot),\quad u_0(\cdot)\overset{\triangle}{=}G^*(\cdot)\,s_0(\cdot). \tag{3.12}$$

Проверим, что $u_0(\cdot)$ порождает $x^*(\cdot)$. Управления $\{u^{\alpha_l,\delta_l}(\cdot),\ l\in\mathbb{N}\}$ порождают траектории $\{x^l(\cdot),\ l\in\mathbb{N}\}$ системы (1.1), и справедливы равенства

$$x^l(t)=\int\limits_0^t G(\tau,x^l(\tau))\,u^{\alpha_l,\delta_l}(\tau)+f(\tau,x^l(\tau))\,d\tau. \tag{3.13}$$

В работе [3, формула (52)] было показано, что

$$\lim_{l\to\infty}\|x^l(\cdot)-y^{\delta_l}(\cdot)\|_C=0$$

при условиях (3.5); отсюда и из из условия (2.2) следует, что $\|x^l(\cdot)-x^*(\cdot)\|_C\overset{l\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Из этого свойства и слабой сходимости $u^{\alpha_l,\delta_l}(\cdot)$ к $u_0(\cdot)$ (3.12), устремив l к бесконечности в выражении (3.13), имеем

$$x^*(t)=\int\limits_0^t f(\tau,x^*(\tau))+G(\tau,x^*(\tau))\,u_0(\tau)\,d\tau,\quad t\in[0,T],$$

в силу этого

$$\frac{dx^*(t)}{dt}=G(t,x^*(t))\,u_0(t)+f(t,x^*(t)) \tag{3.14}$$

почти всюду на $[0,T]$. Это и означает, что $u_0(\cdot)$ порождает $x^*(\cdot)$.

Теперь покажем, что $u_0(\cdot)$ является нормальным управлением. Для этого подставим (3.12) в (3.14):

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = G(t,x^*(t))\big(G(t,x^*(t))\big)^\top s_0(t) + f(t,x^*(t)). \tag{3.15}$$

Рассмотрим выражение (3.15) в каждый фиксированный момент времени $t \in [0,T]$ такой, что существует производная $dx^*(t)/dt$, как систему n линейных алгебраических уравнений относительно $s_0(t)$. Из предположения **A.1** следует, что ранг $G(t,x^*(t))$ равен n, а значит матрица $G(t,x^*(t))\big(G(t,x^*(t))\big)^\top$ невырожденная (см. [20, с. 27]). Тогда система уравнений (3.15) имеет единственное решение

$$s_0(t) = \big(G(t,x^*(t))(G(t,x^*(t)))^\top\big)^{-1}\Big(\frac{dx^*(t)}{dt} - f(t,x^*(t))\Big).$$

Как можно заметить, $s_0(\cdot)$ совпадает с функцией $\psi(\cdot)$ из (1.6), а значит, управление $u_0(\cdot)$ является нормальным.

4. Основной результат

Резюмируя вышесказанное, сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема. *Если в задаче динамической реконструкции входные данные* (1.1)–(1.4) *удовлетворяют условиям* **A.1–A.4**, *то существует последовательность кусочно-непрерывных функций* $u^l(t)$ *вида*

$$u^l(t) = u^{\alpha_l,\delta_l}(t) = -\frac{1}{\alpha_l^2}\, G^{\delta_l}(t)\, s^{\alpha_l,\delta_l}(t), \quad t \in [0,T],$$

$$G^{\delta_l}(t) \overset{\triangle}{=} \big\{(G(t_{k-1}, y^{\delta_l}_{k-1}))^\top,\ t \in [t_{k-1},t_k]\big\}, \quad s^{\alpha_l,\delta_l}(t) \overset{\triangle}{=} \big\{s^{\alpha_l,\delta_l}_k(t),\ t \in [t_{k-1},t_k]\big\},$$

которая при условиях согласования параметров α_l, δ_l, h^{δ_l} (1.3), (3.5) *и при* $l \to \infty$ *обеспечивает решение задачи динамической реконструкции в смысле* **Б.1–Б.3**.

Д о к а з а т е л ь с т в о выполнения условий **Б.1**, **Б.2** повторяет доказательство, содержащееся в работе [3, разд. 4.1, 4.2] с учетом конкретизированной процедуры **В.1**, **В.2** построения непрерывных аппроксимаций замеров базовой траектории. Доказательству выполнения условия **Б.3** посвящен материал разд. 3. □

Отметим, что условие **Б.3** естественно при постановке задачи о динамической реконструкции измеримых обобщенных управлений (скользящих режимов, см. [22, гл. IV; 23, гл. II]), которые планируется изучить в ближайшем будущем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Subbotina N. N., Krupennikov E. A.** The method of characteristics in an identification problem // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. Vol. 299. P. 205–216. doi: 10.1134/S008154381709022X.
2. **Subbotina N. N., Tokmantsev T. B., Krupennikov E .A.** Dynamic programming to reconstruction problems for a macroeconomic model // IFIP Adv. Inf. Comm. Te. Vol. 494. 2016. P. 472–481. doi: 10.1007/978-3-319-55795-3_45.
3. **Subbotina N. N., Krupennikov E. A.** Hamiltonian systems for dynamic control reconstruction problems // Minimax Theory Appl. 2020. Vol. 5, no. 2. P. 439–454.
4. **Ngoc D. V., Marcelo H. Ang Jr.** Model identification for industrial robots // Acta Polytechnica Hungarica. 2009. Vol. 6, № 5. P. 51–68.
5. **Sturz Y. R., Affolter L. M., Smith R. S.** Parameter identification of the KUKA LBR iiwa robot including constraints on physical feasibility // IFAC PapersOnLine. 2017. Vol. 50, № 1. P. 6863–6868. doi:10.1016/j.ifacol.2017.08.1208.

6. **Ren C., Wang N., Liu Q., Liu Ch.** Dynamic force identification problem based on a novel improved Tikhonov regularization // Mathematical Problems in Engineering Volume. 2019. Vol. 2019, Article ID 6095184. 13 p. doi:10.1155/2019/6095184 .
7. **Chung J., Saibaba A. K., Brown M., Westman E.** Efficient generalized Golub–Kahan based methods for dynamic inverse problems // Inverse Problems. 2018. Vol. 34, article ID 024005. 12 p. doi: 10.1088/1361-6420/aaa0e1 .
8. **Liu Y. C., Chen Y. W., Wang Y. T., Chang J. R.** A high-order Lie groups scheme for solving the recovery of external force in nonlinear system // Inverse Problems in Science and Engineering. 2018. Vol. 26, № 12. P. 1749–1783. doi: 10.1080/17415977.2018.1433669 .
9. **D'Autilia M. C., Sgura I., Bozzini B.** Parameter identification in ODE models with oscillatory dynamics: a Fourier regularization approach // Inverse Problems. 2017. Vol. 33, no. 12. P. 124009. doi:10.1088/1361-6420/aa9834 .
10. **Schuster N., Burger M., Hahn B.** Dynamic inverse problems: modelling-regularization-numerics. Preface // Inverse Problems. 2018. Vol. 34, article ID 040301. 4 p. doi: 10.1088/1361-6420/aab0f5 .
11. **Sabatier P. C.** Past and future of inverse problems // J. Math. Phys. 2000. Vol. 41, no. 6. P. 4082. doi:10.1063/1.533336 .
12. **Vasin V. V.** Methods for solving nonlinear ill-posed problems based on the Tikhonov–Lavrentiev regularization and iterative approximation // Eurasian J. Math. Comp. Appl. 2016. Vol. 4, no. 4. P. 60–73. doi: 10.32523/2306-6172-2016-4-4-60-73 .
13. **Kabanikhin S. I., Krivorotko O. I.** Identification of biological models described by systems of nonlinear differential equations // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2015. Vol. 23, № 5. P. 519–527. doi: 10.1515/jiip-2015-0072 .
14. **Schmitt U., Louis A. K., Wolters C., Vauhkonen M.** Efficient algorithms for the regularization of dynamic inverse problems: II. Applications // Inverse Problems. 2002. Vol. 18, № 3. P. 659–676. doi: 10.1088/0266-5611/18/3/309 .
15. **Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
16. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
17. **Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Максимов В. И.** Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 129–161.
18. **Тихонов А. Н.** Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.
19. **Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
20. **Магнус Я. Р., Нейдеккер Х.** Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: ФИЗЛИТ, 2002. 486 с.
21. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 572 с.
22. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
23. **Гамкрелидзе Р. В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во ун-та, 1977. 256 с.

Поступила 26.02.2021
После доработки 7.04.2021
Принята к публикации 12.04.2021

Субботина Нина Николаевна
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: subb@uran.ru

Крупенников Евгений Александрович
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

старший преподаватель
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: krupennikov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Subbotina N.N., Krupennikov E.A. The method of characteristics in an identification problem. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 299, pp. 205–216. doi: 10.1134/S008154381709022X.
2. Subbotina N.N., Tokmantsev T.B., Krupennikov E.A. Dynamic programming to reconstruction problems for a macroeconomic model. In: Bociu L., Désidéri J.-A., Habbal A. (eds) *27th IFIP Conference on System Modeling and Optimization* (CSMO 2015), IFIP Adv. Inf. Comm. Te., vol. 494, Cham: Springer, 2016, pp. 472–481. doi: 10.1007/978-3-319-55795-3_45.
3. Subbotina N.N., Krupennikov E.A. Hamiltonian systems for dynamic control reconstruction problems. *Minimax Theory Appl.*, 2020, vol. 5, no. 2, pp. 439–454.
4. Ngoc D.V., Marcelo H. Ang Jr. Dynamic model identification for industrial robots. *Acta Polytechnica Hungarica*, 2009, vol. 6, no. 5, pp. 51–68.
5. Sturz Y.R., Affolter L.M., Smith R.S. Parameter identification of the KUKA LBR iiwa robot including constraints on physical feasibility. *IFAC PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 6863–6868. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.1208.
6. Ren C., Wang N., Liu Q., Liu Ch. Dynamic force identification problem based on a novel improved Tikhonov regularization. *Mathematical Problems in Engineering.* 2019, vol. 2019, art.-no. 6095184, 13 p. doi: 10.1155/2019/6095184.
7. Chung J., Saibaba A.K., Brown M., Westman E. Efficient generalized Golub–Kahan based methods for dynamic inverse problems. *Inverse Problems*, 2018, vol. 34, art.-no. 024005, 12 p. doi: 10.1088/1361-6420/aaa0e1.
8. Liu Y.C., Chen Y.W., Wang Y.T., Chang J.R. A high-order Lie groups scheme for solving the recovery of external force in nonlinear system. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2018, vol. 26, no. 12, pp. 1749–1783. doi: 10.1080/17415977.2018.1433669.
9. D'Autilia M.C., Sgura I., Bozzini B. Parameter identification in ODE models with oscillatory dynamics: a Fourier regularization approach. *Inverse Problems*, 2017, vol. 33, no. 12, art.-no. 124009. doi: 10.1088/1361-6420/aa9834.
10. Schuster N., Burger M., Hahn B. Dynamic inverse problems: modelling-regularization-numerics. Preface. *Inverse Problems*, 2018, vol. 34, art.-no. 040301, 4 p. doi: 10.1088/1361-6420/aab0f5.
11. Sabatier P.C. Past and future of inverse problems. *J. Math. Phys.*, 2000, vol. 41, no. 6, pp. 4082–4124. doi: 10.1063/1.533336.
12. Vasin V.V. Methods for solving nonlinear ill-posed problems based on the Tikhonov–Lavrentiev regularization and iterative approximation. *Eurasian J. Math. Comp. Appl.*, 2016, vol. 4, no. 4, pp. 60–73. doi: 10.32523/2306-6172-2016-4-4-60-73.
13. Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I. Identification of biological models described by systems of nonlinear differential equations. *J. of Inverse and Ill-posed Problems*, 2015, vol. 23, no. 5, pp. 519–527. doi: 10.1515/jiip-2015-0072.
14. Schmitt U., Louis A.K., Wolters C., Vauhkonen M. Efficient algorithms for the regularization of dynamic inverse problems: II. Applications. *Inverse Problems*, 2002, vol. 18, no. 3, pp. 659–676. doi: 10.1088/0266-5611/18/3/309.
15. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Modelling of a control in a dynamic system. *Engrg. Cybernetics*, 1983, vol. 21, no. 2, pp. 38–47.
16. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
17. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. Some algorithms for the dynamic reconstruction of inputs. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 275, pp. 86–120. doi: 10.1134/S0081543811090082.
18. Tikhonov A.N. On the stability of inverse problems. *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. USSR,* 1943, vol. 39, pp. 176–179.

19. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Theory of extremal problems*. Studies in Mathematics and its Applications, vol. 6. Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland Publishing Company, 1979, 460 p. ISBN: 0444851674 . Original Russian text published in Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 480 p.
20. Neudecker H., Magnus J.R. Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics. New Jersey: John Wiley & Sons Ltd, 2019, 472 p. doi: 10.1002/9781119541219 . Translated to Russian under the title *Matrichnoe differentsial'noe ischislenie s prilozheniyami k statistike i ekonometrike.* Moscow: FIZLIT Publ., 2002, 486 p.
21. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis.* (Two volumes in one, translated from the first Russian edition 1957–1961). United States: Martino Fine Books. 2012, 280 p. ISBN: 1614273049 . The 7th edition of Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza.* Moscow: Nauka Publ., 2004, 572 p.
22. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations.* New York: Acad. Press, 1972, 531 p. doi: 10.1016/C2013-0-11669-8 . Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami.* Moscow: Nauka Publ., 1977, 624 p.
23. Gamkrelidze R.V. *Principles of optimal control theory.* Springer, 1978, 175 p. ISBN: 978-1-4684-7398-8 . Original Russian text published in Gamkrelidze R.V. *Osnovy optimal'nogo upravleniya.* Tbilisi: Tbilis. Univ. Publ., 1977, 256 p.

Received February 26, 2021
Revised April 7, 2021
Accepted April 12, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00362).

Nina Nikolaevna Subbotina, Dr. Phys.-Math. Sci., RAS Corresponding Member, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: subb@uran.ru .

Evgenii Aleksandrovitch Krupennikov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: krupennikov@imm.uran.ru .

Cite this article as: N. N. Subbotina, E. A. Krupennikov. Weak* approximations for the solution of a dynamic reconstruction problem, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 208–220 .