



Серия «Математика»
2023. Т. 46. С. 35–50

Онлайн-доступ к журналу:
<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 514.174.3

MSC 41A50, 52C15

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.46.35>

Алгоритмы построения оптимального покрытия плоских фигур наборами кругов линейно различающихся радиусов

П. Д. Лебедев^{1,2✉}, К. Л. Стойчин¹

¹ Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина, Екатеринбург,
Российская Федерация

² Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, Российская Федерация
✉ pleb@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена задача об оптимальном покрытии плоских фигур наборами из фиксированного числа различных кругов. Считается, что каждый круг имеет радиус, равный сумме общего для всех параметра и его индивидуального числа. Основная цель работы — разработать алгоритмы, которые позволяют строить покрытия при минимальном общем параметре. Показано, что задача может быть сведена к минимизации функции нескольких переменных, зависящих от координат центров кругов. Изучены зоны влияния точек, служащих центрами кругов при фиксированном наборе индивидуальных чисел. Предложен итерационный алгоритм решения задачи, использующий понятия чебышевского центра и обобщение зоны Дирихле. Выведены соотношения, аналитически описывающие эти зоны. Доказана теорема об эффективности работы алгоритма. Показаны возможности применения результатов статьи к построению сетей датчиков. Приведен ряд примеров решения задач о построении оптимального покрытия для различных выпуклых многоугольников.

Ключевые слова: покрытие кругами, область доминирования, зона Дирихле, чебышевский центр, минимизация

Ссылка для цитирования: Лебедев П. Д., Стойчин К. Л. Алгоритмы построения оптимального покрытия плоских фигур наборами кругов линейно различающихся радиусов // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 46. С. 35–50.

<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.46.35>

Research article

Algorithms for Constructing Optimal Covering of Planar Figures with Disks Sets of Linearly Different Radii

Pavel D. Lebedev^{1,2}✉, Krasimir L. Stoychin¹

¹ Ural Federal University named after B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation

² N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russian Federation

✉ pleb@yandex.ru

Abstract. The problem of optimal covering of plane figures with sets of a fixed number of different circles is considered. We suppose that each circle has a radius equal to the sum of the parameter common to all and its individual number. The main aim of the paper is to develop algorithms that allow the construction of a covering with a minimum common parameter. It is proved that the problem can be reduced to minimizing a function of several variables depending on the coordinates of the centers of the circles. The zones of influence of points serving as the centers of circles for a fixed set of individual numbers have been studied. Iterative algorithm for solving the problem is proposed using the concepts of the Chebyshev center and a generalization of the Dirichlet zone. The possibilities of applying the results of the article to the construction of sensor networks are shown.

Keywords: disks coverage, domain of dominance, Dirichlet zone, Chebyshev center, minimization

For citation: Lebedev P. D., Stoychin K. L. Algorithms for Constructing Optimal Covering of Planar Figures with Disks Sets of Linearly Different Radii. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 46, pp. 35–50. (in Russian)

<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.46.35>

1. Введение

При решении различных задач часто требуется выполнять замену множеств наборами унифицированных элементов. Наиболее распространенными фигурами, используемыми для аппроксимации на плоскости, служат круги. Ранее авторы рассматривали в основном задачи о покрытии плоских компактов наборами конгруэнтных кругов [8]. Затем перешли к случаю, когда радиусы кругов равны произведению общего для всех параметра на индивидуальный положительный параметр [6;9]. Возникает потребность рассмотреть еще один важный вариант покрытия, в котором радиусы кругов равны сумме различного для каждого из них положительного числа и одинакового для всех неотрицательного числа r . Данная постановка задачи отражает ситуацию, при которой размеры области работы датчика являются настраиваемым параметром

и могут меняться с заданным шагом. Похожие конструкции изучаются, например, в статьях [1; 11]. В рамках работы строятся покрытия наборами кругов, радиусы которых равны сумме общего параметра r и индивидуального числа Δr_i , а в качестве параметра оптимальности выбрана минимизация величины r . Аналогичные конструкции могут применяться в задачах логистики, особенно в случае, когда различные узлы имеют различные возможности по обслуживанию прилегающей территории [16]. Некоторые способы построения покрытий из заданного числа различных кругов представлены, например, в [14; 20]. В качестве одного из подходов к решению подобных задач в общем случае неоднородной среды можно указать построение волновых фронтов, имитирующих распространение оптических сигналов [17; 18]. При разработке сетей датчиков он может применяться также для случая, когда каждая точка M должна находиться в зоне действия двух или более приборов [19]. Однако в случае однородной среды с евклидовой метрикой и однократного покрытия более экономичными оказываются геометрические методы, основанные на разбиении компакта M на области влияния точек и выделении их чебышевских центров. Возможной областью применения конструкций с покрытиями кругами, радиусы которых различаются на заданные константы, может стать раскройка областей материала, особенно в металлургии и машиностроении [12]. При нарезке листов металла используются заготовки различной формы, но наиболее удобными являются именно круги с заданным шагом по линейным размерам. В рамках настоящей статьи упор сделан на изучении границ зон влияния точек путем построения функций, обобщающих евклидово расстояние.

2. Постановка задачи

Сформулируем задачу о покрытии плоского компактного множества набором кругов линейно различающихся радиусов.

Задача 1. Пусть задано ограниченное замкнутое выпуклое множество M , число $n \in \mathbb{N}$ и набор неотрицательных чисел $P = \{\Delta r_i\}_{i=1}^n$. Требуется найти такой набор из n точек $S = \{\mathbf{s}_i\}_{i=1}^n$, чтобы вложение $M \subseteq \Xi(S, P, r)$ выполнялось при минимально возможном $r \in [0, +\infty)$.

Здесь $\Xi(S, P, r) \triangleq \bigcup_{i=1}^n O(\mathbf{s}_i, r + \Delta r_i)$, $O(\mathbf{s}, r) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\| \leq r\}$.

Задача 1 сводится к тому, чтобы найти такой массив из n точек S , при котором величина

$$R_M(S, P) = \max_{\mathbf{m} \in M} \min_{i=1, n} \varphi^{(i)}(\mathbf{m}), \quad (2.1)$$

равная минимальному r , при котором множество M вложено в объединение кругов $\Xi(S, P, r)$, будет минимальной среди всех возможных

наборов S , содержащих n точек. Здесь

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \triangleq \max\{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\| - \Delta r_i, 0\}, i = \overline{1, n}, \quad (2.2)$$

функции, определенные при заданных S и P . Задача 1 является одним из возможных обобщений задачи о нахождении наилучшей чебышевской n -сети плоского множества [13].

Величину (2.1) можно интерпретировать как хаусдорфово полуотклонение $R_M(S, P) = h(M, \Xi(S, P, 0))$ компакта M от объединения множеств $\Xi(S, P, 0) = \{O(\mathbf{s}_i, \Delta r_i)\}_{i=1}^n$, которые являются кругами при $\Delta r_i > 0$ и точками при $\Delta r_i = 0$. Здесь $h(A, B) \triangleq \max_{\mathbf{a} \in A} \min_{\mathbf{b} \in B} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$, считаем, что если $A = \emptyset$, то $h(A, B) = 0$.

3. Методы решения задачи

В рамках статьи авторы развивают применявшиеся ранее методы построения покрытий наборами равных кругов [8] или кругов, отношения радиусов которых постоянны [6]. Их основу составляют конструкции разбиения множества M на зоны влияния точек из S , которые покрываются кругами с центрами в них, и последующий сдвиг точек с целью минимизации радиуса круга, в который может быть вложена эта зона. Однако поскольку в задаче 1 рассматриваются не конгруэнтные круги, а такие, разности радиусов которых постоянны, то геометрия областей влияния точек из S принципиально иная по сравнению со случаем одинаковых фигур. Важным этапом алгоритма является генерация начального массива $S^{(0)}$ центров кругов покрытия. В рамках методов, предложенных, например, в статье [10], применяются решетки Браве [7, с. 21].

Определение 1. Будем называть областью доминирования точки $\mathbf{s}_i \in S$ над $\mathbf{s}_j \in S$ множество

$$D^{(i,j)}(S, P) \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \leq \varphi^{(j)}(\mathbf{x}) \right\}. \quad (3.1)$$

Считаем, что $D^{(i,i)}(S, P) = \mathbb{R}^2$ при $1 \leq i \leq n$.

Определение 2. Будем называть пару точек $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in S$ регулярной, если выполняется неравенство

$$\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\| > |\Delta r_i - \Delta r_j|. \quad (3.2)$$

Если пара точек является регулярной, то на плоскости найдутся точки \mathbf{x} , для которых $\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) > \varphi^{(j)}(\mathbf{x})$, и точки \mathbf{y} , для которых $\varphi^{(i)}(\mathbf{y}) < \varphi^{(j)}(\mathbf{y})$. Если пара не является регулярной, для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ выполняется либо $\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \leq \varphi^{(j)}(\mathbf{x})$, либо $\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \geq \varphi^{(j)}(\mathbf{x})$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} a^{(i,j)} &= (\Delta r_j - \Delta r_i)/2, \quad c^{(i,j)} = \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|/2, \\ b^{(i,j)} &= \sqrt{(c^{(i,j)})^2 - (b^{(i,j)})^2}, \quad \mathbf{c}^{(i,j)} = (\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_j)/2, \\ \mathbf{v}^{(i,j)} &= \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j, \quad W^{(i,j)} = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : \left(\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}^{(i,j)} \rangle = 0 \right) \& (\|\mathbf{w}\| = 1) \right\}, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов.

Для пары регулярных точек определено множество

$$\begin{aligned} V^{(i,j)} &= \bigcup_{t \in [0, +\infty)} \bigcup_{\tau \in [0, +\infty)} \left(b^{(i,j)} \operatorname{sh} t \cdot W^{(i,j)} + \right. \\ &\left. + \left\{ \left(\frac{a^{(i,j)}}{2c^{(i,j)}} \operatorname{ch} t + \tau \right) \cdot \mathbf{v}^{(i,j)} \right\} + \{ \mathbf{c}^{(i,j)} \} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Предложение 1. Если пара точек $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in S$ является регулярной, то

$$D^{(i,j)}(S, P) = V^{(i,j)} \cup O(\mathbf{s}_i, \Delta r_i). \quad (3.4)$$

Доказательство. Покажем, что $\forall \mathbf{x} \in V^{(i,j)} \varphi^{(i)}(\mathbf{x}) - \Delta r_i \leq \varphi^{(j)}(\mathbf{x}) - \Delta r_j$. Выберем систему координат так, чтобы выполнялись равенства $\mathbf{c}^{(i,j)} = \mathbf{0} = (0, 0)$, $\mathbf{s}_i = (c^{(i,j)}, 0)$, $\mathbf{s}_j = (-c^{(i,j)}, 0)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $a^{(i,j)} \neq 0$. Тогда геометрическое место точек, для которых $\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\| - \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_j\| = 2a^{(i,j)}$ совпадает с одной из ветвей гиперболы $\frac{x^2}{(a^{(i,j)})^2} - \frac{y^2}{(b^{(i,j)})^2} = 1$. Если $a^{(i,j)} > 0$, то это ветвь, для которой $x > 0$, а если $a^{(i,j)} < 0$, то ветвь, для которой $x < 0$. В обоих случаях эта ветвь может быть записана параметрически как

$$x(t) = a^{(i,j)} \operatorname{ch} t, y(t) = b^{(i,j)} \operatorname{sh} t, t \in (-\infty, +\infty). \quad (3.5)$$

Геометрическое место V точек, для которых справедливо

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\| - \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_j\| \leq 2a^{(i,j)}, \quad (3.6)$$

находится по ту сторону от кривой (3.5), в которой находится точка \mathbf{s}_i , т. е.

$$V = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = b^{(i,j)} \operatorname{sh} t, x = a^{(i,j)} \operatorname{ch} t + \tau, t \in \mathbb{R}, \tau \in [0, +\infty) \right\}. \quad (3.7)$$

Поскольку в выбранной системе координат $\mathbf{v}^{(i,j)} = (2c^{(i,j)}, 0)$, $W^{(i,j)} = \{(0, 1), (0, -1)\}$, то множество (3.7) совпадает с (3.3).

Рассмотрим теперь случай, когда $a^{(i,j)} = 0$. В этом случае геометрическое место точек, для которых справедливо (3.6), это полуплоскость

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty), y \in \mathbb{R}\}.$$

Оно совпадает с (3.3), которое принимает вид

$$V^{(i,j)} = \bigcup_{t \in [0, +\infty)} \bigcup_{\tau \in [0, +\infty)} \left(b^{(i,j)} \operatorname{sh} t \{(0, 1), (0, -1)\} + \left\{ \tau \left(c^{(i,j)}, 0 \right) \right\} \right).$$

Значит, в обоих случаях

$$V^{(i,j)} = V. \quad (3.8)$$

Из определения функций (2.2) следует, что неравенство

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \leq \varphi^{(j)}(\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

выполняется, если либо справедливо (3.6), либо $\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = 0$. Первое из условий имеет место при $\mathbf{x} \in V$, а второе при $\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\| \leq \Delta r_i$. Значит, согласно равенству (3.8), оценка (3.9) верна тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{x} \in V^{(i,j)} \cup O(\mathbf{s}_i, \Delta r_i).$$

Это доказывает (3.4). □

Предложение 2. Если пара точек $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in S$ не является регулярной и $\Delta r_i > \Delta r_j$, то

$$D^{(i,j)}(S, P) = \mathbb{R}^2. \quad (3.10)$$

Доказательство. Если выполняются условия предложения 2, то

$$\Delta r_i - \Delta r_j \geq \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|. \quad (3.11)$$

Согласно неравенству треугольника для любой точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ $\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_j\| + \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|$. Из него и (3.11) вытекает $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ $\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_j\| + (\Delta r_i - \Delta r_j)$, что влечет $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ $\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \leq \varphi^{(j)}(\mathbf{x})$. □

Предложение 2 означает, что если пара точек не является регулярной, то одна из точек \mathbf{s}_j не вносит вклад в минимизацию величины r . Таким образом, можно построить сеть $\check{S} = \{\check{\mathbf{s}}_i\}_{i=1}^n$, такую, что при всех $i \neq j$ выполняется $\check{\mathbf{s}}_i = \mathbf{s}_i$, а в качестве $\check{\mathbf{s}}_j$ взять произвольную точку плоскости. И тогда $R_M(\check{S}, P) \leq R_M(S, P)$.

Следствие 1. Пусть пара точек $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in S$ не является регулярной и $\Delta r_i < \Delta r_j$. Тогда, если $\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\| = \Delta r_j - \Delta r_i$, то

$$D^{(i,j)}(S, P) = \left\{ \left(\mathbf{s}_i + t\mathbf{v}^{(i,j)} \right) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, +\infty) \right\} \cup O(\mathbf{s}_i, \Delta r_i). \quad (3.12)$$

Доказательство. Из предложения 2 следует, что при заданных условиях $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \geq \varphi^{(j)}(\mathbf{x})$. Равенство $\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \varphi^{(j)}(\mathbf{x})$ выполняется в двух случаях: либо если точка \mathbf{x} расположена на прямой, содержащей отрезок $[\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j]$, причем точка \mathbf{s}_i находится между \mathbf{x} и \mathbf{s}_j , либо при $\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\| \leq \Delta r_i$. Точки, для которых имеет место один из этих случаев, образуют множество (3.12). \square

Следствие 2. Пусть пара точек $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in S$ не является регулярной и $\Delta r_i < \Delta r_j$. Тогда, если $\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\| < \Delta r_j - \Delta r_i$, то

$$D^{(i,j)}(S, P) = O(\mathbf{s}_i, \Delta r_i). \quad (3.13)$$

Доказательство. Из предложения 2 и условий следствия 2 следует, что $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\| - \Delta r_i > \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_j\| - \Delta r_j$. Значит, область доминирования $D^{(i,j)}(S, P)$ состоит только из тех точек, для которых $\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = 0$. \square

Определение 3. Будем называть

$$D_M^{(i)}(S, P) \triangleq \left\{ \mathbf{m} \in M : \varphi^{(i)}(\mathbf{m}) = \min_{j=\overline{1,n}} \varphi^{(j)}(\mathbf{m}) \right\} \quad (3.14)$$

обобщенной зоной Дирихле точки \mathbf{s}_i в множестве M .

Определение области $D_M^{(i)}(S, P)$ являются обобщением понятия зон Дирихле [3, с. 305], которые представляют собой геометрические места точек, лежащих от одного из элементов $\mathbf{s}_i \in S$ не дальше, чем от других. Из (3.1) и (3.14) следует, что обобщенные зоны Дирихле можно строить как

$$D_M^{(i)}(S, P) = M \cap \bigcap_{j=\overline{1,n}} D^{(i,j)}(S, P). \quad (3.15)$$

Особенностью множеств $D_M^{(i)}(S, P)$ является то, что их граница может содержать не только отрезки, но также дуги окружности и гиперболы. Обобщенные зоны Дирихле в общем случае невыпуклые.

Определение 4. Чебышевским центром [5] замкнутого ограниченного множества $M \in \mathbb{R}^2$ называется точка $\mathbf{c}(M)$, удовлетворяющая равенству

$$h(M, \{\mathbf{c}(M)\}) = \min \{h(M, \{\mathbf{x}\}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}. \quad (3.16)$$

Величина $h(M, \{\mathbf{c}(M)\})$ называется чебышевским радиусом $r(M)$ множества M .

Для заданного множества M , массива чисел P и исходного массива точек S авторами реализована следующая схема.

Алгоритм 1. 1. Строятся области доминирования $D^{(i,j)}(S, P)$ для всех пар точек $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j$ при $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$.

2. Строятся обобщенные зоны Дирихле $D_M^{(i)}(S, P)$ при $i = \overline{1, n}$.

3. Строится новый массив точек $\widehat{S} = \{\widehat{\mathbf{s}}_i\}_{i=1}^n$ по формуле

$$\widehat{\mathbf{s}}_i = \begin{cases} \mathbf{c}(D_M^{(i)}(S, P)), & D_M^{(i)}(S, P) \neq \emptyset, \\ \mathbf{s}_i, & D_M^{(i)}(S, P) = \emptyset, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.17)$$

4. Вычисляются значения $h(\widehat{S}, S)$ и $R_M(\widehat{S}, P)$.

Определение 5. Будем называть область Дирихле $D_M^{(i)}(S, P)$, $1 \leq i \leq n$ критической, если

$$h\left(D_M^{(i)}(S, P), \{\mathbf{s}_i\}\right) = R_M(S, P) + \Delta r_i. \quad (3.18)$$

Обозначим $I_M(S, P)$ множество всех номеров критических областей Дирихле.

Теорема 1. Пусть $I_M(S, P) \neq \emptyset$. Тогда, если $\forall j \in I_M(S, P) \widehat{\mathbf{s}}_j \neq \mathbf{s}_j$, то

$$R_M(\widehat{S}, P) < R_M(S, P). \quad (3.19)$$

Доказательство. Из (3.15) следует, что

$$R_M(S, P) = \max_{i=\overline{1, n}} \max_{\mathbf{m} \in D_M^{(i)}(S, P)} \varphi^{(i)}(\mathbf{m}). \quad (3.20)$$

Из условий теоремы можно записать

$$\forall j \in I_M(S, P) \quad R_M(S, P) = \max_{\mathbf{m} \in D_M^{(j)}(S, P)} \varphi^{(j)}(\mathbf{m}) \quad (3.21)$$

и

$$\forall j \notin I_M(S, P) \quad R_M(S, P) > \max_{\mathbf{m} \in D_M^{(j)}(S, P)} \varphi^{(j)}(\mathbf{m}). \quad (3.22)$$

По построению массива \widehat{S} , согласно формуле (3.17), справедлива оценка

$$R_M(\widehat{S}, P) \leq \max_{i=\overline{1, n}} \max_{\mathbf{m} \in D_M^{(i)}(S, P)} \widehat{\varphi}^{(i)}(\mathbf{m}), \quad (3.23)$$

где

$$\widehat{\varphi}^{(i)}(\mathbf{x}) \triangleq \max\{\|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{s}}_i\| - \Delta r_i, 0\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.24)$$

Из определения чебышевского центра следует

$$\forall j \notin I_M(S, P) \quad \max_{\mathbf{m} \in D_M^{(j)}(S, P)} \widehat{\varphi}^{(j)}(\mathbf{m}) \leq \max_{\mathbf{m} \in D_M^{(j)}(S, P)} \varphi^{(j)}(\mathbf{m}). \quad (3.25)$$

Поскольку чебышевский центр в евклидовом пространстве является единственным [5], то $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{c}(M) \quad h(M, \mathbf{x}) > r(M)$. Отсюда и из условий теоремы о том, что точки $\widehat{\mathbf{s}}_j$ и \mathbf{s}_j не совпадают при всех $j = \overline{1, n}$, вытекает

$$\forall j \in I_M(S, P) \quad \max_{\mathbf{m} \in D_M^{(j)}(S, P)} \widehat{\varphi}^{(j)}(\mathbf{m}) < \max_{\mathbf{m} \in D_M^{(j)}(S, P)} \varphi^{(j)}(\mathbf{m}). \quad (3.26)$$

Из (3.22) и (3.25) можно записать

$$\forall j \notin I_M(S, P) \quad \max_{\mathbf{m} \in D_M^{(j)}(S, P)} \widehat{\varphi}^{(j)}(\mathbf{m}) < R_M(S, P). \quad (3.27)$$

Из (3.21) и (3.26) следует

$$\forall j \in I_M(S, P) \quad \max_{\mathbf{m} \in D_M^{(j)}(S, P)} \widehat{\varphi}^{(j)}(\mathbf{m}) < R_M(S, P). \quad (3.28)$$

Неравенства (3.23), (3.27) и (3.28) означают выполнение (3.19). \square

Теорема 1 обосновывает эффективность применения алгоритма 1.

Замечание 1. Для того чтобы выполнялось условие $I_M(S, P) \neq \emptyset$, достаточно, чтобы $R_M(S, P) > 0$. Тогда найдется как минимум одна обобщенная область Дирихле $D_M^{(i)}(S, P)$, такая, что $h(D_M^{(i)}(S, P), \{\mathbf{s}_i\}) - \Delta r_i = R_M(S, P)$.

4. Примеры численного моделирования

Для моделирования построения оптимальных покрытий разработан программный комплекс в среде MATLAB [15]. Первый этап его работы включает построение начального положения $S^{(0)}$ центров кругов. Для него используется комбинация регулярных решеток, например квадратной или гексагональной [7], и векторов со случайными координатами, взятыми из компакта малого по сравнению с M чебышевского радиуса, например квадрата или круга с центром в начале координат. По возможности все пары точек стараются делать регулярными. Важным нововведением в программном комплексе служит создание базы данных о найденных аппроксимациях оптимальных покрытий. Кроме того, применяются численные методы, позволяющие найти такое движение регулярной решетки Браве, которое минимизирует хаусдорфово отклонение кругов с центрами в ней от компакта M [10]. Массивы с координатами центров элементов покрытия также применяются для генерации новых множеств $S^{(0)}$. Вторым этапом служит построение новых массивов точек по алгоритму 1 с целью уменьшения величины r . Множества

$D_M^{(i,j)}(S)$ вычисляются по формуле (3.15), а множества $D^{(i)}(S, P)$ — в соответствии с равенствами (3.3), (3.4), (3.10), (3.12) и (3.13). Критерием остановки работы программного комплекса служит то, что для новой построенной сети \widehat{S} и старой S выполняется условие достаточной близости $h(\widehat{S}, S) \leq h_0$, где $h_0 > 0$ выбирается в зависимости от геометрии M и числа n . Косвенным показателем близости найденного покрытия к оптимальному является его плотность $\sigma(\Xi(S, P, r))$ — отношение суммы площадей всех кругов $O(\mathbf{s}_i, r + \Delta r_i)$, $i = \overline{1, n}$, к площади фигуры M . Чем ближе $\sigma(\Xi(S, P, r))$ к 1, тем ближе результат к наилучшему. В качестве компактов M авторы решили взять те же фигуры, что и в статье [4], т. е. квадрат и треугольник.

Пример 1. Пусть задано множество

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}, \quad (4.1)$$

квадрат со сторонами длины 2. Требуется построить оптимальное покрытие Ξ_8 квадрата M при $n = 8$ и массиве чисел $P_8 = \{0.25, 0.25, 0.25, 0, 0, 0, 0, 0\}$.

Полученное с помощью многократного запуска программного комплекса решение дает значение параметра $r = 0.3886$. Координаты центров кругов

$$\begin{aligned} S_8 = \{ & (0.5743, -0.0151), (-0.5577, 0.5393), (-0.6580, -0.4607), \\ & (0.72, 0.7305), (0.0482, -0.8644), (0.1623, 0.7281), \\ & (0.7062, -0.7456), (-0.009, -0.1126)\}. \end{aligned}$$

Покрытие компакта (4.1) показано на рис. 1. Плотность покрытия $\sigma(\Xi_8) = 1.5542$.

Пример 2. Требуется построить оптимальное покрытие Ξ_{12} квадрата (4.1) при $n = 12$ и массиве чисел $P_{12} = \{0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$. Полученное решение дает значение параметра $r = 0.3133$. Координаты центров кругов:

$$\begin{aligned} S_{12} = \{ & (0.6187, 0.1019), (-0.5888, -0.693), (0.654, -0.6209), (-0.1393, \\ & 0.757), (-0.7639, 0.0694), (-0.4777, 0.4177), (0.5106, 0.757), (0.8542, 0.7227), \\ & (-0.7957, 0.7625), (-0.0399, -0.2573), (0.0653, -0.8025), (-0.0438, 0.1555)\}. \end{aligned}$$

Покрытие Ξ_{12} компакта (4.1) показано на рис. 2. Плотность покрытия $\sigma(\Xi_{12}) = 1.5743$.

Для сравнения укажем, что плотность покрытия квадрата из [4, табл. 2] набором из 8 конгруэнтных кругов равна 1.7029; набором из 12 кругов — 1.7027.

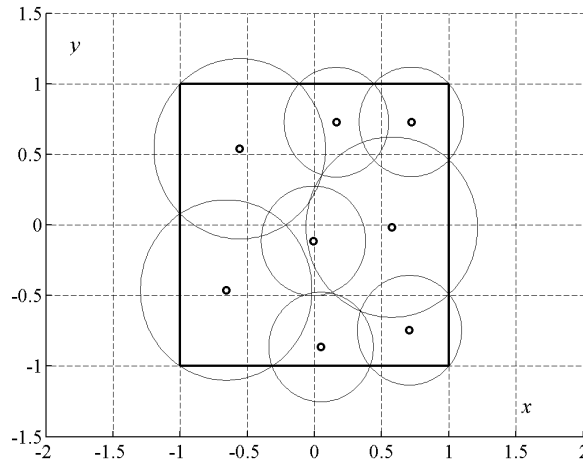


Рис. 1. Покрытие компакта (4.1) 8 кругами в примере 1

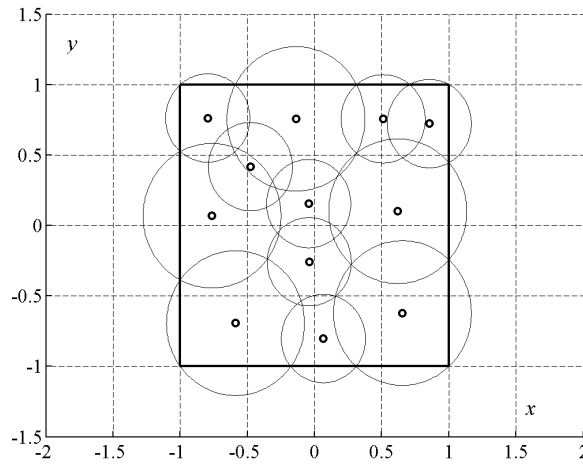


Рис. 2. Покрытие компакта (4.1) 12 кругами в примере 2

Пример 3. Пусть задано множество

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (y - |x| \leq 1) \& (y \geq 0)\}, \quad (4.2)$$

равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой длины 2. Требуется построить оптимальное покрытие Ξ_9 треугольника M_2 при $n = 9$ и массиве чисел $P_9 = \{0.15, 0.15, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$.

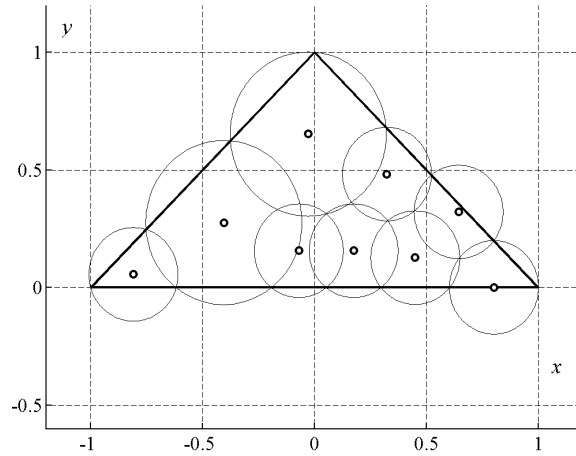


Рис. 3. Покрытие компакта (4.2) 9 кругами в примере 3

Полученное решение дает значение параметра $r = 0.1988$. Координаты центров кругов

$$S_9 = \{(-0.0286, 0.6524), (-0.4057, 0.2763), (0.3232, 0.4823), \\ (-0.0704, 0.1566), (-0.8093, 0.0561), (0.6434, 0.3214), \\ (0.1745, 0.1566), (0.4498, 0.1271), (0.8013, 0.001)\}.$$

Покрытие компакта (4.2) показано на рис. 3. Плотность покрытия $\sigma(\Xi_9) = 1.6333$.

Для сравнения укажем, что плотность покрытия треугольника из [4, табл. 1] набором из 9 конгруэнтных кругов равна 1.8139. Можно сказать, что полученные в примерах 1–3 значения плотности покрытия несколько лучше, чем результаты для аналогичных фигур, которые представлены в [4] в случае покрытия из равных кругов.

5. Заключение

Разработаны и численно реализованы алгоритмы построения оптимального покрытия плоской фигуры M набором кругов, радиусы которых различаются на постоянные величины. Их основу составляют методы разбиения множества M на обобщенные зоны Дирихле путем построения областей доминирования для всех пар точек. Для генерации начального положения точек используются регулярные решетки.

Важным новым элементом в программном комплексе стала разработка базы данных по найденным им ранее аппроксимациям оптимальных покрытий. Актуальность задачи о покрытии плоского множества набором кругов, именно набором кругов линейно различающихся радиусов, а не, например, радиусов, отношения которых фиксированы, как в работе [6], обусловлена, прежде всего, тем, что некоторые датчики могут настраиваться на разные режимы работы, при которых размеры зоны их покрытия меняются с заданным шагом. Кроме того, подобные конструкции возникают при раскрое материала [12], особенно при разрезке металлических пластин на круговые формы.

Список источников

1. Астраков С. Н., Ерзин А. И., Залобовский В. В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16, № 3. С. 3–19. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/da571>
2. Астраков С. Н., Квашнин А. Г., Короленко Л. А. Построение эффективных сенсорных сетей с учётом стоимостных затрат // Математические структуры и моделирование. 2017. № 3(43). С. 50–62. eLIBRARY ID: 30069584
3. Брусов В. С., Пиявский С. А. Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1971. Т. 11, № 2. С. 304–312. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(71\)90161-3](https://doi.org/10.1016/0041-5553(71)90161-3)
4. Галиев Ш. И., Хорьков А. В. Многократные покрытия кругами равностороннего треугольника, квадрата и круга // Дискретный анализ и исследование операций. 2015. Т. 22, № 6 С. 5–28. <https://doi.org/10.17377/daio.2015.22.482>
5. Гаркави А. Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи математических наук. 1964. Т. 19, вып. 6. С. 139–145.
6. Kazakov A. L., Lebedev P. D., Lempert A. A. On covering bounded sets by collections of circles of various radii // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2020. Т. 31. С. 18–33. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.31.18>
7. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы : в 2 т. : пер. с англ. М. : Мир, 1990.
8. Лебедев П. Д. Итерационные методы построения аппроксимаций оптимальных покрытий невыпуклых плоских множеств // Челябинский физико-математический журнал. 2019. Т. 4, вып. 1. С. 5–17. <https://doi.org/10.24411/2500-0101-2019-14101>
9. Лебедев П. Д., Казаков А. Л. Построение оптимальных покрытий выпуклых плоских фигур кругами различного радиуса // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 137–148. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-137-148>
10. Лебедев П. Д., Кувшинов О. А. Алгоритмы построения субоптимальных покрытий плоских фигур кругами в классах регулярных решеток // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С. 76–93. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-05>
11. Миклуш В. А., Татарникова Т. М. Решение задачи расположения датчиков различной физической природы при организации беспроводной сенсорной сети

- с топологией Mesh // Успехи современной радиоэлектроники. 2022. Т. 76, № 12. С. 15–20. <https://doi.org/10.18127/j20700784-202212-03>
12. Пегунин А. А., Ченцов А. Г., Ченцов, П. А. К вопросу о маршрутизации перемещений при листовой резке деталей // Вестник ЮУрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование. 2017. Т. 10, № 3. С. 25–39. <https://doi.org/10.14529/mmp170303>
 13. Сосов Е. Н. Метрическое пространство всех N -сетей геодезического пространства // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физико-математических наук. 2009. Т. 15, № 4. С. 136–149. <https://www.mathnet.ru/rus/uzku771>
 14. Тахонов И. В. О некоторых задачах покрытия плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Т. 21, № 1 (115). С. 84–102. eLIBRARY ID: 21277195. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/da762>
 15. Чен К., Джиблин П., Ирвинг А. MATLAB в математических исследованиях. М. : Мир, 2001.
 16. Kazakov A. L., Lempert A. A. On Mathematical Models for Optimization Problem of Logistics Infrastructure // Intern. J. of Artificial Intelligence. 2015. Vol. 13, N 1. P. 200–210. <http://www.ceser.in/ceserp/index.php/ijai/article/view/3537>
 17. Kazakov A., Lempert A., Le Q. M. On the thinnest covering of fixed size containers with non-Euclidean metric by incongruent circles // Communications in Computer and Information Science. 2019. Vol. 1090. P. 195–206. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33394-2_15
 18. Kazakov A., Lempert A., Le Q. M. On Multiple Coverings of Fixed Size Containers with Non-Euclidean Metric by Circles of Two Types // Communications in Computer and Information Science. 2020. Vol. 1275. P. 120–132. DOI: 10.1007/978-3-030-58657-7_12.
 19. Lempert A., Kazakov A., Le Q. Mung. On reserve and double covering problems for the sets with non-Euclidean metrics // Yugoslav Journal of Operations Research. 2019. Vol. 21, N 1. <https://doi.org/10.2298/YJOR171112010L>.
 20. Tóth F. G. Covering the plane with two kinds of circles // Discrete & Computational Geometry. 1995. Vol. 13, Is. 3–4. P. 445–457. <https://doi.org/10.1007/BF02574055>

References

1. Astrakov S.N., Erzin A.I., Zalyubovskiy V.V. Sensor networks and covering of plane by discs. *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, 2009, vol. 16, no. 3, pp. 3–19. <https://www.mathnet.ru/eng/da/v16/i3/p3> (in Russian)
2. Astrakov S.N., Kvashnin A.G., Korolenko L.A. Constructing efficient sensor networks, taking into account the cost. *Mathematical Structures and Modeling*, 2017, no. 3(43), pp. 50–62. (in Russian)
3. Brusov V.S., Piyavskii S.A. A computational algorithm for optimally covering a plane region. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1971, vol. 11, no. 2, pp. 17–27. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(71\)90161-3](https://doi.org/10.1016/0041-5553(71)90161-3) (in Russian)
4. Galiev Sh.I., Khorkov A.V. Multiple circle coverings of an equilateral triangle, square, and circle. *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, 2015, vol. 22, no. 6, pp. 5–28. <https://doi.org/10.17377/daio.2015.22.482>
5. Garkavi A.L. On the Chebyshev center and convex hull of a set. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1964, vol. 19, no. 6(120), pp. 139–145. <https://www.mathnet.ru/eng/rm/v19/i6/p139> (in Russian)

6. Kazakov A.L., Lebedev P.D., Lempert A.A. On covering bounded sets by collections of circles of various radii. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2020, vol. 31, pp. 18–33. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.31.18>
7. Conway J.H., Sloane N.J.A. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer Science & Business Media, 2013, 682 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2016-7>
8. Lebedev P.D. Iterative methods for approximations constructing of optimal covering for nonconvex plane sets. *Chelyabinsk Phys-Math Journal*, 2019, vol. 4, no 1, pp. 5–17. <https://doi.org/10.24411/2500-0101-2019-14101> (in Russian)
9. Lebedev P.D., Kazakov A.L. Iterative algorithms for constructing the thinnest coverings of convex polyhedra by sets of different balls. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 116–129. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-1-116-129> (in Russian)
10. Lebedev P.D., Kuvshinov O.A. Algorithms for constructing suboptimal coverings of plane figures with disks in the class of regular lattices. *Izv. IMI UdGU*, 2023, vol. 61, pp. 76–93. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-05> (in Russian)
11. Miklush V.A., Tatarnikova T.M. Problem solution of different sensors location in organizing a mesh topology wireless sensor network. *Journal Achievements of Modern Radioelectronics*, 2022, vol. 76, no. 12, pp. 15–20. <https://doi.org/10.18127/j20700784-202212-03> (in Russian)
12. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. About routing in the sheet cutting. *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 25–39. <https://doi.org/10.14529/mmp170303> (in Russian)
13. Sosov E.N. Metric Space of All N -nets of a Geodesic Space. *Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009, vol. 151, no. 4, pp. 136–149. Available at: <https://www.mathnet.ru/eng/uzku/v151/i4/p136> (in Russian).
14. Takhonov I.I. On some problems of covering the plane with circles. *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, 2014, vol. 21, no. 1 (115). pp. 84–102. <https://www.mathnet.ru/eng/da/v21/i1/p84> (in Russian)
15. Chen K., Giblin P.J., Irving A. *Mathematical explorations with MATLAB*. Cambridge [England], Cambridge University Press, 1999, 306 p. Available at: <https://archive.org/details/mathematicalexpl0000chen>
16. Kazakov A.L., Lempert A.A. On Mathematical Models for Optimization Problem of Logistics Infrastructure. *Intern. J. of Artificial Intelligence*, 2015, vol. 13, no 1, pp. 200–210. <http://www.ceser.in/ceserp/index.php/ijai/article/view/3537>
17. Kazakov A., Lempert A., Le Q.M. On the thinnest covering of fixed size containers with non-Euclidean metric by incongruent circles. *Communications in Computer and Information Science*, 2019, vol. 1090, pp. 195–206. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33394-2_15
18. Kazakov A., Lempert A., Le Q.M. On Multiple Coverings of Fixed Size Containers with Non-Euclidean Metric by Circles of Two Types. *Communications in Computer and Information Science*, 2020, vol. 1275, pp. 120–132. https://doi.org/10.1007/978-3-030-58657-7_12
19. Lempert A., Kazakov A., Le Q. Mung. On reserve and double covering problems for the sets with non-Euclidean metrics. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 2019, vol. 21, no 1. <https://doi.org/10.2298/YJOR171112010L>
20. Tóth F.G. Covering the plane with two kinds of circles. *Discrete & Computational Geometry*, 1995, vol. 13, iss. 3–4, pp. 445–457. <https://doi.org/10.1007/BF02574055>

Об авторах

Лебедев Павел Дмитриевич,
канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.,
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, 620108, Российская
Федерация; Уральский федеральный
университет, Екатеринбург, 620002,
Российская Федерация,
pleb@yandex.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

Стойчин Красимир Людмилов,
аспирант, Уральский федеральный
университет, Екатеринбург, 620002,
Российская Федерация,
k001kk96@mail.ru,
<https://orcid.org/0009-0005-9532-4618>

About the authors

Pavel D. Lebedev, Cand. Sci.
(Phys.Math.), Senior Researcher,
Institute of Mathematics and
Mechanics UB RAS, Yekaterinburg,
620108, Russian Federation, Ural
Federal University named after B. N.
Yeltsin, Yekaterinburg, 620002,
Russian Federation, pleb@yandex.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

Krasimir L. Stoychin,
Postgraduate, Ural Federal University
named after B. N. Yeltsin,
Yekaterinburg, 620002, Russian
Federation, k001kk96@mail.ru,
<https://orcid.org/0009-0005-9532-4618>

Поступила в редакцию / Received 05.05.2023

Поступила после рецензирования / Revised 16.10.2023

Принята к публикации / Accepted 23.10.2023