A. G. Chentsov, A bottleneck routing problem with a system of priority tasks, *Izv. IMI UdGU*, 2023, Volume 61, 156–186

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-09

Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2023. Том 61. С. 156–186

УДК 519.8

© *А. Г. Ченцов*

ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ «НА УЗКИЕ МЕСТА» С СИСТЕМОЙ ПЕРВООЧЕРЕДНЫХ ЗАДАНИЙ

Рассматривается минимаксная задача маршрутизации, связанная с посещением мегаполисов при условиях предшествования и функциях стоимости, допускающих зависимость от списка заданий. Предполагается, что выделена некоторая система мегаполисов, подлежащих посещению в первую очередь. Для решения предлагается подход с применением декомпозиции в совокупность двух минимаксных задач маршрутизации. Построена двухэтапная процедура на основе широко понимаемого динамического программирования, реализующая оптимальное композиционное решение. Упомянутая оптимальность устанавливается теоретическими методами в общей постановке. Применение полученных результатов возможно при исследовании многоэтапных процессов, связанных с регулярным выделением ресурсов. Другой вариант применения касается частного случая одноэлементных мегаполисов (т. е. городов) и может быть связан с вопросами авиационной логистики при организации системы перелетов с использованием одного средства (самолет, вертолет) при наличии системы заданий по осуществлению попутной перевозки грузов с выделением приоритетных посещений, реализуемых в первую очередь.

Ключевые слова: динамическое программирование, маршрут, условия предшествования.

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-09

Введение

Настоящая работа продолжает исследования [1, 2], в которых рассматривалась аддитивная задача маршрутизации с выделением системы первоочередных заданий; упомянутые исследования были мотивированы инженерными задачами, связанными с листовой резкой деталей на машинах с ЧПУ, где естественно возникает проблема резки зонами (см. [3, § 1.3.3]). В то же время представляется, что круг применений задач маршрутизации с выделением системы первоочередных заданий существенно шире; он может включать и неаддитивные (в смысле критерия) задачи. Так, в частности, в задаче коммивояжера (ЗК) «на узкие места» (т. е. в минимаксной ЗК), моделирующей процесс авиаперевозок одним транспортных средством (самолет или вертолет), могут быть выделены приоритетные задания, требующие скорейшего выполнения. В то же время наш гипотетический самолет (или вертолет) имеет ограниченную дальность беспосадочного полета, что связано прежде всего с дефицитом топлива. Помимо обязательного посещения всех пунктов (аэродромов), где осуществляется дозаправка, нередко требуется еще и организовать попутно перемещение грузов между некоторыми из посещаемых пунктов. Возникает вопрос: а можно ли выполнить все упомянутые задания при отмеченных условиях? Легко видеть, что требование предваряющего выполнения первоочередных заданий (здесь — перелетов) и система попутных перевозок являются на самом деле ограничениями; возможно ли их соблюдение? Если ответ положительный, то возникает следующий вопрос: как именно следует определить полетное задание? Ответы на упомянутые вопросы можно получить, снимая ресурсные ограничения и рассматривая вспомогательную задачу на минимакс. Такая же ситуация складывается и в других постановках с элементами маршрутизации при ограничениях ресурсного характера. Так, например, можно рассматривать процесс упорядочения комплексов работ (циклов) при выделении на каждый из комплексов фиксированного финансирования, призванного покрыть возникающие при выполнении работ затраты. В связи с постановками такого рода см., в частности, [4].

Упомянутые обстоятельства делают актуальным математическое исследование минимаксной задачи маршрутизации (задачи на узкие места) в условиях ограничений, среди которых особо отметим условия предшествования (см. [5]). Разумеется, естественным прототипом подобных постановок является известная труднорешаемая задача коммивояжера (ЗК); см. [5–11] и др. Сейчас особо отметим [9], где обсуждался минимаксный вариант ЗК. Вместе с тем, в задачах маршрутизации, ориентированных на инженерные приложения, возникает целый ряд особенностей качественного характера, что требует разработки соответствующей теории (в связи с задачей «на узкие места», наряду с [4], отметим [12,13]). Последнее представляется логичным и в связи с построением неаддитивных аналогов [1,2]. Данная работа как раз и посвящена теоретическим вопросам; в качестве базового метода используется широко понимаемое динамическое программирование (ДП) в варианте, развивающем процедуру [10]. Мы рассматриваем задачу оптимизации в классе маршрутных процессов (МП), включающих каждый собственно маршрут (перестановку индексов заданий), траекторию и точку старта. Наряду с неаддитивным аналогом [1, 2] рассматриваем постановку, отличающуюся от [4, 12, 13] использованием в составе критерия ненулевой, вообще говоря, терминальной компоненты, что не только добавляет общности, но и существенно для построения композиционного решения в задаче с системой первоочередных заданий. Эту часть мы излагаем более кратко, отмечая лишь особенности в сравнении с [4, 12, 13] (см. также [14, гл. 3, 5]). Основное внимание будет уделено вопросам построения оптимального решения посредством двухэтапной процедуры с использованием ДП.

В связи с данным обстоятельством важно отметить, что будет применена декомпозиция основной задачи с выделением предваряющей и финальной (частичных) задач, что соответствует логике [1, 2]. Такой прием позволяет в определенной степени преодолеть трудности с вычислительной реализацией, что (для аддитивной задачи) было продемонстрировано на примерах в [2]. В данной неаддитивной версии потребовался пересмотр целого ряда теоретических положений [4, 12–14], связанный с исследованием структуры композиционного решения. Идейные предпосылки, отмеченные в [1, 2], сохраняют свою силу и в настоящем исследовании при некоторой коррекции применяемых конструкций, типичных именно для задачи «на узкие места».

§ 1. Общие понятия, обозначения

В статье используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки и др.); через $\varnothing$ обозначаем пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого – множества. Если a и b — объекты, то $\{a; b\}$ — неупорядоченная пара a и b, т. е. непустое множество, содержащее a, b и не содержащее никаких других элементов. Если m — объект, то $\{m\} \triangleq \{m; m\}$ есть синглетон, содержащий m: $m \in \{m\}$. Множества являются объектами, а потому для любых двух объектов x, y определяем, следуя [15, с. 67], упорядоченную пару (УП) (x, y) с первым элементом x и вторым элементом y: $(x, y) \triangleq \{\{x\}; \{x; y\}\}$ (основное свойство УП см. в [15, гл. II, § 3, теорема 4]). Если h есть УП (любых объектов), то через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы h, однозначно определяемые равенством $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$. Если же x, y и z — три объекта, то $(x, y, z) \triangleq ((x, y), z)$ есть упорядоченный триплет с первым элементом x, вторым элементом y и третьим элементом z. Напомним, что (см. [16, с. 17]) для любых трех множеств A, B и C

$$A \times B \times C \triangleq (\,A \times B) \times C; \tag{1.1}$$

поэтому при $x \in A \times B$ и $y \in C$ имеем, что $(x, y) \in A \times B \times C$.

Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ (через $\mathcal{P}'(H)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств множества H, а через $\mathrm{Fin}(H)$ — семейство всех непустых конечных подмножеств (п/м) H, $\mathrm{Fin}(H) \subset \mathcal{P}'(H)$. Если H — конечное непустое множество, то $\mathrm{Fin}(H) = \mathcal{P}'(H)$.

Для любых двух непустых множеств A и B через B^A обозначаем (см. [15, гл. II]) множество всех отображений (функций) из A в B; при $f \in B^A$ и $a \in A$ в виде $f(a) \in B$ имеем значение f в точке a. Напомним обозначение образа множества (см. [15, гл. II]): если A и B — непустые множества, $h \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $h^1(C) \stackrel{\triangle}{=} \{\ h(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ C при действии h; $h^1(C) \neq \varnothing$ при $C \neq \varnothing$, $h^1(\varnothing) = \varnothing$. В части традиционных обозначений напомним, что для непустых множеств A, B и C, $h \in C^{A \times B}$, $a \in A$ и $b \in B$ как обычно $h(a, b) \stackrel{\triangle}{=} h((a, b))$. Если же A, B, C и D — непустые множества, $g \in D^{A \times B \times C}$, $\mu \in A \times B$ и $\nu \in C$, то в виде $g(\mu, \nu) \in D$ имеем значение g в точке $(\mu, \nu) \in A \times B \times C$ (см. (1.1)), для которого используем также традиционное обозначение $g(\mu_1, \mu_2, \nu) \stackrel{\triangle}{=} g(\mu, \nu)$, где $\mu_1 \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(\mu)$ и $\mu_2 \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(\mu)$.

В дальнейшем $\mathbb{R}_+ \stackrel{\triangle}{=} \{\ \xi \in \mathbb{R} |\ 0 \leqslant \xi\}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{\ 1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{N}_0 \stackrel{\triangle}{=} \{0\} \cup \mathbb{N} = \{\ 0; 1; 2; \ldots\}$ и

$$\overline{p, q} \stackrel{\triangle}{=} \{\ k \in \mathbb{N}_0 |\ (p \leqslant k) \& (k \leqslant q)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)\ \ \forall p \in \mathbb{N}_0\ \forall q \in \mathbb{N}_0;$$

ясно, что $\overline{1, 0} = \varnothing$ и $\overline{1, m} = \{\ k \in \mathbb{N} |\ k \leqslant m\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ при $m \in \mathbb{N}$. Если $\mathbb{K} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ и $s \in \mathbb{N}$, то

$$\mathbb{K} \oplus s \stackrel{\triangle}{=} \{\ k + s\colon k \in \mathbb{K}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$$

есть сдвиг множества $\mathbb{K}$. Непустому конечному множеству K сопоставляем его мощность (количество элементов) $|K| \in \mathbb{N}$ и (непустое) множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций [17, с. 87] дискретного интервала $\overline{1, |K|}$ на K (разумеется, $(\mathrm{bi})[K]$ определено при $K \in \mathcal{P}'(S)$, где S — непустое конечное множество). Полагаем, что $|\varnothing| \stackrel{\triangle}{=} 0$. Перестановка непустого множества A есть [17, с. 87] биекция A на себя; каждой перестановке α множества A сопоставляется перестановка α^{-1} того же множества, обратная к α:

$$\alpha^{-1}(\alpha(a)) = \alpha(\alpha^{-1}(a)) = a\ \ \forall a \in A.$$

Непустому множеству S совоставляем множество $\mathcal{R}_+[S] \stackrel{\triangle}{=} (\mathbb{R}_+)^S$ всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на S. Отображения, определенные на непустых п/м $\mathbb{N}_0$ называем кортежами. Используем индексную форму записи функций и, в частности, кортежей (см. семейство с индексом в [18, с. 11]). Итак, если A и B — непустые множества и определено $b_a \in B$ при $a \in A$, то $(b_a)_{a \in A}$ есть такая функция $\mathbf{b} \in B^A$, что $\mathbf{b}(\alpha) \stackrel{\triangle}{=} b_\alpha$ при $\alpha \in A$. Если $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{R}$, то

$$\sup(\{\sup(\{x; y\}); z\}) = \sup(\{x; \sup(\{y; z\})\}),$$

где $\sup(\{a; b\})$ есть наибольшее из чисел $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$. В дальнейшем для обозначения склейки кортежей будут использоваться символы $\Box$ и $\Diamond$. Отношением называем ниже п/м декартова произведения двух множеств.

§ 2. Стандартная задача маршрутизации на узкие места: общие положения

В данном разделе начинаем рассмотрение задачи, именуемой ниже стандартной. Заметим, что в постановке с системой первоочередных заданий будет использоваться декомпозиция более специальной задачи маршрутизации в совокупность двух стандартных задач. Сама же стандартная задача обладает в сравнении с [4, 12–14] только одной особенностью: оптимизируемый критерий включает терминальную компоненту. Данная особенность не приводит, однако, к существенному усложнению теоретических построений, а потому мы, как правило, будем опускать соответствующие доказательства, которые подобны [4, 12–14] (см., в частности, [14, гл. 5]).

Фиксируем непустое множество X на всем дальнейшем продолжении статьи. В двух последующих разделах фиксируем $n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant n,$ непустые конечные множества

$$M_1^0 \in \mathrm{Fin}(X), \quad \ldots, \quad M_n^0 \in \mathrm{Fin}(X), \tag{2.1}$$

именуемые мегаполисами, а также (непустые) отношения

$$\mathbb{M}_1^0 \in \mathcal{P}'(M_1^0 \times M_1^0), \quad \ldots, \quad \mathbb{M}_n^0 \in \mathcal{P}'(M_n^0 \times M_n^0),$$

точки которых (а это УП) будут определять возможные пункты прибытия и отправления для соответствующего мегаполиса. Фиксируем $X_0 \in \mathrm{Fin}(X)$ в качестве множества возможных точек старта. Полагаем далее, что

$$(\ X_0 \cap M_j^0 = \varnothing\ \forall j \in \overline{1,n})\&(\ M_p^0 \cap M_q^0 = \varnothing\ \forall p \in \overline{1,n}\ \forall q \in \overline{1,n} \setminus \{p\}).$$

Если $j \in \overline{1,n}$, то $\mathfrak{M}_j^0 \triangleq \{\ \mathrm{pr}_1(z)\colon z \in \mathbb{M}_j^0\} \in \mathrm{Fin}(M_j^0)$ и $\mathbf{M}_j^0 \triangleq \{\ \mathrm{pr}_2(z)\colon z \in \mathbb{M}_j^0\} \in \mathrm{Fin}(M_j^0)$. Введем в рассмотрение множества

$$(\ \mathfrak{X}_0 \triangleq (\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i^0) \cup X_0 \in \mathrm{Fin}(X))\&(\ \mathfrak{X}^0 \triangleq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i^0 \in \mathrm{Fin}(X)), \tag{2.2}$$

которые потребуются при определении функций стоимости.

Пусть $P \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,n}]$; P — непустое конечное множество. Мы рассматриваем далее системы перемещений вида

$$\begin{gathered}(\ x \in X_0) \to (\ \mathrm{pr}_1(z_1) \in \mathfrak{M}_{\alpha(1)}^0 \rightsquigarrow \mathrm{pr}_2(z_1) \in \mathbf{M}_{\alpha(1)}^0) \to \ldots \\ \ldots \to (\ \mathrm{pr}_1(z_n) \in \mathfrak{M}_{\alpha(n)}^0 \rightsquigarrow \mathrm{pr}_2(z_n) \in \mathbf{M}_{\alpha(n)}^0),\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$z_1 \in \mathbb{M}_{\alpha(1)}^0, \ldots, z_n \in \mathbb{M}_{\alpha(n)}^0, \tag{2.4}$$

где $\alpha \in P$. Полагаем, что в целях последующего решения задачи маршрутизации в (2.3), (2.4) можно выбирать точку x, перестановку α и кортеж $(z_1, \ldots, z_n)$. Итак, в (2.3), (2.4) мы имеем систему n циклов, каждый из которых включает (внешнее) перемещение к мегаполису и выполнение внутренних работ, связанных с его посещением. Прямые стрелки в (2.3) как раз и обозначают внешние перемещения, а волнистые — перемещения при выполнении внутренних работ. Выбор α, именуемой маршрутом, может быть стеснен условиями предшествования. В этой связи фиксируем множество

$$\mathfrak{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,n} \times \overline{1,n}],$$

элементы которого (а это УП) называем адресными парами, у каждой из которых первый элемент называем отправителем, а второй — получателем. Полагаем далее, что

$$\forall \mathfrak{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathfrak{K})\ \exists z_0 \in \mathfrak{K}_0 :\ \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall z \in \mathfrak{K}_0 \tag{2.5}$$

(в [19, часть 2] указаны конкретные случаи выполнения (2.5)). Согласно [19, (2.2.53)]

$$\mathfrak{A} \triangleq \{\ \alpha \in P|\ \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \ \forall z \in \mathfrak{K}\} \in \mathcal{P}'(P); \tag{2.6}$$

итак, допустимые (по предшествованию) маршруты — элементы (2.6) — существуют. Нам потребуются также частичные маршруты, связанные с посещением не всех, вообще говоря, мегаполисов (2.1). Введем $\mathfrak{N}_0 \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1,n})$ (семейство всех непустых п/м $\overline{1,n}$)). Тогда, следуя [19, часть 2], определяем

$$\mathbb{I}\colon \mathfrak{N}_0 \longrightarrow \mathfrak{N}_0$$

посредством следующего правила: при $K \in \mathfrak{N}_0$

$$\mathbb{I}(K) \triangleq K \setminus \{\ \mathrm{pr}_2(z)\colon z \in \Xi_0[K]\},$$

где $\Xi_0[K] \triangleq \{\ z \in \mathfrak{K}|\ (\ \mathrm{pr}_1(z) \in K)\&(\ \mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$; см. [19, с. 32]. Далее, при $K \in \mathfrak{N}_0$

$$(\mathbb{I} - \mathrm{bi})[K] \triangleq \{\ \alpha \in (\mathrm{bi})[K]|\ \alpha(s) \in \mathbb{I}(\alpha^1(\overline{s,|K|}))\ \forall s \in \overline{1,|K|}\} \in \mathcal{P}'((\mathrm{bi})[|K|]);$$

см. [19, с. 33]. В частности, имеем (см. [19, теорема 2.2.1]) следующее равенство

$$\mathfrak{A} = (\mathbb{I} - \mathrm{bi})[\overline{1,n}]. \tag{2.7}$$

Итак, введена допустимость частичных маршрутов по вычеркиванию (заданий из списка), согласующаяся (см. (2.7)) с допустимостью по предшествованию.

Пусть $\mathfrak{Z}_0 \triangleq (X \times X)^{\overline{0,n}}$ (множество всех кортежей $(z_t)_{t\in\overline{0,n}}\colon \overline{0,n} \longrightarrow X \times X$). Тогда при $x \in X_0$ и $\alpha \in P$

$$\mathfrak{Z}^0_\alpha[x] \triangleq \{\ (z_t)_{t\in\overline{0,n}} \in \mathfrak{Z}_0|\ (\ z_0 = (x,x))\&(\ z_\tau \in \mathbb{M}^0_{\alpha(\tau)}\ \forall \tau \in \overline{1,n})\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}_0) \tag{2.8}$$

есть множество всех траекторий (см. (2.3), (2.4)), стартующих из x и согласованных с маршрутом α. Тогда при $x \in X_0$ рассматриваем

$$\mathbf{D}_0[x] \triangleq \{\ (\alpha, \mathbf{z}) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{Z}_0|\ \mathbf{z} \in \mathfrak{Z}^0_\alpha[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{Z}_0) \tag{2.9}$$

как множество всех допустимых решений (ДР) в задаче маршрутизации со стартом в x. Определения (2.8), (2.9) дополняем локальными аналогами. Так, полагая при $K \in \mathfrak{N}_0$, что $\mathfrak{Z}^0_K \triangleq (X \times X)^{\overline{0,|K|}}$, вводим пучки частичных траекторий. А именно: при $K \in \mathfrak{N}_0$, $x \in \mathfrak{X}_0$ и $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$

$$\tilde{\mathfrak{Z}}^0_{K,\alpha}[x] \triangleq \{\ (z_t)_{t\in\overline{0,|K|}} \in \mathfrak{Z}^0_K|\ (\ z_0 = (x,x))\&(\ z_\tau \in \mathbb{M}^0_{\alpha(\tau)}\ \forall \tau \in \overline{1,|K|})\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}^0_K).$$

Соответственно, при $x \in \mathfrak{X}_0$ и $K \in \mathfrak{N}_0$ в виде

$$\mathbf{D}^0_K[x] \triangleq \{\ (\alpha, \mathbf{z}) \in (\mathbb{I} - \mathrm{bi})[K] \times \mathfrak{Z}^0_K|\ \mathbf{z} \in \tilde{\mathfrak{Z}}^0_{K,\alpha}[x]\} \in \mathrm{Fin}((\mathbb{I} - \mathrm{bi})[K] \times \mathfrak{Z}^0_K) \tag{2.10}$$

имеем локальную версию (2.9). С учетом (2.7) проверяется, что $\mathbf{D}^0_{\overline{1,n}}[x] = \mathbf{D}_0[x]$ при $x \in X_0$. Наконец, в виде

$$\mathbb{D}^0 \triangleq \{\ (\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{Z}_0 \times X_0|\ (\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}_0[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{Z}_0 \times X_0) \tag{2.11}$$

имеем множество всех МП, которые будут использованы в качестве ДР в задаче маршрутизации с произвольным выбором допустимой точки старта.

Функции стоимости и критерии качества. Учитывая (2.2), мы фиксируем следующие в/з функции

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{X}^0 \times \mathfrak{N}_0], \quad c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}^0_1 \times \mathfrak{N}_0], \quad \ldots, \quad c_n \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}^0_n \times \mathfrak{N}_0], \quad f \in \mathcal{R}_+[\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{M}^0_i].$$

Полагаем, что $\mathbf{c}$ используется для оценивания внешних перемещений, $c_1, \ldots, c_n$ — для оценивания внутренних работ, связанных с посещением мегаполисов, а f — для оценивания терминального состояния (точка $\mathrm{pr}_2(z_n)$ в (2.3)). С учетом (2.2) легко видеть, что при $x \in X_0$, $\alpha \in P$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,n}} \in \mathfrak{Z}^0_\alpha[x]$ определено

$$\mathcal{B}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,n}}] \triangleq \sup(\{ \max_{t\in\overline{1,n}}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,n})) + c_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t,n}))]; f(\mathrm{pr}_2(z_n))\}) \in \mathbb{R}_+ \tag{2.12}$$

(напомним, что $\alpha^1(\overline{t,n}) = \{\ \alpha(k) \colon k \in \overline{t,n}\}$ есть, при $t \in \overline{1,n}$, образ множества $\overline{t,n}$ при действии α). В (2.12) имеем отличие от аналогичных определений в [4, 12–14], связанное с использованием f. Ясно, что (2.12) определено при $x \in X_0$ и $(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,n}}) \in \mathbf{D}_0[x]$. Рассматриваем при $x \in X_0$ следующую x-задачу:

$$\mathcal{B}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,n}}] \longrightarrow \min,\ (\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,n}}) \in \mathbf{D}_0[x], \tag{2.13}$$

которой сопоставляется экстремум $V_0[x]$ и непустое экстремальное множество $(\mathrm{sol})_0[x]$:

$$V_0[x] \triangleq \min_{(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,n}})\in\mathbf{D}_0[x]} \mathcal{B}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,n}}] \in \mathbb{R}_+,$$

$$(\mathrm{sol})_0[x] \triangleq \{\ (\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,n}}) \in \mathbf{D}_0[x] |\ \mathcal{B}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,n}}] = V_0[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{D}_0[x]). \tag{2.14}$$

Заметим, что (см. (2.11)) при $(\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D}^0$ определено $\mathcal{B}_\alpha[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+$. С учетом этого вводим в рассмотрение следующую задачу:

$$\mathcal{B}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,n}}] \longrightarrow \min, \quad (\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,n}}, x) \in \mathbb{D}^0; \tag{2.15}$$

задаче (2.15) сопоставляется экстремум $\mathbb{V}_0$ и непустое множество $\mathbb{SOL}$ всех ее оптимальных решений:

$$\mathbb{V}_0 \triangleq \min_{(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,n}},x)\in\mathbb{D}^0} \mathcal{B}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,n}}] = \min_{x\in X_0} V_0[x] \in \mathbb{R}_+, \tag{2.16}$$

$$\mathbb{SOL} \triangleq \{\ (\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,n}}, x) \in \mathbb{D}^0 |\ \mathcal{B}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,n}}] = \mathbb{V}_0\} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{D}^0). \tag{2.17}$$

Мы называем задачи (2.13), (2.15) стандартными; основная задача (2.15) связывается с системой x-задач (2.13), $x \in X_0$. Последние характеризуются функцией экстремума

$$V_0[\cdot] \triangleq (V_0[x])_{x\in X_0} \in \mathcal{R}_+[X_0]. \tag{2.18}$$

С (2.18) связываем задачу оптимизации точки старта

$$V_0[x] \longrightarrow \min, \quad x \in X_0,$$

для которой экстремум совпадает с $\mathbb{V}_0$ (см. (2.16)), а экстремальное множество имеет вид

$$X_0^{(\mathrm{opt})} \triangleq \{\ x \in X_0 | V_0[x] = \mathbb{V}_0\} \in \mathrm{Fin}(X_0).$$

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Если* $x^* \in X_0^{(\mathrm{opt})}$ *и* $(\alpha^*, (z^*_t)_{t\in\overline{0,n}}) \in (\mathrm{sol})_0[x^*]$, *то*

$$(\alpha^*, (z^*_t)_{t\in\overline{0,n}}, x^*) \in \mathbb{SOL}. \tag{2.19}$$

Доказательство очевидно. Элементы множества (2.17) называем оптимальными МП (в стандартной задаче (2.15)).

Динамическое программирование. При $K \in \mathfrak{N}_0$, $x \in \mathfrak{X}_0$, $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}} \in \in \tilde{\mathfrak{Z}}^0_{K,\alpha}[x]$ определено

$$\mathcal{B}_K^{(\alpha)}[(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}] \overset{\triangle}{=} \sup(\{ \max_{t\in\overline{1,|K|}}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,|K|})) + c_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t,|K|}))]; \\ f(\mathrm{pr}_2(z_{|K|}))\}) \in \mathbb{R}_+. \tag{2.20}$$

Ясно также (см. (2.10)), что (2.20)) определено при $x \in \mathfrak{X}_0$ и $(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}) \in \mathbf{D}^0_K[x]$. Тогда при $x \in \mathfrak{X}_0$ и $K \in \mathfrak{N}_0$ получаем следующую (частичную) задачу:

$$\mathcal{B}_K^{(\alpha)}[(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}] \longrightarrow \min,\ (\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}) \in \mathbf{D}^0_K[x];$$

этой задаче сопоставляются экстремум $\mathrm{v}^0(x, K)$ и непустое экстремальное множество $(\mathrm{sol})^0_K[x]$:

$$\mathrm{v}^0(x, K) \overset{\triangle}{=} \min_{(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}})\in\mathbf{D}^0_K[x]} \mathcal{B}_K^{(\alpha)}[(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}] \in \mathbb{R}_+, \tag{2.21}$$

$$(\mathrm{sol})^0_K[x] \overset{\triangle}{=} \{\ (\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}) \in \mathbf{D}^0_K[x] |\ \mathcal{B}_K^{(\alpha)}[(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}] = \mathrm{v}^0(x, K)\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{D}^0_K[x].$$

Мы дополняем (2.21) следующим положением (краевым условием)

$$\mathrm{v}^0(x, \varnothing) \overset{\triangle}{=} f(x)\ \ \forall x \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{M}^0_i. \tag{2.22}$$

Итак, определена (см. (2.21), (2.22)) в/з функция $\mathrm{v}^0 \in \mathcal{R}_+[(\mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{N}_0) \cup ((\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathbf{M}^0_i) \times \{\varnothing\})]$; легко видеть, что при $(x, K) \in \mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{N}_0,\ j \in \mathbb{I}(K)$ и $y \in \mathbf{M}^0_j$

$$(y, K \setminus \{j\}) \in (\mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{N}_0) \cup ((\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{M}^0_i) \times \{\varnothing\}),$$

что позволяет говорить о $\mathrm{v}^0(y, K \setminus \{j\}) \in \mathbb{R}_+$. Поэтому при $(x, K) \in \mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{N}_0,\ j \in \mathbb{I}(K)$ и $z \in \mathbb{M}^0_j$ определено $\mathrm{v}^0(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in \mathbb{R}_+$.

Т е о р е м а 2.1. *Если $x \in \mathfrak{X}_0$ и $K \in \mathfrak{N}_0$, то*

$$\mathrm{v}^0(x, K) = \min_{j\in\mathbb{I}(K)} \min_{z\in\mathbb{M}^0_j} \sup(\{\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K); \mathrm{v}^0(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}).$$

Доказательство теоремы практически повторяет обоснование [14, теорема 5.2.1], где следует только полагать $\mathbf{a} = 1$. Отличие (2.15) в части использования терминальной компоненты f не приводит к каким-либо затруднениям в схеме [14, теорема 5.2.1]. Поэтому изложение данного доказательства опущено по соображениям объема.

Легко видеть, что (см. (2.7)) $V_0[x] = \mathrm{v}^0(x, \overline{1,n})$ при $x \in X_0$. Поэтому из теоремы 2.1 следует, в частности, что при $x \in X_0$

$$V_0[x] = \min_{j\in\mathbb{I}(\overline{1,n})} \min_{z\in\mathbb{M}^0_j} \sup(\{\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,n}) + c_j(z, \overline{1,n}); \mathrm{v}^0(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,n} \setminus \{j\})\}) = \mathrm{v}^0(x, \overline{1,n}). \tag{2.23}$$

Слои функции Беллмана. Напомним конструкцию, предложенную в [19, раздел 4.9] для аддитивной задачи маршрутизации (фактически повторяем построения [14, разделы 3.4, 5.3]). В виде

$$\mathfrak{S}^0 \overset{\triangle}{=} \{\ K \in \mathfrak{N}_0 |\ \forall z \in \mathfrak{K}\ \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Longrightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$$

имеем семейство всех существенных списков; см. [14, раздел 4.5]. Существенные списки ранжируем по мощности; полагаем, что

$$\mathfrak{S}_s^0 \triangleq \{ K \in \mathfrak{S}^0 | s = |K|\} \ \ \forall s \in \overline{1,n}. \tag{2.24}$$

При этом $\{ \mathfrak{S}_s^0 \colon s \in \overline{1,n}\}$ есть разбиение $\mathfrak{S}^0$. Напомним, что [19, раздел 4.9] $\mathfrak{S}_n^0 = \{\overline{1,n}\}$ (одноэлементное семейство). Полагаем, что $\mathbf{K}_1^0 \triangleq \{ \mathrm{pr}_1(z) \colon z \in \mathfrak{K}\}$; тогда легко устанавливается следующее равенство

$$\mathfrak{S}_1^0 = \{ \{t\} \colon t \in \overline{1,n} \setminus \mathbf{K}_1^0\} \tag{2.25}$$

(семейство всех синглетонов «неотправителей»). Наконец (см. [19, раздел 4.9])

$$\mathfrak{S}_{s-1}^0 = \{ K \setminus \{t\} \colon K \in \mathfrak{S}_s^0, \ t \in \mathbb{I}(K)\} \ \ \forall s \in \overline{2,n}. \tag{2.26}$$

Итак (см. (2.24)–(2.26)), мы получаем рекуррентную процедуру

$$\mathfrak{S}_n^0 \longrightarrow \mathfrak{S}_{n-1}^0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathfrak{S}_1^0,$$

регулярный шаг которой указан в (2.26). Приступим к построению слоев пространства позиций, обозначаемых через $D_0^{(0)}, \ D_1^{(0)}, \ldots, D_n^{(0)}$ (здесь позициями называем УП (x, K), $x \in X$, $K \subset \overline{1,n}$). В терминах множества

$$\tilde{\mathcal{M}}^0 \triangleq \bigcup_{j \in \overline{1,n} \setminus \mathbf{K}_1^0} \mathbf{M}_j^0 \tag{2.27}$$

определяем слой $D_0^{(0)}$: полагаем, что (см. (2.27))

$$D_0^{(0)} \triangleq \{ (x, \varnothing) \colon x \in \tilde{\mathcal{M}}^0\} = \tilde{\mathcal{M}}^0 \times \{\varnothing\}. \tag{2.28}$$

Кроме того, явным образом определяем слой $D_n^{(0)}$: полагаем, что

$$D_n^{(0)} \triangleq \{ (x, \overline{1,n}) \colon x \in X_0\} = X_0 \times \{\overline{1,n}\}. \tag{2.29}$$

Итак, определены крайние слои. Напомним построение промежуточных слоев (см. [19, раздел 4.9]). Так, если $s \in \overline{1,n-1}$ и $K \in \mathfrak{S}_s^0$, то последовательно определяем

$$\begin{gathered} \mathcal{J}_s^0(K) \triangleq \{ j \in \overline{1,n} \setminus K | \{j\} \cup K \in \mathfrak{S}_{s+1}^0\}, \ \mathcal{M}_s^0[K] \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s^0(K)} \mathbf{M}_j^0, \\ \mathbb{D}_s^{(0)}[K] \triangleq \{ (x, K) \colon \ x \in \mathcal{M}_s^0[K]\} = \mathcal{M}_s^0[K] \times \{K\}, \end{gathered} \tag{2.30}$$

реализуя (последовательную) процедуру $\mathcal{J}_s^0(K) \to \mathcal{M}_s^0[K] \to \mathbb{D}_s^{(0)}[K]$. С учетом (2.30) полагаем при $s \in \overline{1,n-1}$, что

$$D_s^{(0)} \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_s^0} \mathbb{D}_s^{(0)}[K].$$

Итак, все слои пространства позиций построены; при этом (см. [19, раздел 4.9])

$$D_0^{(0)} \neq \varnothing, \quad D_1^{(0)} \neq \varnothing, \quad \ldots, \quad D_n^{(0)} \neq \varnothing. \tag{2.31}$$

Имеем также свойство $D_s^{(0)} \subset \mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{S}_s^0$ при $s \in \overline{1,n}$ и, кроме того,

$$D_0^{(0)} \subset (\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i^0) \times \{\varnothing\}. \tag{2.32}$$

Теперь введем в рассмотрение слои функции Беллмана, обозначаемые через $\mathrm{v}_0^0, \mathrm{v}_1^0, \ldots, \mathrm{v}_n^0$. Итак, при $s \in \overline{0,n}$ определяем

$$\mathrm{v}_s^0 \in \mathcal{R}_+[D_s^{(0)}] \tag{2.33}$$

в виде сужения v^0 на $D_s^{(0)}$: полагаем, что

$$\mathrm{v}_s^0(x,K) \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{v}^0(x,K) \ \ \forall (x,K) \in D_s^{(0)}. \tag{2.34}$$

Тогда, в частности, имеем из (2.22) и (2.32), что функция $\mathrm{v}_0^0 \in \mathcal{R}_+[D_0^{(0)}]$ такова, что (см. (2.28))

$$\mathrm{v}_0^0(x,\varnothing) = f(x) \ \ \forall x \in \tilde{\mathcal{M}}^0. \tag{2.35}$$

Итак, функция v_0^0 определена (см. (2.35)) явным образом. Функция $\mathrm{v}_n^0 \in \mathcal{R}_+[D_n^{(0)}]$ такова, что (см. (2.23), (2.29))

$$\mathrm{v}_n^0(x,\overline{1,n}) = V_0[x] \ \ \forall x \in X_0 \tag{2.36}$$

(финальная функция v_n^0 доставляет функцию экстремума). Напомним свойство, восходящее к [19, предложение 4.9.4]; итак (см. [4, (3.10)]), при $s \in \overline{1,n}$, $(x,K) \in D_s^{(0)}$, $j \in \mathbb{I}(K)$ и $z \in \mathbb{M}_j^0$

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}^{(0)}. \tag{2.37}$$

Предложение 2.2. *Если $s \in \overline{1,n}$, то преобразование функции v_{s-1}^0 в v_s^0 характеризуется правилом*

$$\mathrm{v}_s^0(x,K) = \min_{j\in\mathbb{I}(K)} \min_{z\in\mathbb{M}_j^0} \sup(\{\mathbf{c}(x,\mathrm{pr}_1(z),K)+c_j(z,K);\ \mathrm{v}_{s-1}^0(\mathrm{pr}_2(z),K\setminus\{j\})\}) \ \ \forall (x,K) \in D_s^{(0)}.$$

Доказательство получается комбинацией (2.34), (2.37) и теоремы 2.1. Таким образом, имеем рекуррентную процедуру

$$\mathrm{v}_0^{(0)} \to \mathrm{v}_1^{(0)} \to \ldots \to \mathrm{v}_n^{(0)}, \tag{2.38}$$

доставляющую функцию экстремума $V_0[\cdot]$ (см. (2.36)). □

Замечание 2.1. Подчеркнем, что в случае, когда нам требуется найти только $\mathbb{V}_0$ и $X_0^{(\mathrm{opt})}$, а построение самого оптимального МП не требуется, реализовать процедуру (2.38) можно в режиме с перезаписью слоев, когда в памяти вычислителя находится массив значений только одного слоя функции Беллмана (это подобно процедуре [20], использовавшейся в другой задаче). Итак, если $s \in \overline{2,n}$, то для построения v_s^0 достаточна только функция v_{s-1}^0, а функции $\mathrm{v}_0^0, \ldots, \mathrm{v}_{s-2}^0$ не требуются. После построения v_s^0 посредством (2.2) массив значений v_{s-1}^0 может быть удален и заменен аналогичным массивом для v_s^0 (перезапись слоя). При $s = n$ процедура завершается, а при $s < n$ массив значений v_s^0 (2.33) используется для построения v_{s+1}^0. Данная процедура доставляет некоторую экономию ресурсов памяти (см. [21]).

§ 3. Построение оптимального маршрутного процесса в стандартной задаче

Возвращаясь к процедуре (2.38), отметим, что после ее завершения мы располагаем функцией $V_0[\cdot]$, а потому можем найти экстремум

$$\mathbb{V}_0 = \min_{x\in X_0} \mathrm{v}_n^0(x,\overline{1,n})$$

и множество $X_0^{(\mathrm{opt})}$ всех оптимальных точек старта:

$$X_0^{(\mathrm{opt})} = \{\, x \in X_0 |\ \mathrm{v}_n^0(x,\overline{1,n}) = \mathbb{V}_0\}.$$

Для построения оптимального МП нам требуются все функции, участвующие в (2.38) (процедура с перезаписью слоев недостаточна). Мы рассматриваем сейчас решение задачи (2.13), где $x = x_0$, а
$$x_0 \in X_0. \tag{3.1}$$

З а м е ч а н и е 3.1. Если $x_0 \in X_0^{(\mathrm{opt})}$, то (см. предложение 2.1) по найденному решению из множества $(\mathrm{sol})_0[x_0]$ будет определен (см. (2.19)) оптимальный МП.

Конструкция, предполагающая только (3.1), потребуется в дальнейшем при исследовании задачи с системой первоочередных заданий. Итак, сейчас рассматриваем построение решения в задаче с фиксированной точкой старта, а замечание 3.1 указывает, как именно эти построения можно применить для нахождения оптимального МП. Итак, с учетом (2.36), (3.1) мы имеем равенство
$$V_0[x_0] = \mathrm{v}_n^0(x_0, \overline{1,n}). \tag{3.2}$$

Значение (3.2) нам известно; при этом согласно (2.29) $(x_0, \overline{1,n}) \in D_n^{(0)}$, а тогда (см. (2.37))
$$(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,n} \setminus \{j\}) \in D_{n-1}^{(0)} \ \ \forall j \in \mathbb{I}(\overline{1,n})\ \forall z \in \mathbb{M}_j^0. \tag{3.3}$$

Согласно (3.2) и предложению 2.2 имеем следующее равенство:
$$V_0[x_0] = \min_{j \in \mathbb{I}(\overline{1,n})} \min_{z \in \mathbb{M}_j^0} \sup(\{\mathbf{c}(x_0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,n}) + c_j(z, \overline{1,n});\ \mathrm{v}_{n-1}^0(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,n} \setminus \{j\})\}). \tag{3.4}$$

Мы полагаем $y_0 \stackrel{\triangle}{=} (x_0, x_0)$, получая $y_0 \in X_0 \times X_0$ и, в частности, $y_0 \in X \times X$. С учетом (3.4) выбираем $\eta_1 \in \mathbb{I}(\overline{1,n})$ и $y_1 \in \mathbb{M}_{\eta_1}^0$ со свойством
$$V_0[x_0] = \sup(\{\mathbf{c}(x_0, \mathrm{pr}_1(y_1), \overline{1,n}) + c_{\eta_1}(y_1, \overline{1,n}); \mathrm{v}_{n-1}^0(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,n} \setminus \{\eta_1\}). \tag{3.5}$$

Из (3.3) вытекает при этом следующее включение:
$$(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,n} \setminus \{\eta_1\}) \in D_{n-1}^{(0)}. \tag{3.6}$$

С учетом (2.37) и (3.6) получаем очевидное свойство
$$(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,n} \setminus \{\eta_1; j\}) = (\mathrm{pr}_2(z), (\overline{1,n} \setminus \{\eta_1\}) \setminus \{j\}) \in D_{n-2}^{(0)} \ \ \forall j \in \mathbb{I}(\overline{1,n} \setminus \{\eta_1\})\ \forall z \in \mathbb{M}_j^0. \tag{3.7}$$

Кроме того, из (3.6), (3.7) и предложения 2.2 вытекает равенство
$$\begin{gathered} \mathrm{v}_{n-1}^0(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,n} \setminus \{\eta_1\}) = \min_{j \in \mathbb{I}(\overline{1,n} \setminus \{\eta_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}_j^0} \sup(\{\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(y_1), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,n} \setminus \{\eta_1\}) \\ + c_j(z, \overline{1,n} \setminus \{\eta_1\});\ \mathrm{v}_{n-2}^0(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,n} \setminus \{\eta_1; j\})\}). \end{gathered} \tag{3.8}$$

С учетом (3.8) выберем $\eta_2 \in \mathbb{I}(\overline{1,n} \setminus \{\eta_1\})$ и $y_2 \in \mathbb{M}_{\eta_2}^0$, для которых справедливо равенство
$$\begin{gathered} \mathrm{v}_{n-1}^0(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,n} \setminus \{\eta_1\}) = \sup(\{\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(y_1), \mathrm{pr}_1(y_2), \overline{1,n} \setminus \{\eta_1\}) + c_{\eta_2}(y_2, \overline{1,n} \setminus \{\eta_1\}); \\ \mathrm{v}_{n-2}^0(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,n} \setminus \{\eta_1; \eta_2\})\}), \end{gathered} \tag{3.9}$$

где согласно (3.7) имеем по выбору η_2 и y_2, что $(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,n} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \in D_{n-2}^{(0)}$. Из (3.5) и (3.9) получаем следующую цепочку равенств:
$$\begin{gathered} V_0[x_0] = \sup(\{\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(y_0), \mathrm{pr}_1(y_1), \overline{1,n}) + c_{\eta_1}(y_1, \overline{1,n});\ \sup(\{\ \mathbf{c}(\ \mathrm{pr}_2(y_1), \mathrm{pr}_1(y_2), \overline{1,n} \setminus \{\eta_1\}) \\ + c_{\eta_2}(y_2, \overline{1,n} \setminus \{\eta_1\}); \mathrm{v}_{n-2}^0(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,n} \setminus \{\eta_1; \eta_2\})\})\}) \\ = \sup(\{\ \max_{t \in \overline{1,2}} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(y_{t-1}), \mathrm{pr}_1(y_t), \overline{1,n} \setminus \{\ \eta_j \colon j \in \overline{1,t-1}\}) \\ + c_{\eta_t}(y_t, \overline{1,n} \setminus \{\ \eta_j \colon j \in \overline{1,t-1}\})];\ \mathrm{v}_{n-2}^0(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,n} \setminus \{\ \eta_j \colon j \in \overline{1,2}\})\}). \end{gathered} \tag{3.10}$$

При $n = 2$ из (3) непосредственно извлекается свойство оптимальности УП

$$((\eta_j)_{j\in\overline{1,2}}, (y_j)_{j\in\overline{0,2}})$$

как решения x_0-задачи. Возвращаясь к общему случаю $2 \leqslant n$, заметим, что процедуры выбора, подобные (3.5) и (3.9), следует продолжать вплоть до исчерпания $\overline{1,n}$. В результате будут построены кортежи

$$\eta \triangleq (\eta_t)_{t\in\overline{1,n}} \in \mathfrak{A},\ (y_t)_{t\in\overline{0,n}} \in \mathfrak{Z}^0_\eta[x_0]$$

со следующим свойством

$$\begin{aligned} V_0[x_0] = \sup(\{ \max_{t\in\overline{1,n}}[\ \mathbf{c}(\ \mathrm{pr}_2(y_{t-1}), \mathrm{pr}_1(y_t), \overline{1,n} \setminus \{\ \eta_j\colon j \in \overline{1,t-1}\}) \\ + c_{\eta(t)}(y_t, \overline{1,n} \setminus \{\ \eta_j\colon j \in \overline{1,t-1}\})];\ f(\mathrm{pr}_2(y_n))\}). \end{aligned} \tag{3.11}$$

С учетом (2.12) и биективности η выражение (3.11) легко преобразуется к равенству

$$V_0[x_0] = \mathcal{B}_\eta[(y_t)_{t\in\overline{0,n}}],$$

что в силу (2.14) означает свойство $(\eta, (y_t)_{t\in\overline{0,n}}) \in (\mathrm{sol})_0[x_0]$. Если $x_0 \in X_0^{(\mathrm{opt})}$, то согласно предложению 2.3

$$((\eta, (y_t)_{t\in\overline{0,n}}, x_0) \in \mathbb{SOL},$$

т. е. в данном случае (оптимальной точки старта) реализуется оптимальный МП.

§ 4. Задача с системой первоочередных заданий: общие конструкции

Располагая способом решения стандартной задачи общего вида, мы приступаем к исследованию постановки, в которой имеется система мегаполисов, требующая посещения в первую очередь. Мы будем поэтому рассматривать полную задачу в виде композиции двух частных подзадач, по смыслу предваряющей и финальной. Последние две задачи будут стандартными; каждая из них может быть решена по схеме трех предыдущих разделов.

Как и прежде, пусть X — непустое множество, $X^0 \in \mathrm{Fin}(X)$. Всюду в дальнейшем фиксируем $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, для которого $4 \leqslant \mathbf{n}$, а также $\mathbf{n}$ мегаполисов

$$M_1 \in \mathrm{Fin}(X), \quad \ldots, \quad M_\mathbf{n} \in \mathrm{Fin}(X). \tag{4.1}$$

Мы полагаем далее выполненными следующие условия:

$$(\ M_j \cap X^0 = \varnothing\ \forall j \in \overline{1,\mathbf{n}})\&(\ M_p \cap M_q = \varnothing\ \forall p \in \overline{1,\mathbf{n}}\ \forall q \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{p\}). \tag{4.2}$$

В виде $\mathcal{M} \triangleq \{\ M_i\colon i \in \overline{1,\mathbf{n}}\}$ имеем семейство мегаполисов, подлежащих посещению в основной задаче. Как и в разделе 2, с каждым мегаполисом связываем непустое отношение, элементы которого (а это УП) определяют варианты выполнения внутренних работ. Итак, фиксируем

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \quad \ldots, \quad \mathbb{M}_\mathbf{n} \in \mathcal{P}'(M_\mathbf{n} \times M_\mathbf{n}).$$

Полагаем, что семейство $\mathcal{M}$ разбито в сумму подсемейств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, для введения которых фиксируем число

$$N \in \overline{2, \mathbf{n}-2}, \tag{4.3}$$

после чего полагаем, что

$$(\mathcal{M}_1 \triangleq \{\ M_i\colon i \in \overline{1,N}\})\&(\mathcal{M}_2 \triangleq \{\ M_i\colon i \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\}). \tag{4.4}$$

В силу (4.3) каждое из семейств (4.4) содержит не менее двух мегаполисов. Предполагается, что в общей $\mathcal{M}$-задаче следует реализовать посещение всех мегаполисов из $\mathcal{M}_1$ и лишь после этого приступать к посещению мегаполисов из $\mathcal{M}_2$. Заметим, что (см. (4.1), (4.2)) $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \varnothing$. Итак, у нас возникают предваряющая и финальная задачи в виде $\mathcal{M}_1$-задачи и $\mathcal{M}_2$-задачи соответственно. В каждой из этих задач возможны условия предшествования, для введения которых фиксируем следующие множества адресных пар:

$$(\ \mathbf{K}_1 \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N}))\&(\ \mathbf{K}_2 \in \mathcal{P}(\overline{1,\mathbf{n}-N} \times \overline{1,\mathbf{n}-N}). \tag{4.5}$$

Пустота какого-то множества в (4.5) означает фактическое отсутствие условий предшествования в соответствующей задаче. По аналогии с (2.5) полагаем далее, что

$$\begin{gathered}(\ \forall \mathbf{K}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_1)\ \exists z^0 \in \mathbf{K}^0 \colon \mathrm{pr}_1(z^0) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \forall z \in \mathbf{K}^0)\\ \&(\forall \tilde{\mathbf{K}}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_2)\ \exists \tilde{z}^0 \in \tilde{\mathbf{K}}^0 \colon \mathrm{pr}_1(\tilde{z}^0) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \forall z \in \tilde{\mathbf{K}}^0);\end{gathered}$$

см. обсуждение в [19, часть 2]. Пусть $\mathbb{P}_1 \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$ и $\mathbb{P}_2 \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,\mathbf{n}-N}]$; тогда (см. [19, (2.1.5), (2.2.53)])

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &\triangleq \{\ \alpha \in \mathbb{P}_1 |\ \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \forall z \in \mathbf{K}_1\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_1), \\ \mathcal{A}_2 &\triangleq \{\ \alpha \in \mathbb{P}_2 |\ \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \forall z \in \mathbf{K}_2\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_2)\end{aligned} \tag{4.6}$$

определяют множества всех допустимых по предшествованию маршрутов в $\mathcal{M}_1$- и в $\mathcal{M}_2$-задаче соответственно. Полагая $\mathbb{P} \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,\mathbf{n}}]$, получаем, что при $\alpha \in \mathbb{P}_1$ и $\beta \in \mathbb{P}_2$ определен маршрут $\alpha \Diamond \beta \in \mathbb{P}$, для которого

$$(\ (\alpha \Diamond \beta)(k) \triangleq \alpha(k)\ \forall k \in \overline{1,N})\&(\ (\alpha \Diamond \beta)(l) \triangleq \beta(l-N) + N\ \forall l \in \overline{N+1,\mathbf{n}}). \tag{4.7}$$

Среди всех маршрутов из $\mathbb{P}$ выделяем допустимые, применяя систему склеек частных маршрутов из $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$:

$$\mathbf{P} \triangleq \{\ \alpha \Diamond \beta \colon \alpha \in \mathcal{A}_1\ \beta \in \mathcal{A}_2\} = \{\ \mathrm{pr}_1(z) \Diamond \mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}). \tag{4.8}$$

З а м е ч а н и е 4.1. Итак, в $\mathcal{M}$-задаче по факту мы имеем условия предшествования, локализующиеся в $\mathcal{M}_1$- и в $\mathcal{M}_2$-задаче. В принципе могут возникать и «перекрестные» условия предшествования, когда, например, отправитель адресной пары принадлежит $\overline{1,N}$, а получатель есть элемент $\overline{N+1,\mathbf{n}}$ (возможна и противоположная ситуация). Но условие, порождаемое такой адресной парой, будет автоматически выполняться в условиях, когда $\mathcal{M}_1$-задача решается раньше, чем $\mathcal{M}_2$-задача. Поэтому специальный учет такой адресной пары представляется излишним. Если же имеется адресная пара с отправителем из $\overline{N+1,\mathbf{n}}$ и получателем из $\overline{1,N}$, то наша совокупная задача с выделением предваряющей и финальной подзадач неразрешима. Поэтому, ограничиваясь случаем разрешимой $\mathcal{M}$-задачи, можно исследовать только условия предшествования, локализующиеся в частичных подзадачах посредством множеств $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$. В этой связи полезно отметить, что и само условие предваряющего решения $\mathcal{M}_1$-задачи (в сравнении с $\mathcal{M}_2$-задачей) можно было бы, конечно, задать в терминах дополнительных условий предшествования и получить стандартную задачу (см. разделы 1–3). Однако, при данном подходе для задачи ощутимой размерности мы столкнемся с трудностями вычислительной реализации, в то время как декомпозиционный подход лучше справляется с этой проблемой как показывают примеры [1,2].

Введем в рассмотрение траектории, действуя по аналогии с (2.8), но несколько меняя обозначения. Пусть $\mathfrak{Z} \triangleq (X \times X)^{\overline{0,\mathbf{n}}}$; тогда при $x \in X^0$ и $\gamma \in \mathbb{P}$

$$\mathcal{Z}_\gamma[x] \triangleq \{\ (z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z} | (z_0 = (x,x))\&(z_\tau \in \mathbb{M}_{\gamma(\tau)}\ \forall \tau \in \overline{1,\mathbf{n}})\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}) \tag{4.9}$$

есть множество всех траекторий, стартующих из x и согласованных с маршрутом γ. Тогда при $x \in X^0$ элементы множества

$$\tilde{\mathbf{D}}[x] \stackrel{\triangle}{=} \{ (\gamma, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} | \ (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z}) \tag{4.10}$$

рассматриваем как ДР в основной $\mathcal{M}$-задаче со стартом в x, аналогичной по смыслу задаче (2.13). Получаем, наконец, множество

$$\mathbf{D} \stackrel{\triangle}{=} \{ (\gamma, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0 | \ (\gamma, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0)$$

всех допустимых маршрутных процессов (МП). Введем в рассмотрение при $j \in \overline{1,\mathbf{n}}$

$$(\mathfrak{M}_j \stackrel{\triangle}{=} \{ \mathrm{pr}_1(z) \colon z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathrm{Fin}(M_j))\&(\mathbf{M}_j \stackrel{\triangle}{=} \{ \mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathrm{Fin}(M_j)); \tag{4.11}$$

разумеется, $\mathfrak{M}_j$ и $\mathbf{M}_j$ — непустые конечные п/м X. Имеем, кроме того,

$$\bar{\mathbf{M}} \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{j=N+1}^{\mathbf{n}} \mathbf{M}_i = \bigcup_{j=1}^{\mathbf{n}-N} \mathbf{M}_{N+j} \in \mathrm{Fin(X)}. \tag{4.12}$$

С учетом (4.7)–(4.9) и (4.12) получаем, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha\Diamond\beta}[x]$ непременно $\mathrm{pr}_2(z_\mathbf{n}) \in \bar{\mathbf{M}}$ (в самом деле,

$$\mathbf{M}_{(\alpha\Diamond\beta)(\mathbf{n})} = \mathbf{M}_{\beta(\mathbf{n}-N)+N} \subset \bar{\mathbf{M}}$$

и, кроме того, $\mathrm{pr}_2(z_\mathbf{n}) \in \mathbf{M}_{(\alpha\Diamond\beta)(\mathbf{n})}$ согласно (4.9)). Как следствие (см. (4.8)) при $x \in X^0$, $\gamma \in \mathbf{P}$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]$ имеем $\mathrm{pr}_2(z_\mathbf{n}) \in \bar{\mathbf{M}}$. Отметим, что

$$(\mathbb{X} \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathfrak{M}_i \in \mathrm{Fin}(X))\&(\mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} (\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{M}_i) \cup X^0 \in \mathrm{Fin}(X)). \tag{4.13}$$

Пусть $\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}'(\overline{1,\mathbf{n}})$. Введем в рассмотрение следующие функции стоимости

$$\bar{\mathbf{c}} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \quad \bar{c_1} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_1 \times \mathfrak{N}], \quad \ldots, \quad \bar{\mathbf{c}}_\mathbf{n} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_\mathbf{n} \times \mathfrak{N}], \quad \bar{f} \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}]. \tag{4.14}$$

Функция $\bar{\mathbf{c}}$ используется при оценивании внешних перемещений, функции $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_\mathbf{n}$ — для оценивания (внутренних) работ, связанных с посещением мегаполисов, а функция $\bar{f}$ — для оценивания терминального состояния. Первые $\mathbf{n} + 1$ функции (см. (4.14)) допускают зависимость от списка заданий (элемент семейства $\mathfrak{N}$); в этой связи напомним, что $\gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}}) = \{ \gamma(j) \colon j \in \overline{t,\mathbf{n}}\}$ при $\gamma \in \mathbf{P}$ и $t \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Легко видеть, что при $x \in X^0$, $\gamma \in \mathbf{P}$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]$ определено

$$\mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{ \max_{t\in\overline{1,\mathbf{n}}}[\bar{\mathbf{c}}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + \bar{c}_{\gamma(t)}(z_t, \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}}))]; \bar{f}(\mathrm{pr}_2(z_\mathbf{n}))\}) \in \mathbb{R}_+. \tag{4.15}$$

Мы принимаем (4.15) в качестве оценки ДР $(\gamma, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]$, если точка старта зафиксирована, и в качестве оценки МП $(\gamma, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, x)$ в противном случае.

Если $x \in X^0$, рассматриваем следующую $(\mathcal{M}, x)$-задачу:

$$\mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \longrightarrow \min, \quad (\gamma, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x], \tag{4.16}$$

которой сопоставляются экстремум $\tilde{V}[x]$ и непустое экстремальное множество $(\mathrm{sol})[x]$:

$$\tilde{V}[x] \stackrel{\triangle}{=} \min_{(\gamma,(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}})\in\tilde{\mathbf{D}}[x]} \mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \in \mathbb{R}_+, \tag{4.17}$$

$$(\mathrm{sol})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{\, (\gamma,(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x] |\, \mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \tilde{V}[x]\} \in \mathrm{Fin}(\tilde{\mathbf{D}}[x]). \tag{4.18}$$

Наряду с (4.16) мы, как и в разделе 2, рассматриваем задачу оптимизации в классе МП:

$$\mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \longrightarrow \min, \quad (\gamma,(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}},x) \in \mathbf{D}. \tag{4.19}$$

Данной основной $\mathcal{M}$-задаче сопоставляется экстремум $\mathbb{V}$ и непустое экстремальное множество $\mathbf{SOL}$:

$$\mathbb{V} \stackrel{\triangle}{=} \min_{(\gamma,(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}},x)\in\mathbf{D}} \mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \in \mathbb{R}_+, \tag{4.20}$$

$$\mathbf{SOL} \stackrel{\triangle}{=} \{\, (\gamma,(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}},x) \in \mathbf{D} |\, \mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathbb{V}\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{D}). \tag{4.21}$$

В связи с (4.20), как и в разделе 2, выделяем задачу оптимизации точки старта с критерием в виде функции

$$\tilde{V}[\cdot] \stackrel{\triangle}{=} (\tilde{V}[x])_{x\in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0];$$

имеется в виду следующая задача:

$$\tilde{V}[x] \longrightarrow \min, \quad x \in X^0; \tag{4.22}$$

ей сопоставляется (см. (4.20), (4.22)) экстремум $\mathbb{V}$ и непустое экстремальное множество X^0_{opt}:

$$X^0_{\mathrm{opt}} \stackrel{\triangle}{=} \{\, x \in X^0 |\, \tilde{V}[x] = \mathbb{V}\} \in \mathcal{P}'(X^0).$$

В связи со стандартными задачами раздела 2 мы отметим лишь одну особенность, связанную с определением $\mathbf{P}$ (см. (4.8)). Эта особенность позволяет, в частности, привлечь для решения задачи (4.19) ощутимой размерности стандартные задачи умеренной размерности. Отметим также, что подобно предложению 2.1

$$(\gamma,(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}},x) \in \mathbf{SOL} \ \ \forall x \in X^0_{\mathrm{opt}}\ \forall (\gamma,(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in (\mathrm{sol})[x]. \tag{4.23}$$

§ 5. Предваряющая и финальная задачи

Предлагаемый ниже подход к решению $\mathcal{M}$-задачи (4.19) связан с ее декомпозицией, при которой выделяются две подзадачи: $\mathcal{M}_1$-задача и $\mathcal{M}_2$-задача, называемые также предваряющей и финальной. Каждая из этих двух задач является стандартной в смысле раздела 2 и, следовательно, допускает решение по методу ДП, изложенному в разделах 2, 3. Проблему составляет оптимальное сочетание двух упомянутых задач с тем, чтобы получить экстремум (4.20) и реализующий его оптимальный МП из множества (4.21). Итак, речь идет об оптимальном композиционном решении.

Свои построения начнем с финальной задачи, для чего прежде всего введем множество ее возможных точек старта. Итак, пусть

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \stackrel{\triangle}{=} \{\, \mathrm{pr}_1(h) \colon h \in \mathbf{K}_1\}; \tag{5.1}$$

тогда $\overline{1,N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1$ имеет смысл множества всех «неотправителей» в $\mathcal{M}_1$-задаче, причем (см. [19, (4.9.9), предложение 4.9.3])

$$\overline{1,N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1 \in \mathcal{P}'(\overline{1,N}); \tag{5.2}$$

с учетом (5.2) получаем (см. (4.13)) следующее множество:

$$X^{00} \triangleq \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1} \mathbf{M}_i \in \mathrm{Fin}(\mathbf{X}). \tag{5.3}$$

Рассматриваем X^{00} как множество всех возможных точек старта в $\mathcal{M}_2$-задаче. Далее, имеем при $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$

$$\begin{gathered} M^{(j)} \triangleq M_{N+j} \in \mathrm{Fin}(X), \quad \mathbb{M}^{(j)} \triangleq \mathbb{M}_{N+j} \in \mathcal{P}'(M^{(j)} \times M^{(j)}), \\ \mathfrak{M}^{(j)} \triangleq \mathfrak{M}_{N+j} \in \mathrm{Fin}(M^{(j)}), \quad \mathbf{M}^{(j)} \triangleq \mathbf{M}_{N+j} \in \mathrm{Fin}(M^{(j)}). \end{gathered} \tag{5.4}$$

Множества X^{00}, $M^{(1)}$, $\ldots$, $M^{(\mathbf{n}-N)}$, $\mathbb{M}^{(1)}$, $\ldots$, $\mathbb{M}^{(\mathbf{n}-N)}$, $\mathbf{K}_2$ рассматриваем в качестве параметров $\mathcal{M}_2$-задачи (множество точек старта, набор мегаполисов, набор отношений, множество адресных пар). С учетом (4.11) и (5.4) имеем при $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$

$$(\mathfrak{M}^{(j)} = \{ \mathrm{pr}_1(z) \colon z \in \mathbb{M}^{(j)}\} \in \mathrm{Fin}(M^{(j)}))\&(\mathbf{M}^{(j)} = \{ \mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \mathbb{M}^{(j)}\} \in \mathrm{Fin}(M^{(j)})).$$

Напомним, что $\mathcal{A}_2$ есть множество всех допустимых по предшествованию маршрутов в $\mathcal{M}_2$-задаче. Переходя к определению траекторий, полагаем, что $\mathfrak{Z}^* \triangleq (X \times X)^{\overline{0,\mathbf{n}-N}}$. Тогда при $x \in X^{00}$ и $\beta \in \mathcal{A}_2$

$$\mathcal{Z}^*_\beta[x] \triangleq \{ (z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^* | \ (z_0 = (x,x))\&(z_t \in \mathbb{M}^{(\beta(t))} \ \forall t \in \overline{1, \mathbf{n} - N})\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}^*) \tag{5.5}$$

есть пучок траекторий $\mathcal{M}_2$-задачи, стартующих из x и согласованных с β. Кроме того, при $x \in X^{00}$ в виде

$$\mathbf{D}^*[x] \triangleq \{ (\beta, (z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \mathcal{A}_2 \times \mathfrak{Z}^* | \ (z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\beta[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A}_2 \times \mathfrak{Z}^*) \tag{5.6}$$

имеем множество всех ДР в $\mathcal{M}_2$-задаче со стартом в x, т. е. в $(\mathcal{M}_2, x)$-задаче. Полагаем далее $\mathfrak{N}^* \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n} - N})$ (семейство всех непустых п/м $\overline{1, \mathbf{n} - N}$); учитываем, что

$$K \oplus N = \{ k + N \colon k \in K\} \in \mathfrak{N} \ \ \forall K \in \mathfrak{N}^*. \tag{5.7}$$

Введем в рассмотрение следующие два множества:

$$(\mathbb{X}^* \triangleq \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}-N} \mathfrak{M}^{(i)} \in \mathrm{Fin}(X))\&(\mathbf{X}^* \triangleq (\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}-N} \mathbf{M}^{(i)}) \cup X^{00} \in \mathrm{Fin}(X)). \tag{5.8}$$

Ясно, что $\mathbb{X}^* \subset \mathbb{X}$ и $\mathbf{X}^* \subset \mathbf{X}$. С учетом этого (см. (5.7), (5.8)) определяем функцию $\mathbf{c}^* \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^* \times \mathbb{X}^* \times \mathfrak{N}^*]$ посредством правила

$$\mathbf{c}^*(x, y, K) \triangleq \bar{\mathbf{c}}(x, y, K \oplus N) \ \ \forall x \in \mathbf{X}^* \ \forall y \in \mathbb{X}^* \ \forall K \in \mathfrak{N}^*. \tag{5.9}$$

Далее, при $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ функцию $c^*_j \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}^{(j)} \times \mathfrak{N}^*]$ определяем условиями

$$c^*_j(z, K) \triangleq \bar{c}_{j+N}(z, K \oplus N) \ \ \forall z \in \mathbb{M}^{(j)} \ \forall K \in \mathfrak{N}^*. \tag{5.10}$$

Сохраняя $\bar{f}$ (4.14), мы в виде $(\mathbf{c}^*, c^*_1, \ldots, c^*_{\mathbf{n}-N}, \bar{f})$ получаем кортеж функций стоимости $\mathcal{M}_2$-задачи. С их помощью определяем критерий: при $x \in X^{00}$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\beta[x]$ полагаем

$$\begin{gathered} \mathfrak{C}^*_\beta[(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}}] \triangleq \sup(\{ \max_{t \in \overline{1,\mathbf{n}-N}} [\mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \beta^1(\overline{t, \mathbf{n} - N})) + c^*_{\beta(t)}(z_t, \beta^1(\overline{t, \mathbf{n} - N}))]; \\ \bar{f}(\mathrm{pr}_2(z_{\mathbf{n}-N}))\}). \end{gathered}$$

Теперь при $x \in X^{00}$ рассматриваем следующую стандартную $(\mathcal{M}_2, x)$-задачу:

$$\mathfrak{C}^*_\beta[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] \longrightarrow \min, \quad (\beta, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[x], \tag{5.11}$$

с экстремумом $\tilde{V}^*[x]$ и непустым экстремальным множеством $(\mathrm{sol})^*[x]$:

$$\tilde{V}^*[x] \triangleq \min_{(\beta,(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}})\in\mathbf{D}^*[x]} \mathfrak{C}^*_\beta[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] \in \mathbb{R}_+, \tag{5.12}$$

$$(\mathrm{sol})^*[x] = \{\ (\beta, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[x] |\ \mathfrak{C}^*_\beta[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] = \tilde{V}^*[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{D}^*[x]). \tag{5.13}$$

В виде (5.11) мы имеем вариант задачи (2.13). Посредством (5.12) определена важная для нас функция экстремума

$$\tilde{V}^*[\cdot] \triangleq (\tilde{V}^*[x])_{x\in X^{00}} \in \mathcal{R}_+[X^{00}]. \tag{5.14}$$

Мы рассматриваем (5.13), (5.14) как некоторые результанты $\mathcal{M}_2$-задачи, которые будут задействованы при построении композиционного решения. В частности, функция (5.14) будет использована при построении терминальной компоненты критерия $\mathcal{M}_1$-задачи, к рассмотрению которой сейчас и переходим.

Напомним, что $\mathcal{A}_1$ есть множество всех допустимых по предшествованию маршрутов $\mathcal{M}_1$-задачи. Для построения траекторий введем сначала множество $\mathfrak{Z}^\natural \triangleq (X \times X)^{\overline{0,N}}$. Тогда при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathcal{A}_1$ в виде

$$\mathcal{Z}^\natural_\alpha[x] \triangleq \{\ (z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}^\natural |\ (z_0 = (x,x))\&(z_\tau \in \mathbb{M}_{\alpha(\tau)}\ \forall \tau \in \overline{1,N})\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}^\natural) \tag{5.15}$$

имеем пучок траекторий $\mathcal{M}_1$-задачи, стартующих из x и согласованных с маршрутом α. Тогда при $x \in X^0$

$$\mathbf{D}^\natural[x] \triangleq \{\ (\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^\natural |\ (z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_\alpha[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^\natural). \tag{5.16}$$

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Если* $x \in X^0,\ \alpha \in \mathcal{A}_1$ *и* $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_\alpha[x]$, *то* $\mathrm{pr}_2(z_N) \in X^{00}$.

Доказательство следует из определений (см. в этой связи [2, (3.6)]) и учитывает (4.6).

Введем в рассмотрение следующие множества

$$(\ \mathbb{X}^\natural \triangleq \bigcup_{i=1}^N \mathfrak{M}_i \in \mathrm{Fin}(X))\&(\ \mathbf{X}^\natural \triangleq (\bigcup_{i=1}^N \mathbf{M}_i) \cup X^0 \in \mathrm{Fin}(X))\&(\ \mathbf{M}^\natural \triangleq \bigcup_{i=1}^N \mathbf{M}_i);$$

ясно, что $\mathbb{X}^\natural \subset \mathbb{X}$ и $\mathbf{X}^\natural \subset \mathbf{X}$. Введем функцию $\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}^\natural]$, полагая, что

$$(\ \mathbf{f}(x) \triangleq \tilde{V}^*[x]\ \forall x \in X^{00})\&(\ \mathbf{f}(x) \triangleq 0\ \forall x \in \mathbf{M}^\natural \setminus X^{00}). \tag{5.17}$$

В силу предложения 5.1 существенно лишь первое соотношение в (5.17). Итак, $\mathbf{f}$ полностью определяется функцией экстремума $\mathcal{M}_2$-задачи. Пусть $\mathfrak{N}^\natural \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1,N})$ (семейство всех непустых п/м $\overline{1,N}$); ясно, что $\mathfrak{N}^\natural \subset \mathfrak{N}$. Полагаем теперь, что $\mathbf{c}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^\natural \times \mathbb{X}^\natural \times \mathfrak{N}^\natural]$ определяется условиями

$$\mathbf{c}^\natural(z, K) \triangleq \bar{\mathbf{c}}(z, K \cup \overline{N+1,\mathbf{n}}) \quad \forall z \in \mathbf{X}^\natural \times \mathbb{X}^\natural \quad \forall K \in \mathfrak{N}^\natural. \tag{5.18}$$

Далее, при $j \in \overline{1,N}$ определяем $c^\natural_j \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_j \times \mathfrak{N}^\natural]$ посредством правила

$$c^\natural_j(z, K) \triangleq \bar{c}_j(z, K \cup \overline{N+1,\mathbf{n}}) \quad \forall z \in \mathbb{M}_j \quad \forall K \in \mathfrak{N}^\natural. \tag{5.19}$$

Теперь в виде $(\mathbf{c}^\natural, c_1^\natural, \ldots, c_N^\natural, \mathbf{f})$ имеем кортеж функций стоимости $\mathcal{M}_1$-задачи; последняя стандартна в смысле раздела 2, как будет видно после введения критерия.

Из (5.17)–(5.19) вытекает, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x]$ определено значение

$$\mathfrak{C}_\alpha^\natural[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] \triangleq \sup(\{\max_{t\in\overline{1,N}}[\ \mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,N})) + c_{\alpha(t)}^\natural(z_t, \alpha^1(\overline{t,N}))];\ \mathbf{f}(\mathrm{pr}_2(z_N))\})$$
$$= \sup(\{\max_{t\in\overline{1,N}}[\ \mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,N})) + c_{\alpha(t)}^\natural(z_t, \alpha^1(\overline{t,N}))];\ \tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(z_N)]\}) \in \mathbb{R}_+. \tag{5.20}$$

В силу (5.16) значение (5.20) сопоставляется УП $(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x]$. Если $x \in X^0$, то определяем $(\mathcal{M}_1, x)$-задачу в виде

$$\mathfrak{C}_\alpha^\natural[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] \longrightarrow \min, \quad (\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x]; \tag{5.21}$$

задаче (5.21) сопоставляется экстремум $V^\natural[x]$ и непустое экстремальное множество $(\mathrm{sol})^\natural[x]$:

$$V^\natural[x] \triangleq \min_{(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,N}})\in\mathbf{D}^\natural[x]} \mathfrak{C}_\alpha^\natural[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] \in \mathbb{R}_+, \tag{5.22}$$

$$(\mathrm{sol})^\natural[x] \triangleq \{\ (\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x] |\ \mathfrak{C}_\alpha^\natural[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] = V^\natural[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{D}^\natural[x]). \tag{5.23}$$

При этом в виде $V^\natural[\cdot] \triangleq (V^\natural[x])_{x\in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0]$ имеем функцию экстремума $\mathcal{M}_1$-задачи. С ней связана задача

$$V^\natural[x] \longrightarrow \min, \quad x \in X^0,$$

которой сопоставляются экстремум $\mathbb{V}^\natural$ и непустое экстремальное множество $X_{\mathrm{opt}}^\natural$:

$$\mathbb{V}^\natural \triangleq \min_{x\in X^0} V^\natural[x] \in \mathbb{R}_+, \tag{5.24}$$
$$X_{\mathrm{opt}}^\natural \triangleq \{\ x \in X^0 |\ V^\natural[x] = \mathbb{V}^\natural\} \in \mathrm{Fin}(X^0).$$

Итак, введены две стандартные задачи (предваряющая и финальная), ориентированные на построение композиционного решения $\mathcal{M}$-задачи. Сейчас наметим схему решения последней, включая в нее и уже проделанные этапы.

1. С использованием (5.3) определяем множество X^{00} возможных точек старта в $\mathcal{M}_2$-задаче.

2. Формируем $\mathcal{M}_2$-задачу в виде системы $(\mathcal{M}_2, x)$-задач (5.11), где $x \in X^{00}$.

3. Определяем функцию экстремума $\tilde{V}^*[\cdot]$ $\mathcal{M}_2$-задачи.

4. С использованием $\tilde{V}^*[\cdot]$ создаем (см. (5.17)) терминальную компоненту критерия $\mathcal{M}_1$-задачи.

5. Формируем $\mathcal{M}_1$-задачу в виде системы $(\mathcal{M}_1, x)$-задач (5.21), где $x \in X^0$.

6. Находим функцию экстремума $V^\natural[\cdot]$ $\mathcal{M}_1$-задачи, экстремум $\mathbb{V}^\natural$ и множество $X_{\mathrm{opt}}^\natural$ (либо какую-то одну точку этого множества).

7. Строим оптимальное решение $(\mathcal{M}_1, x^0)$-задачи, где $x^0 \in X_{\mathrm{opt}}^\natural$, в виде УП маршрут–траектория. На построенной траектории фиксируем финишную точку $x^{00} \in X^{00}$ в виде второго элемента УП, отвечающей терминальному состоянию.

8. Принимая x^{00} за точку старта в $\mathcal{M}_2$-задаче, определяем оптимальное решение $(\mathcal{M}_2, x^{00})$-задачи в виде УП маршрут–траектория.

9. Склеиваем найденные ранее оптимальные решения $(\mathcal{M}_1, x^0)$- и $(\mathcal{M}_2, x^{00})$-задачи (раздельно склеиваются маршруты и траектории); добавляя к получившейся УП точку x^0, получаем оптимальный МП, т. е. элемент $\mathbf{SOL}$.

§ 6. Связь решений предваряющей, финальной и основной задач

Целый ряд положений в 1–9 требует обоснования. Этому вопросу посвящается настоящий раздел. Начнем с простейших положений, касающихся склеивания маршрутов.

П р е д л о ж е н и е 6.1. *Если* $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ *и* $t \in \overline{1, N}$, *то справедливо равенство* $(\alpha \Diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}}) = \alpha^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}$.

Доказательство следует из (4.7), простейших свойств биекций и операции взятия образа.

П р е д л о ж е н и е 6.2. *Если* $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ *и* $t \in \overline{N+1, \mathbf{n}}$, *то*

$$(\alpha \Diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}}) = \beta^1(\overline{t - N, \mathbf{n} - N}) \oplus N.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем α, β и t в соответствии с условиями. Тогда с учетом (4.7) имеем

$$\begin{aligned}(\alpha \Diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}}) &= \{\ (\alpha \Diamond \beta)(\tau) \colon \tau \in \overline{t, \mathbf{n}}\} = \{\ \beta(\tau - N) + N \colon \tau \in \overline{t, \mathbf{n}}\} \\ &= \{\ \beta(s) + N \colon s \in \overline{t - N, \mathbf{n} - N}\} = \{\ k + N \colon k \in \beta^1(\overline{t - N, \mathbf{n} - N})\} \\ &= \beta^1(\overline{t - N, \mathbf{n} - N}) \oplus N. \qquad \square\end{aligned}$$

Отметим некоторые положения, связанные со склеиванием траекторий; если $\mathbf{z}' \in \mathfrak{Z}^\natural$ и $\mathbf{z}'' \in \mathfrak{Z}^*$, то кортеж

$$\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'' \in \mathfrak{Z}$$

определяем следующими правилами:

$$(\ (\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(\tau) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{z}'(\tau)\ \forall \tau \in \overline{0, N})\&(\ (\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(\tau) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{z}''(\tau - N)\ \forall \tau \in \overline{N+1, \mathbf{n}}). \tag{6.1}$$

П р е д л о ж е н и е 6.3. *Если* $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$, $\mathbf{z}' \in \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x]$ *и* $\mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}_\beta^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(N))]$, *то*

$$\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}_{\alpha \Diamond \beta}[x]. \tag{6.2}$$

Доказательство следует из определений (см. (4.9), (5.5), (5.15), (6.1)).

П р е д л о ж е н и е 6.4. *Если* $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\mathbf{z}' \in \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x]$, $(\beta, \mathbf{z}'') \in (\mathrm{sol})^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(N))]$, *то*

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_{\alpha \Diamond \beta}[\mathbf{z}' \square \mathbf{z}''] = \sup(\{\max_{t \in \overline{1, N}}[\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(t-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}'(t)), \alpha^1(\overline{t, N})) + c^\natural_{\alpha(t)}(\mathbf{z}'(t), \alpha^1(\overline{t, N}))]; \\ \tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(N))]\}).\end{aligned} \tag{6.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем x, α, $\mathbf{z}'$ и $(\beta, \mathbf{z}'')$ в соответствии с условиями. Тогда в силу (5.6) $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $\mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}_\beta^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(N))]$. Согласно предложению 5.1 $\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(N)) \in X^{00}$. Заметим, что $\alpha \Diamond \beta \in \mathbf{P}$. В силу предложения 6.3 определена склеенная таектория (6.2). Используя (4.15) и (6.1), получаем, что

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_{\alpha \Diamond \beta}[\mathbf{z}' \square \mathbf{z}''] &= \sup(\{\max_{t \in \overline{1, \mathbf{n}}}[\ \bar{\mathbf{c}}(\mathrm{pr}_2((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(t-1)), \mathrm{pr}_1((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(t)), (\alpha \Diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}})) \\ &\quad + \bar{c}_{(\alpha \Diamond \beta)(t)}((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(t), (\alpha \Diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}}))]; \bar{f}(\mathrm{pr}_2((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(\mathbf{n}))\}) \\ &= \sup(\{\sup(\{\max_{t \in \overline{1, N}}[\ \bar{\mathbf{c}}(\mathrm{pr}_2((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(t-1)), \mathrm{pr}_1((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(t)), (\alpha \Diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}})) \\ &\quad + \bar{c}_{(\alpha \Diamond \beta)(t)}((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(t), (\alpha \Diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}}))]; \max_{t \in \overline{N+1, \mathbf{n}}}[\ \bar{\mathbf{c}}(\mathrm{pr}_2((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(t-1)), \mathrm{pr}_1((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(t)), \\ &\quad (\alpha \Diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + \bar{c}_{(\alpha \Diamond \beta)(t)}((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(t), (\alpha \Diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}}))]\}); \bar{f}(\mathrm{pr}_2((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(\mathbf{n}))\}) \\ &= \sup(\{\mathbb{A}; \sup(\{\mathbb{B}; \bar{f}(\mathrm{pr}_2((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(\mathbf{n}))\})\}),\end{aligned} \tag{6.4}$$

где $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ определяются выражениями

$$\mathbb{A} \triangleq \max_{t\in\overline{1,N}}[\ \bar{\mathbf{c}}(\mathrm{pr}_2((\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'')(t-1)), \mathrm{pr}_1((\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'')(t)), (\alpha\Diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})) \\ + \bar{c}_{(\alpha\Diamond\beta)(t)}((\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'')(t), (\alpha\Diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))],$$

$$\mathbb{B} \triangleq \max_{t\in\overline{N+1,\mathbf{n}}}[\ \bar{\mathbf{c}}(\mathrm{pr}_2((\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'')(t-1)), \mathrm{pr}_1((\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'')(t)), (\alpha\Diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})) \\ + \bar{c}_{(\alpha\Diamond\beta)(t)}((\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'')(t), (\alpha\Diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))].$$

С учетом (6.1) и предложения 6.1 получаем, что справедливо равенство

$$\mathbb{A} = \max_{t\in\overline{1,N}}[\ \bar{\mathbf{c}}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(t-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}'(t)), \alpha^1(\overline{t,N}) \cup \overline{N+1,\mathbf{n}}) + \bar{c}_{\alpha(t)}(\mathbf{z}'(t), \alpha^1(\overline{t,N}) \cup \overline{N+1,\mathbf{n}})],$$

откуда в силу (5.18), (5.19) вытекает, как следствие, что

$$\mathbb{A} = \max_{t\in\overline{1,N}}[\ \mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(t-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}'(t)), \alpha^1(\overline{t,N})) + c^\natural_{\alpha(t)}(\mathbf{z}'(t), \alpha^1(\overline{t,N}))]. \tag{6.5}$$

Далее, с учетом (5.9), (6.1) и предложения 6.2 нетрудно показать, что

$$\bar{\mathbf{c}}(\mathrm{pr}_2((\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'')(t-1)), \mathrm{pr}_1((\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'')(t)), (\alpha\Diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})) \\ = \mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}''(t-(N+1))), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}''(t-N)), \beta^1(\overline{t-N,\mathbf{n}-N}))\ \ \forall t \in \overline{N+1,\mathbf{n}}.$$

Аналогичным образом, используя (4.7), (5.10), (6.1) и предложение 6.2 получаем, что

$$\bar{c}_{(\alpha\Diamond\beta)(t)}((\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'')(t), (\alpha\Diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})) = c^*_{\beta(t-N)}(\mathbf{z}''(t-N), \beta^1(\overline{t-N,\mathbf{n}-N}))\ \ \forall t \in \overline{N+1,\mathbf{n}}.$$

Наконец, $\bar{f}(\mathrm{pr}_2((\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'')(\mathbf{n})) = \bar{f}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}''(\mathbf{n}-N)))$. Поэтому, как легко видеть, имеем по выбору $(\beta, \mathbf{z}'')$ цепочку равенств

$$\sup(\{\mathbb{B}; \bar{f}(\mathrm{pr}_2((\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'')(\mathbf{n}))\}) = \sup(\{\max_{t\in\overline{1,\mathbf{n}-N}}[\ \mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}''(t-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}''(t)), \beta^1(\overline{t,\mathbf{n}-N})) \\ + c^*_{\beta(t)}(\mathbf{z}''(t), \beta^1(\overline{t,\mathbf{n}-N}))]; \bar{f}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}''(\mathbf{n}-N)))\}) = \mathfrak{C}^*_\beta[\mathbf{z}''] = \tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(N))].$$

Из (6.4) получаем равенство $\mathfrak{C}_{\alpha\Diamond\beta}[\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}''] = \sup(\{\mathbb{A}; \tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(N))]\})$, из которого в силу (6.5) вытекает (6.3). $\Box$

Следствие 6.1. *Если* $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\mathbf{z}' \in \mathcal{Z}^\natural_\alpha$ *и* $(\beta, \mathbf{z}'') \in (\mathrm{sol})^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(N))]$, *то* $\mathfrak{C}_{\alpha\Diamond\beta}[\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}''] = \mathfrak{C}^\natural_\alpha[\mathbf{z}']$.

Доказательство сводится к непосредственной комбинации (5.20) и предложения 6.4.

Следствие 6.2. *Если* $x \in X^0$, $(\alpha, \mathbf{z}') \in (\mathrm{sol})^\natural[x]$ *и* $(\beta, \mathbf{z}'') \in (\mathrm{sol})^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(N))]$, *то* $\mathfrak{C}_{\alpha\Diamond\beta}[\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}''] = V^\natural[x]$.

Доказательство получается комбинацией (5.23) и следствия 6.1.

Предложение 6.5. *Если* $x \in X^0$, *то* $\tilde{V}[x] \leqslant V^\natural[x]$.

Доказательство. Фиксируем $x \in X^0$, получая свойство $(\mathrm{sol})^\natural[x] \neq \varnothing$ (см. (5.23)). С учетом этого выберем

$$(\alpha, \mathbf{z}') \in (\mathrm{sol})^\natural[x], \tag{6.6}$$

получая, в частности, что $(\alpha, \mathbf{z}') \in \mathbf{D}^\natural[x]$, а потому $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $\mathbf{z}' \in \mathcal{Z}_\alpha[x]$. При этом $\mathbf{z}' \in \mathfrak{Z}^\natural$; в силу предложения 5.1 $\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(N)) \in X^{00}$, а тогда (см. (5.13)) $(\mathrm{sol})^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(N))] \neq \varnothing$. С учетом этого выберем

$$(\beta, \mathbf{z}'') \in (\mathrm{sol})^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(N))]. \tag{6.7}$$

Ясно, что $(\beta, \mathbf{z}'') \in \mathbf{D}^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(N))]$, а тогда $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $\mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}^*_\beta[\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(N))]$. Получаем, что $\alpha\Diamond\beta \in \mathbf{P}$ и согласно предложению 6.3 $\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}_{\alpha\Diamond\beta}[x]$; как следствие имеем $(\alpha\Diamond\beta, \mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'') \in \tilde{\mathbf{D}}[x]$ (см. (4.10)). При этом (см. следствие 6.2) в силу (6.6), (6.7)) имеем равенство $\mathfrak{C}_{\alpha\Diamond\beta}[\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}''] = V^\natural[x]$. Поэтому из (4.17) получаем требуемое неравенство $\tilde{V}[x] \leqslant V^\natural[x]$. $\square$

С л е д с т в и е 6.3. *Справедливо неравенство* $\mathbb{V} \leqslant \mathbb{V}^\natural$.

Доказательство получаем, комбинируя (4.20), (5.24) и предложение 6.5.

§ 7. Совпадение экстремумов предваряющей и основной задач

В настоящем разделе мы прежде всего усилим утверждение следствия 6.3. К этому важному свойству будут добавлены и некоторые другие; в частности, мы усилим утверждение предложения 6.5. Однако, сначала отметим два очевидных положения, дополняющих предложение 6.3.

П р е д л о ж е н и е 7.1. *Если* $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ *и* $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha\Diamond\beta}[x]$, *то* $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_\alpha[x]$.

Доказательство следует из определений (см. (4.7), (4.9), (5.15)). Из предложений 5.1 и 7.1 вытекает, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha\Diamond\beta}[x]$

$$\mathrm{pr}_2(z_N) \in X^{00}. \tag{7.1}$$

П р е д л о ж е н и е 7.2. *Пусть* $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ *и* $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha\Diamond\beta}[x]$. *Пусть, кроме того, кортеж* $(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^*$ *определяется условиями*

$$(z^*_0 \triangleq (\mathrm{pr}_2(z_N), \mathrm{pr}_2(z_N)))\&(\ z^*_\tau \triangleq z_{\tau+N}\ \forall \tau \in \overline{1, \mathbf{n}-N}). \tag{7.2}$$

Тогда $(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\beta[\mathrm{pr}_2(z_N)]$.

Доказательство следует из определений (см. (4.7), (4.9), (5.5)); оно вполне очевидно.

Т е о р е м а 7.1. *Справедливо равенство* $\mathbb{V} = \mathbb{V}^\natural$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним следствие 6.3 и то обстоятельство, что $\mathbf{SOL} \neq \varnothing$ (см. (4.21)). С учетом этого выберем МП

$$(\tilde{\gamma}, (\tilde{z}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, \tilde{x}) \in \mathbf{SOL}. \tag{7.3}$$

В силу (4.21) и (7.3) получаем, что $(\tilde{\gamma}, (\tilde{z}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, \tilde{x}) \in \mathbf{D}$, причем справедливо равенство

$$\mathfrak{C}_{\tilde{\gamma}}[(\tilde{z}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathbb{V}. \tag{7.4}$$

При этом $\tilde{x} \in X^0$ и $(\tilde{\gamma}, (\tilde{z}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[\tilde{x}]$. Для некоторых $\tilde{\alpha} \in \mathcal{A}_1$ и $\tilde{\beta} \in \mathcal{A}_2$ в силу (4.8) имеем равенство $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha}\Diamond\tilde{\beta}$, а потому

$$(\tilde{z}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\tilde{\alpha}\Diamond\tilde{\beta}}[\tilde{x}]. \tag{7.5}$$

В силу (7.5) и предложения 7.1 получаем, что $(\tilde{z}_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_{\tilde{\alpha}}[\tilde{x}]$, а потому

$$(\tilde{\alpha}, (\tilde{z}_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}^\natural[\tilde{x}]. \tag{7.6}$$

Как следствие (см. (5.22), (5.24), (7.6)) получаем цепочку неравенств

$$\mathbb{V}^\natural \leqslant V^\natural[\tilde{x}] \leqslant \mathfrak{C}^\natural_{\tilde{\alpha}}[\tilde{z}_t)_{t\in\overline{0,N}}]. \tag{7.7}$$

Далее, ориентируясь на предложение 7.2, введем в рассмотрение кортеж $(\tilde{z}_t^*)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^*$ посредством условий

$$(\tilde{z}_0^* \triangleq (\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_N), \mathrm{pr}_2(\tilde{z}_N)))\&(\tilde{z}_\tau^* \triangleq \tilde{z}_{\tau+N}\ \forall \tau \in \overline{1,\mathbf{n}-N}). \tag{7.8}$$

В силу (7.5) и предложения 7.2 получаем свойство

$$(\tilde{z}_t^*)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_{\tilde{\beta}}[\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_N)], \tag{7.9}$$

где $\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_N) \in X^{00}$ согласно (7.1). Тогда в силу (5.6) и (7.9)

$$(\tilde{\beta}, (\tilde{z}_t^*)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_N)].$$

Как следствие получаем (см. (5.12)) очевидное неравенство

$$\tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_N)] \leqslant \mathfrak{C}^*_{\tilde{\beta}}[\tilde{z}_t^*)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}]. \tag{7.10}$$

Поэтому (см. (5.20), (7.7), (7.10)) после простых преобразований получаем следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\mathbb{V}^\natural \leqslant \mathfrak{C}^\natural_{\tilde{\alpha}}[(\tilde{z}_t)_{t\in\overline{0,N}}] \leqslant \sup(\{\max_{t\in\overline{1,N}}[\ \mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\tilde{z}_t), \tilde{\alpha}^1(\overline{t,N}))\\ + c^\natural_{\tilde{\alpha}(t)}(\tilde{z}_t, \tilde{\alpha}^1(\overline{t,N}))];\ \mathfrak{C}^*_{\tilde{\beta}}[\tilde{z}_t^*)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}]\}).\end{aligned} \tag{7.11}$$

При этом (см. (5.18), (5.19), предложение 6.1) имеем следующее равенство

$$\begin{aligned}&\max_{t\in\overline{1,N}}[\ \mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\tilde{z}_t), \tilde{\alpha}^1(\overline{t,N})) + c^\natural_{\tilde{\alpha}(t)}(\tilde{z}_t, \tilde{\alpha}^1(\overline{t,N}))]\\ &\quad = \max_{t\in\overline{1,N}}[\ \bar{\mathbf{c}}(\ \mathrm{pr}_2(\tilde{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\tilde{z}_t), \tilde{\gamma}^1(\overline{t,N})) + \bar{c}_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{z}_t, \tilde{\gamma}^1(\overline{t,N}))].\end{aligned} \tag{7.12}$$

С другой стороны, используя (5.9), (5.10), (7.8) и предложение 7.2, получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^*_{\tilde{\beta}}[\tilde{z}_t^*)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] = \sup(\{\max_{t\in\overline{1,\mathbf{n}-N}}[\ \bar{\mathbf{c}}(\ \mathrm{pr}_2(\tilde{z}_{t+N-1}), \mathrm{pr}_1(\tilde{z}_{t+N}), \tilde{\gamma}^1(\overline{t+N,\mathbf{n}}))\\ + \bar{c}_{\tilde{\gamma}(t+N)}(\tilde{z}_{t+N}, \tilde{\gamma}^1(\overline{t+N,\mathbf{n}}))]; \bar{f}(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_\mathbf{n}))\})\\ = \sup(\{\max_{\tau\in\overline{N+1,\mathbf{n}}}[\bar{\mathbf{c}}(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_{\tau-1}), \mathrm{pr}_1(\tilde{z}_\tau), \tilde{\gamma}^1(\overline{\tau,\mathbf{n}})) + \bar{c}_{\tilde{\gamma}(\tau)}(\tilde{z}_\tau, \tilde{\gamma}^1(\overline{\tau,\mathbf{n}}))]; \bar{f}(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_\mathbf{n}))\}).\end{aligned} \tag{7.13}$$

Теперь последнее выражение в (7.11) преобразуется к виду (см. (7.12), (7.13))

$$\begin{aligned}&\sup(\{\max_{t\in\overline{1,N}}[\ \mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\tilde{z}_t), \tilde{\alpha}^1(\overline{t,N})) + c^\natural_{\tilde{\alpha}(t)}(\tilde{z}_t, \tilde{\alpha}^1(\overline{t,N}))]; \mathfrak{C}^*_{\tilde{\beta}}[\tilde{z}_t^*)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}]\})\\ &\quad = \sup(\{\max_{t\in\overline{1,N}}[\ \bar{\mathbf{c}}(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\tilde{z}_t), \tilde{\gamma}^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + \bar{c}_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{z}_t, \tilde{\gamma}^1(\overline{t,\mathbf{n}}))];\\ &\quad \sup(\{\max_{t\in\overline{N+1,\mathbf{n}}}[\ \bar{\mathbf{c}}(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\tilde{z}_t), \tilde{\gamma}^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + \bar{c}_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{z}_t, \tilde{\gamma}^1(\overline{t,\mathbf{n}}))];\ \bar{f}(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_\mathbf{n}))\}\})\\ &\quad = \sup(\{\max_{t\in\overline{1,\mathbf{n}}}[\ \bar{\mathbf{c}}(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\tilde{z}_t), \tilde{\gamma}^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + \bar{c}_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{z}_t, \tilde{\gamma}^1(\overline{t,\mathbf{n}}))];\ \bar{f}(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_\mathbf{n}))\})\\ &\quad = \mathfrak{C}_{\tilde{\gamma}}[(\tilde{z}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}].\end{aligned} \tag{7.14}$$

Тогда согласно (7.11) и (7.14) получаем неравенство $\mathbb{V}^\natural \leqslant \mathfrak{C}_{\tilde{\gamma}}[(\tilde{z}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}]$. С учетом (7.4) имеем оценку $\mathbb{V}^\natural \leqslant \mathbb{V}$, откуда с учетом следствия 6.3 вытекает требуемое равенство $\mathbb{V} = \mathbb{V}^\natural$. □

П р е д л о ж е н и е 7.3. *Если* $x \in X^0$, *то* $\tilde{V}[x] = V^\natural[x]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соответствующее рассуждение подобно доказательству теоремы и мы ограничимся изложением соответствующей схемы. Фиксируем $x \in X^0$. Согласно предложению 6.5 $\tilde{V}[x] \leqslant V^\natural[x]$. Учитывая, что $(\mathrm{sol})[x] \neq \varnothing$, выберем и зафиксируем

$$(\gamma, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in (\mathrm{sol})[x]. \tag{7.15}$$

Подберем $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $\beta \in \mathcal{A}_2$ со свойством $\gamma = \alpha \lozenge \beta$, получая включение

$$(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha\lozenge\beta}[x]. \tag{7.16}$$

Ясно, что $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_\alpha[x]$ и $\mathrm{pr}_2(z_N) \in X^{00}$; при этом (см. (5.20), (5.22), (7.16))

$$V^\natural[x] \leqslant \sup(\{\max_{t\in\overline{1,N}}[\ \mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,N})) + c^\natural_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t,N}))]; \tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(z_N)]\}). \tag{7.17}$$

С учетом предложения 7.2 вводим (см. (7.2)) траекторию

$$(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\beta[\mathrm{pr}_2(z_N)],$$

используя (5.12) и получая при этом неравенство

$$\tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(z_N)] \leqslant \mathfrak{C}^*_\beta[(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}].$$

Как следствие имеем в силу (7.17) после несложных преобразований неравенство

$$V^\natural[x] \leqslant \sup(\{\max_{t\in\overline{1,N}}[\ \bar{\mathbf{c}}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + \bar{c}_{\gamma(t)}(z_t, \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})); \mathfrak{C}^*_\beta[(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}]\}) \tag{7.18}$$

(учтены конструкции, связанные с (7.12)), где для $\mathfrak{C}^*_\beta[(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}]$ реализуется представление, подобное (7.13):

$$\mathfrak{C}^*_\beta[(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] = \sup(\{\max_{t\in\overline{N+1,\mathbf{n}}}[\ \bar{\mathbf{c}}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + \bar{c}_{\gamma(t)}(z_t, \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})); \bar{f}(\mathrm{pr}_2(z_\mathbf{n}))\}). \tag{7.19}$$

В итоге из (7.18), (7.19) получаем неравенство $V^\natural[x] \leqslant \mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}]$, где согласно (4.18) и (7.15) $\mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \tilde{V}[x]$. Поэтому $V^\natural[x] \leqslant \tilde{V}[x]$, чем и завершается проверка равенства $\tilde{V}[x] = V^\natural[x]$. □

Из предложения 7.3 вытекает равенство функций $\tilde{V}[\cdot] = V^\natural[\cdot]$ и, как следствие, равенство экстремальных стартовых множеств

$$X^0_{\mathrm{opt}} = X^\natural_{\mathrm{opt}}. \tag{7.20}$$

Итак, предваряющая задача реализует целый ряд важных элементов основной $\mathcal{M}$-задачи.

§ 8. Динамическое программирование с элементами декомпозиции

Мы возвращаемся к этапам 1-9 раздела 5 и покажем, как именно можно найти $\tilde{V}^*[\cdot]$, $V^\natural[\cdot]$, $\mathbb{V}^\natural$ и $X^\natural_{\mathrm{opt}}$, применяя конструкции на основе широко понимаемого ДП. Соответствующие процедуры будут при этом подобны построениям разделов 2, 3, а потому будут излагаться достаточно кратко.

Мы располагаем множеством X^{00} (5.3), непосредственно определяемым мегаполисами $\mathcal{M}_1$-задачи. Как уже отмечалось, превращаем X^{00} в множество точек старта $\mathcal{M}_2$-задачи, для которой вводим аналог отображения $\mathbb{I}$: полагаем, что $\mathbf{I}^*\colon \mathfrak{N}^* \longrightarrow \mathfrak{N}^*$ определяется правилом: при $K \in \mathfrak{N}^*$

$$\mathbf{I}^*(K) \stackrel{\triangle}{=} K \setminus \{\ \mathrm{pr}_2(z)\colon z \in \Xi^*[K]\}, \tag{8.1}$$

где $\Xi^*[K] \triangleq \{ z \in \mathbf{K}_2 | (\mathrm{pr}_1(z) \in K)\&(\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$. В виде

$$\mathfrak{S}^* \triangleq \{ K \in \mathfrak{N}^* | \ \forall z \in \mathbf{K}_2 \ \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Longrightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\} \in \mathcal{P}(\mathfrak{N}^*) \tag{8.2}$$

имеем семейство всех существенных списков $\mathcal{M}_2$-задачи; при $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ полагаем, что

$$\mathfrak{S}^*_s \triangleq \{ K \in \mathfrak{S}^* | \ s = |K|\} \in \mathcal{P}(\mathfrak{S}^*),$$

получая аналогию с (2.24). Семейство $\{\mathfrak{S}^*_s \colon s \in \overline{1, N}\}$ образует разбиение $\mathfrak{S}^*$ (8.2); $\mathfrak{S}^*_{\mathbf{n}-N} = \{\overline{1, \mathbf{n} - N}\}$. При $\mathbf{K}^*_2 \triangleq \{ \mathrm{pr}_1(z) \colon z \in \mathbf{K}_2\}$ имеем также (см. [19, раздел 4.9]) равенство

$$\mathfrak{S}^*_1 = \{ \{t\} \colon t \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \mathbf{K}^*_2\}.$$

Наконец, подобно (2.26) имеем следующую систему равенств:

$$\mathfrak{S}^*_{s-1} = \{ K \setminus \{t\} \colon K \in \mathfrak{S}^*_s, \ t \in \mathbf{I}^*(K)\} \ \ \forall s \in \overline{2, \mathbf{n} - N}. \tag{8.3}$$

Получили рекуррентную процедуру $\mathfrak{S}^*_{\mathbf{n}-N} \to \mathfrak{S}^*_{\mathbf{n}-N-1} \to \ldots \to \mathfrak{S}^*_1$, регулярный шаг которой соответствует (8.3). Далее, создаем слои пространства позиций $\mathcal{M}_2$-задачи, обозначаемые через $D^*_0, D^*_1, \ldots, D^*_{\mathbf{n}-N}$. Сначала определяем $\tilde{\mathcal{M}}^* \in \mathcal{P}(X)$ в виде объединения всех множеств $\mathbf{M}^{(j)}, \ j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \mathbf{K}^*_2$; полагаем, что

$$D^*_0 \triangleq \{ (x, \varnothing) \colon x \in \tilde{\mathcal{M}}^*\} = \tilde{\mathcal{M}}^* \times \{\varnothing\}. \tag{8.4}$$

Кроме того, по аналогии с (2.29) определяем множество $D^*_{\mathbf{n}-N}$:

$$D^*_{\mathbf{n}-N} \triangleq \{ (x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \colon x \in X^{00}\} = X^{00} \times \{\overline{1, \mathbf{n} - N}\}. \tag{8.5}$$

Если $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N - 1}$ и $K \in \mathfrak{S}^*_s$, то (по аналогии с (2.30)) последовательно определяем

$$\begin{gathered} \mathcal{J}^*_s(K) \triangleq \{ j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus K | \{j\} \cup K \in \mathfrak{S}^*_{s+1}\}, \ \mathcal{M}^*_s[K] \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}^*_s(K)} \mathbf{M}^{(j)}, \\ \mathbb{D}^*_s[K] \triangleq \{ (x, K) \colon x \in \mathcal{M}^*_s[K]\} = \mathcal{M}^*_s[K] \times \{K\}. \end{gathered} \tag{8.6}$$

С учетом (8.6) полагаем при $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N - 1}$, что

$$D^*_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{S}^*_s} \mathbb{D}^*_s[K]. \tag{8.7}$$

Итак (см. (8.4)–(8.7)), все нужные слои построены, причем (см. (2.31)) $D^*_0 \neq \varnothing$, $D^*_1 \neq \varnothing$, $\ldots$, $D^*_{\mathbf{n}-N} \neq \varnothing$. Приступаем к построению слоев функции Беллмана, обозначаемых через $\mathrm{v}^*_0, \ldots, \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}$. Итак, $\mathrm{v}^*_0 \in \mathcal{R}_+[D^*_0]$ определяем (см. (8.4)) условием

$$\mathrm{v}^*_0(x, \varnothing) \triangleq \bar{f}(x) \ \ \forall x \in \tilde{\mathcal{M}}^*.$$

Далее, используем легкопроверяемое свойство пространства позиций (см. (2.37)):

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D^*_{s-1} \ \ \forall s \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \ \forall (x, K) \in D^*_s \ \forall j \in \mathbf{I}^*(K) \ \forall z \in \mathbb{M}^{(j)}. \tag{8.8}$$

Если $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ и функция $\mathrm{v}^*_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D^*_{s-1}]$ уже построена, то с учетом (8.8) определяем $\mathrm{v}^*_s \in \mathcal{R}_+[D^*_s]$ по правилу

$$\begin{gathered} \mathrm{v}^*_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}^*(K)} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} \sup(\{[\mathbf{c}^*(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c^*_j(z, K)]; \mathrm{v}^*_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}) \\ \forall (x, K) \in D^*_s. \end{gathered} \tag{8.9}$$

Тем самым определена рекуррентная процедура

$$\mathrm{v}_0^* \to \mathrm{v}_1^* \to \ldots \to \mathrm{v}_{\mathbf{n}-N}^*, \tag{8.10}$$

регулярный шаг которой указан в (8.9). При этом (см. (2.36)) финалом (8.10) является функция экстремума $\mathcal{M}_1$-задачи:

$$\mathrm{v}_{\mathbf{n}-N}^*(x, \overline{1, \mathbf{n}-N}) = \tilde{V}^*[x] \quad \forall x \in X^{00} \tag{8.11}$$

(мы учитываем (8.5)). Итак, посредством $\mathrm{v}_{\mathbf{n}-N}^*$ находим $\tilde{V}^*[\cdot]$, завершая этап 3 раздела 5. Напомним замечание 2.1 в части построения $\tilde{V}^*[\cdot]$ в условиях, когда не требуется построение оптимального МП, а достаточно определение $\mathbb{V}$ и X^0_{opt}: схема с перезаписью слоев здесь может использоваться. Если же требуется построение оптимального МП, в памяти следует сохранять все функции

$$\mathrm{v}_0^* \in \mathcal{R}_+[D_0^*], \quad \mathrm{v}_1^* \in \mathcal{R}_+[D_1^*], \quad \ldots, \quad \mathrm{v}_{\mathbf{n}-N}^* \in \mathcal{R}_+[D_{\mathbf{n}-N}^*]. \tag{8.12}$$

Используя (5.17) и функцию $\mathrm{v}_{\mathbf{n}-N}^*$ (см. (8.11), (8.12)), определяем терминальную компоненту $\mathbf{f}$ критерия $\mathcal{M}_1$-задачи; в итоге реализуется этап 4 раздела 5. Для построения $V^\natural[\cdot]$ также используется вариант ДП раздела 2. Введем в рассмотрение отображение $\mathbf{I}^\natural\colon \mathfrak{N}^\natural \longrightarrow \mathfrak{N}^\natural$, определяемое правилом: при $K \in \mathfrak{N}^\natural$

$$\mathbf{I}^\natural(K) \overset{\triangle}{=} K \setminus \{\, \mathrm{pr}_2(z) :\ z \in \Xi^\natural[K]\},$$

где $\Xi^\natural[K] \overset{\triangle}{=} \{\, z \in \mathbf{K}_1 |\ (\mathrm{pr}_1(z) \in K)\&(\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$. В виде

$$\mathfrak{S}^\natural \overset{\triangle}{=} \{\, K \in \mathfrak{N}^\natural |\ \forall z \in \mathbf{K}_1\ \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Longrightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\} \tag{8.13}$$

имеем семейство всех существенных списков $\mathcal{M}_1$-задачи. Пусть $\mathfrak{S}^\natural_s \overset{\triangle}{=} \{\, K \in \mathfrak{S}^\natural | s = |K|\}$ при $s \in \overline{1, N}$. Тогда $\{\, \mathfrak{S}^\natural_k\colon k \in \overline{1, N}\}$ – разбиение $\mathfrak{S}^\natural$ (8.13). Отметим очевидное равенство $\mathfrak{S}^\natural_N = \{\overline{1, N}\}$. Далее, при $\tilde{\mathbf{K}}_1$, определяемом в (5.1), имеем, как легко видеть (см. (2.25)), равенство

$$\mathfrak{S}^\natural_1 = \{\, \{t\}\colon t \in \overline{1, N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1\}. \tag{8.14}$$

Наконец, подобно (2.26), получаем следующее свойство:

$$\mathfrak{S}^\natural_{s-1} = \{\, K \setminus \{t\} :\ K \in \mathfrak{S}^\natural_s,\ t \in \mathbf{I}^\natural(K)\} \quad \forall s \in \overline{2, N}. \tag{8.15}$$

Итак (см. (8.14), (8.15)), $\mathfrak{S}^\natural_N \to \mathfrak{S}^\natural_{N-1} \to \ldots \to \mathfrak{S}^\natural_1$ есть рекуррентная процедура, регулярный шаг которой соответствует (8.15). Располагая семействами $\mathfrak{S}^\natural_1, \ldots, \mathfrak{S}^\natural_N$, приступаем к построению слоев пространства позиций в $\mathcal{M}_1$-задаче, обозначаемых через $D^\natural_0$, $D^\natural_1, \ldots$, $D^\natural_N$. Подобно (2.29) полагаем

$$(\, D^\natural_0 \overset{\triangle}{=} \{\, (x, \varnothing)\colon x \in X^{00}\})\&(\, D^\natural_N \overset{\triangle}{=} \{\, (x, \overline{1, N})\colon x \in X^0\}). \tag{8.16}$$

При $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathfrak{S}^\natural_s$ последовательно определяем

$$\mathcal{J}^\natural_s(K) \overset{\triangle}{=} \{\, j \in \overline{1, N} \setminus K |\ \{j\} \cup K \in \mathfrak{S}^\natural_{s+1}\}, \quad \mathcal{M}^\natural_s[K] \overset{\triangle}{=} \bigcup_{j \in \mathcal{J}^\natural_s(K)} \mathbf{M}_j,$$

$$\mathbb{D}^\natural_s[K] \overset{\triangle}{=} \{\, (x, K)\colon x \in \mathcal{M}^\natural_s[K]\};$$

реализуется процедура $\mathcal{J}_s^\natural(K) \to \mathcal{M}_s^\natural[K] \to \mathbb{D}_s^\natural[K]$. Принимаем соглашение: при $s \in \overline{1, N-1}$

$$D_s^\natural \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_s^\natural} \mathbb{D}_s^\natural[K]. \tag{8.17}$$

При этом $D_0^\natural \neq \varnothing$, $D_1^\natural \neq \varnothing$, $\ldots$, $D_N^\natural \neq \varnothing$ (см. (2.31)). Далее определяем функции $v_0^\natural \in \mathcal{R}_+[D_0^\natural]$, $v_1^\natural \in \mathcal{R}_+[D_1^\natural]$, $\ldots$, $v_N^\natural \in \mathcal{R}_+[D_N^\natural]$. Полагаем (см. (8.4)), что

$$v_0^\natural(x, \varnothing) \triangleq \tilde{V}^*[x] = \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \; \forall x \in X^{00}.$$

Далее, реализуем аналог предложения 2.2, учитывая, что (см. (2.37))

$$(\,\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}^\natural \;\; \forall s \in \overline{1, N} \; \forall (x, K) \in D_s^\natural \; \forall j \in \mathbf{I}^\natural(K) \; \forall z \in \mathbb{M}_j. \tag{8.18}$$

Итак, при $s \in \overline{1, N}$ правило преобразования $v_{s-1}^\natural$ в $v_s^\natural$ определяем с учетом (8.18) следующим образом:

$$v_s^\natural(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}^\natural(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{[\,\mathbf{c}^\natural(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j^\natural(z, K)];\; v_{s-1}^\natural(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}) \quad \forall (x, K) \in D_s^\natural. \tag{8.19}$$

Итак, имеем рекуррентную процедуру $v_0^\natural \to v_1^\natural \to \ldots \to v_N^\natural$, регулярный шаг которой указан в (8.19). Финалом процедуры является функция экстремума в $\mathcal{M}_1$-задаче (см. (2.36), (8.16)):

$$v_N^\natural(x, \overline{1, N}) = V^\natural[x] \;\; \forall x \in X^0. \tag{8.20}$$

Как следствие определяем экстремум $\mathcal{M}_1$-задачи:

$$\mathbb{V}^\natural = \min_{x \in X^0} V^\natural[x] = \min_{x \in X^0} v_N^\natural(x, \overline{1, N}); \tag{8.21}$$

находим также множество всех оптимальных точек старта в $\mathcal{M}_1$-задаче:

$$X^\natural_{\mathrm{opt}} = \{\, x \in X^0 |\, V^\natural[x] = \mathbb{V}^\natural\} = \{\, x \in X^0 |\, v_N^\natural(x, \overline{1, N}) = \mathbb{V}^\natural\}. \tag{8.22}$$

С учетом (8.21) и теоремы 7.1 получаем экстремум основной задачи $\mathbb{V}$. Из (8.20) и предложения 7.3 вытекает, что определена ее функция экстремума $\tilde{V}[\cdot]$. Наконец, из (7.20) и (8.22) получаем множество X^0_{opt}. Таким образом, склеенная процедура

$$(\mathrm{v}_0^* \to \mathrm{v}_1^* \to \ldots \to \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}) \to (v_0^\natural \to v_1^\natural \to \ldots \to v_N^\natural) \tag{8.23}$$

доставляет $\tilde{V}[\cdot]$, $\mathbb{V}$ и X^0_{opt}. Напомним еще раз, что в случае, когда нам достаточно найти $\mathbb{V}$ и X^0_{opt}, реализацию (8.23) можно осуществить в схеме с перезаписью слоев (см. замечание 2.1), т. е. при некоторой экономии ресурсов памяти.

§ 9. Построение оптимального маршрутного процесса

Полагаем сейчас завершенной процедуру (8.23) в ее полном варианте: считаем, что все функции, участвующие в (8.23), построены и находятся в нашем распоряжении. Итак, у нас завершен этап 6 раздела 5. Теперь мы предполагаем использовать следствие 6.2. Мы последовательно реализуем построение оптимальных решений $\mathcal{M}_1$- и $\mathcal{M}_2$-задачи. Сначала реализуем этап 7.

Итак, располагая множеством $X^0_{\mathrm{opt}} = X^\natural_{\mathrm{opt}}$, выбираем произвольно

$$x^0 \in X^0_{\mathrm{opt}} \tag{9.1}$$

в качестве точки старта в $\mathcal{M}_1$-задаче. Полагаем $y_0 \triangleq (x^0, x^0)$, получая (см. (8.16)) включение

$$(\mathrm{pr}_2(y_0), \overline{1,N}) = (x^0, \overline{1,N}) \in D_N^\natural, \tag{9.2}$$

причем (см. (8.20), (9.1)) $v_N^\natural(x^0, \overline{1,N}) = V^\natural[x^0] = \tilde{V}[x^0] = \mathbb{V}$. Тогда в силу (8.19) и (9.2)

$$\mathbb{V} = \min_{j \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{[\mathbf{c}^\natural(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j^\natural(z, \overline{1,N})];\ v_{N-1}^\natural(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\}), \tag{9.3}$$

где $(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\}) \in D_{N-1}^\natural$ при $j \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N})$ и $z \in \mathbb{M}_j$ согласно (8.18). С учетом (9.3) выбираем $\xi_1 \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N})$ и $y_1 \in \mathbb{M}_{\xi_1}$, для которых

$$\mathbb{V} = \sup(\{\{[\mathbf{c}^\natural(x^0, \mathrm{pr}_1(y_1), \overline{1,N}) + c_{\xi_1}^\natural(y_1, \overline{1,N})];\ v_{N-1}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})\}), \tag{9.4}$$

причем $(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) \in D_{N-1}^\natural$. В силу (8.19) получаем равенство

$$\begin{gathered} v_{N-1}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,N}) \setminus \{\xi_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_1), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) \\ + c_j^\natural(z, \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\});\ v_{N-2}^\natural(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; j\})\}), \end{gathered} \tag{9.5}$$

где $(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; j\}) = (\mathrm{pr}_2(z), (\overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) \setminus \{j\}) \in D_{N-2}^\natural\ \ \forall j \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})\ \forall z \in \mathbb{M}_j$. С учетом (9.5) выбираем $\xi_2 \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})$ и $y_2 \in \mathbb{M}_{\xi_2}$, для которых

$$\begin{gathered} v_{N-1}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) = \sup(\{[\ \mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_1), \mathrm{pr}_1(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) \\ + c_{\xi_2}^\natural(y_2, \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})];\ v_{N-2}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\})\}), \end{gathered} \tag{9.6}$$

где $(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}) \in D_{N-2}^\natural$. Теперь подставим (9.6) в (9.4), получая равенство

$$\begin{gathered} \mathbb{V} = \sup(\{\ \max_{t \in \overline{1,2}}[\ \mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_{t-1}), \mathrm{pr}_1(y_t), \overline{1,N} \setminus \{\xi_j \colon j \in \overline{1, t-1}\}) \\ + c_{\xi_t}^\natural(y_t, \overline{1,N} \setminus \{\xi_j \colon j \in \overline{1,t-1}\})];\ v_{N-2}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_j \colon j \in \overline{1,2}\})\}). \end{gathered} \tag{9.7}$$

З а м е ч а н и е 9.1. При $N = 2$ из (9.7) легко следует оптимальность УП $((\xi_j)_{j \in \overline{1,2}}, (y_j)_{j \in \overline{0,2}})$ как ДР $(\mathcal{M}_1, x^0)$-задачи.

В общем случае $2 \leqslant N$ процедуры выбора, подобные (9.4), (9.6) следует продолжать вплоть до исчерпания $\overline{1,N}$. В итоге будет построено (см. раздел 3) оптимальное ДР

$$(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0,N}}) \in (\mathrm{sol})^\natural[x^0], \tag{9.8}$$

где $\xi \triangleq (\xi_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{A}_1$ и $(y_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\xi^\natural[x^0]$. Полагая построение оптимального ДР (9.8) завершенным, имеем, в частности, УП $y_N \in X \times X$. При этом согласно (9.8) и предложению 5.1

$$x^{00} \triangleq \mathrm{pr}_2(y_N) \in X^{00}. \tag{9.9}$$

Тем самым завершен этап 7 раздела 5. Приступаем к реализации этапа 8, фиксируя x^{00} (9.9) в качестве точки старта в $\mathcal{M}_2$-задаче. Итак, конструируем оптимальное решение $(\mathcal{M}_2, x^{00})$-задачи. Напомним, что все функции v_0^*, v_1^*, $\ldots$, $\mathrm{v}_{\mathbf{n}-N}^*$ нам известны (см. (8.23)). При этом $\hat{y}_0 \triangleq (x^{00}, x^{00}) = (\mathrm{pr}_2(y_N), \mathrm{pr}_2(y_N))$. Тогда в силу (8.6) и (9.9) $(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n}-N}) \in D_{\mathbf{n}-N}^*$. Согласно (8.8)

$$(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{j\}) \in D_{\mathbf{n}-N-1}^*\ \ \forall j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N})\ \forall z \in \mathbb{M}^{(j)}. \tag{9.10}$$

С учетом (8.9) и (9.10) получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned}\mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n}-N}) = \min_{j \in \mathbf{I}^*(\overline{1,\mathbf{n}-N})} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} \sup(\{ [\, \mathbf{c}^*(x^{00}, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1, \mathbf{n}-N}) \\ + c^*_j(z, \overline{1, \mathbf{n}-N})];\ \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{j\})\}).\end{aligned} \tag{9.11}$$

С учетом (9.11) выбираем $\eta_1 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N})$ и $\hat{y}_1 \in \mathbb{M}^{(\eta_1)}$, для которых реализуется равенство

$$\begin{aligned}\mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n}-N}) = \sup(\{ [\, \mathbf{c}^*(x^{00}, \mathrm{pr}_1(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N}) \\ + c^*_{\eta_1}(\hat{y}_1, \overline{1, \mathbf{n}-N})];\ \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N-1}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})\}),\end{aligned} \tag{9.12}$$

где $(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) \in D^*_{\mathbf{n}-N-1}$. Тогда согласно (8.8) имеем, что

$$\begin{aligned}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; j\}) = (\mathrm{pr}_2(z), (\overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) \setminus \{j\}) \in D^*_{\mathbf{n}-N-2} \\ \forall j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})\ \forall z \in \mathbb{M}^{(j)}.\end{aligned} \tag{9.13}$$

С учетом (8.9) и (9.13) получаем теперь следующее равенство:

$$\begin{aligned}\mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N-1}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}^*(\overline{1,\mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} \sup(\{ [\, \mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \mathrm{pr}_1(z), \\ \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) + c^*_j(z, \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})];\ \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N-2}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; j\})\}).\end{aligned} \tag{9.14}$$

С учетом (9.14) выбираем $\eta_2 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\hat{y}_2 \in \mathbb{M}^{(\eta_2)}$, для которых

$$\begin{aligned}\mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N-1}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) = \sup(\{ [\, \mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \mathrm{pr}_1(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) \\ + c^*_{\eta_2}(\hat{y}_2, \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})];\ \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N-2}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\})\}),\end{aligned} \tag{9.15}$$

где $(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \in D^*_{\mathbf{n}-N-2}$. Подставим (9.15) в (9.12). Тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n}-N}) = \sup(\{ [\, \mathbf{c}^*(x^{00}, \mathrm{pr}_1(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N}) + c^*_{\eta_1}(\hat{y}_1, \overline{1, \mathbf{n}-N})]; \\ \sup(\{ [\, \mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \mathrm{pr}_1(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) + c^*_{\eta_2}(\hat{y}_2, \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})]; \\ \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N-2}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\})\})\}) = \sup(\{ \max_{t \in \overline{1,2}} [\, \mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\hat{y}_t), \\ \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\, \eta_j :\ j \in \overline{1, t-1}\}) + c^*_{\eta_t}(\hat{y}_t, \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\, \eta_j :\ j \in \overline{1, t-1}\})]; \\ \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N-2}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\})\})\end{aligned} \tag{9.16}$$

(при $\mathbf{n} = N+2$ из (9.16) непосредственно следует оптимальность УП $((\eta_t)_{t \in \overline{1,2}}, (\hat{y}_t)_{t \in \overline{0,2}})$ как ДР $(\mathcal{M}_2, x^{00})$-задачи). В общем случае $N+2 \leqslant \mathbf{n}$ процедуры выбора, подобные (9.12), (9.15) следует продолжать вплоть до исчерпания $\overline{1, \mathbf{n}-N}$. В итоге будут построены кортежи

$$\eta \overset{\triangle}{=} (\eta_t)_{t \in \overline{1,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{A}_2,\ (\hat{y}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\eta[x^{00}], \tag{9.17}$$

для которых $\mathfrak{C}^*_\eta[(\hat{y}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}}] = \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n}-N}) = \tilde{V}^*[x^{00}]$ (см. (8.11)). Поскольку (см. (5.6), (9.17)) $(\eta, (\hat{y}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[x^{00}]$, установлено, что

$$(\eta, (\hat{y}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in (\mathrm{sol})^*[x^{00}]; \tag{9.18}$$

см. (5.13). Теперь получили, что (см. (9.1), (9.8), (9.9), (9.18))

$$x^0 \in X^0_{\mathrm{opt}}, \quad (\xi, (y_t)_{t \in \overline{0,N}}) \in (\mathrm{sol})^\natural[x^0], \quad (\eta, (\hat{y}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in (\mathrm{sol})^*[x^{00}].$$

В силу следствия 6.2 имеем теперь (см. предложения 6.3 и 7.3), что

$$(\xi \Diamond \eta, (y_t)_{t \in \overline{0,N}} \Box (\hat{y}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x^0] :\ \mathfrak{C}_{\xi \Diamond \eta}[(y_t)_{t \in \overline{0,N}} \Box (\hat{y}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}}] = V^\natural[x^0] = \tilde{V}[x^0],$$

а потому согласно (4.18) $(\xi \Diamond \eta, (y_t)_{t \in \overline{0,N}} \Box (\hat{y}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in (\mathrm{sol})[x^0]$. Тогда в силу (4.23) и (9.1)

$$(\xi \Diamond \eta, (y_t)_{t \in \overline{0,N}} \Box (\hat{y}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}}, x^0) \in \mathbf{SOL}, \tag{9.19}$$

чем и завершается построение оптимального МП. Используемая здесь операция склеивания соответствует этапу 9; тем самым реализация всей схемы 1–9 завершена.

§ 10. Применение оптимального композиционного решения в задаче маршрутизации с ресурсными ограничениями

Вернемся к постановке раздела 4 в связи с практически интересной задачей о выполнимости системы циклов при ограниченных ресурсах на каждый цикл. Итак, фиксируем число $\mathbf{d} \in \mathbb{R}_+$ в качестве допуска на затраты при выполнении каждого цикла работ (см. (2.3), (2.4)); можно считать, что именно такая стоимость может компенсироваться на каждом этапе при исполнении упомянутых работ.

Итак, мы полагаем заданным кортеж (4.14) функций стоимости и используем определения раздела 4, относящиеся к уже рассмотренной экстремальной задаче. Полагаем сейчас, что функция $\bar{f}$ тождественно равна нулю: $\bar{f}(x) = 0 \ \forall x \in \bar{\mathbf{M}}$. Требуется найти МП $(\gamma, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{D}$ со свойством

$$\bar{\mathbf{c}}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + \bar{c}_{\gamma(t)}(z_t, \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})) \leqslant \mathbf{d} \quad \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}}. \tag{10.1}$$

Легко видеть, что (в нашем случае нулевой функции $\bar{f}$) МП $(\gamma, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{D}$ обладает свойством (10.1) тогда и только тогда, когда (см. (4.15)) $\mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \leqslant \mathbf{d}$. Как следствие получаем очевидное положение.

П р е д л о ж е н и е 10.1. *Задача о выполнимости условий* (10.1) *на множестве* $\mathbf{D}$ *разрешима тогда и только тогда, когда* $\mathbb{V} \leqslant \mathbf{d}$. *Если последнее неравенство выполнено, то оптимальный МП* (9.19) *гарантирует соблюдение всех неравенств* (10.1)*: при* $x = x^0$, $\gamma = \xi\Diamond\eta$ *и*

$$(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} = (y_t)_{t\in\overline{0,N}}\Box(\hat{y}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}$$

триплет $(\gamma, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, x)$ *есть МП, обеспечивающий выполнение* (10.1).

Таким образом, конструкция разделов 8, 9 позволяет получить исчерпывающий ответ на вопрос о разрешимости (10.1), а, при положительном ответе на данный вопрос, доставляет (см. (9.19)) конкретный МП, реализующий (10.1).

Финансирование. Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Динамическое программирование в задаче маршрутизации: декомпозиционный вариант // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 137. С. 95–124. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-137-95-124
2. Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Экстремальная двухэтапная задача маршрутизации и процедуры на основе динамического программирования // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28. № 2. С. 215–248. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-2-215-248
3. Петунин А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Оптимальная маршрутизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы. Екатеринбург: УрФУ, 2020.
4. Ченцов А. Г., Ченцов А. А. Динамическое программирование и вопросы разрешимости задачи маршрутизации «на узкие места» с ресурсными ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 569–592. https://doi.org/10.35634/vm220406
5. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 9. С. 3–33. http://mi.mathnet.ru/at6414
6. Gutin G., Punnen A. P. The traveling salesman problem and its variations. New York: Springer, 2007. https://doi.org/10.1007/b101971

7. Cook W. J. In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation. Princeton: Princeton University Press, 2012. https://zbmath.org/?q=an:1236.00007
8. Гимади Э. Х., Хачай М. Ю. Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016.
9. Сергеев С. И. Алгоритмы решения минимаксной задачи коммивояжера. I. Подход на основе динамического программирования // Автоматика и телемеханика. 1995. Вып. 7. С. 144–150. http://mi.mathnet.ru/at3684
10. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
11. Хелд М., Карп Р. М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
12. Ченцов А. Г., Ченцов А. А. Маршрутизация перемещений при динамических ограничениях: задача «на узкие места» // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 121–140. https://doi.org/10.20537/vm160110
13. Ченцов А. Г., Ченцов А. А., Сесекин А. Н. Динамическое программирование в обобщенной задаче «на узкие места» и оптимизация точки старта // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 3. С. 348–363. https://doi.org/10.20537/vm180306
14. Ченцов А. Г., Ченцов А. А., Сесекин А. Н. Задачи маршрутизации перемещений с неаддитивным агрегированием затрат. М.: Ленанд, 2021.
15. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
16. Дьёдонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
17. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2002.
18. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
19. Ченцов А. Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2008.
20. Lawler E. L. Efficient implementation of dynamic programming algorithms for sequencing problems. Report: BW 106/79. Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum, 1979.
21. Ченцов А. Г., Ченцов А. А. К вопросу о нахождении значения маршрутной задачи с ограничениями // Проблеми керування та інформатики. 2016. № 1. С. 41–54. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29236757

Поступила в редакцию 20.03.2023

Принята к публикации 30.04.2023

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6568-0703
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Цитирование: А. Г. Ченцов. Задача маршрутизации «на узкие места» с системой первоочередных заданий // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С. 156–186.

A. G. Chentsov
A bottleneck routing problem with a system of priority tasks

Keywords: dynamic programming, route, precedence conditions.

MSC2020: 49L20, 90C39

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-09

We consider a minimax routing problem related to visiting megacities under precedence conditions and cost functions with task list dependence. It is supposed that some megacity system requiring visiting above all is selected. For solving, an approach with decomposition into a set of two minimax routing problems is proposed. A two-step widely understood dynamic programming procedure realizing an optimal composition solution is constructed. The above-mentioned optimality is established by theoretical methods. Application of the results obtained is possible under investigation of multi-stage processes connected with regular allocation of resources. Another variant of application concerns the particular case of one-element megacities (i. e., cities) and may be related to the issues of aviation logistics under organization of flights using one tool (airplane or helicopter) under system of tasks on the realization of passing cargo transportation with prioritization of visits realized above all.

Funding. The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2023-913).

REFERENCES

1. Chentsov A. G., Chentsov P. A. Dynamic programming in the routing problem: decomposition variant, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 95–124 (in Russian). https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-137-95-124
2. Chentsov A. G., Chentsov P. A. An extremal two-stage routing problem and procedures based on dynamic programming, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 215–248 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-2-215-248
3. Petunin A. A., Chentsov A. G., Chentsov P. A. *Optimal'naya marshrutizatsiya instrumenta mashin figurnoi listovoi rezki s chislovym programmnym upravleniem. Matematicheskie modeli i algoritmy* (Optimal tool routing on CNC sheet cutting machines. Mathematical models and algorithms), Yekaterinburg: Ural Federal University, 2020.
4. Chentsov A. G., Chentsov A. A. Dynamic programming and questions of solvability of route bottleneck problem with resource constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 4, pp. 569–592 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220406
5. Melamed I. I., Sergeev S. I., Sigal I. Kh. The traveling salesman problem. I: Theoretical issues, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173. https://zbmath.org/?q=an:0705.90070
6. Gutin G., Punnen A. P. *The traveling salesman problem and its variations*, New York: Springer, 2007. https://doi.org/10.1007/b101971
7. Cook W. J. *In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation*, Princeton: Princeton University Press, 2012. https://zbmath.org/?q=an:1236.00007
8. Gimadi E. Kh., Khachay M. Yu. *Ekstremal'nye zadachi na mnozhestvakh perestanovok* (Extreme problems on sets of permutations), Yekaterinburg: UMC UPI, 2016.
9. Sergeev S. I. Algorithms for the minimax problem of the traveling salesman. I: An approach based on dynamic programming, *Automation and Remote Control*, 1995, vol. 56, no. 7, pp. 1027–1032. https://zbmath.org/?q=an:0917.90252
10. Bellman R. Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem, *Journal of the ACM*, 1962, vol. 9, issue 1, pp. 61–63. https://doi.org/10.1145/321105.321111

11. Held M., Karp R. M. A dynamic programming approach to sequencing problems, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1962, vol. 10, issue 1, pp. 196–210. https://doi.org/10.1137/0110015
12. Chentsov A. G., Chentsov A. A. Routing of displacements with dynamic constraints: “bottleneck problem”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 121–140 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160110
13. Chentsov A. G., Chentsov A. A., Sesekin A. N. Dynamic programming in the generalized bottleneck problem and the start point optimization, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 3, pp. 348–363. https://doi.org/10.20537/vm180306
14. Chentsov A. G., Chentsov A. A., Sesekin A. N. *Zadachi marshrutizatsii peremeshchenii s neadditivnym agregirovaniem zatrat* (Routing problems with non-additive cost aggregation), Moscow: LENAND, 2021.
15. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1967.
16. Dieudonné J. A. *Foundations of modern analysis*, New York: Academic Press, 1960.
17. Cormen T. H., Leizerson C. E., Rivest R. L. *Introduction to algorithms*, Cambridge: MIT Press, 1990.
18. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, Academic Press, 1972.
19. Chentsov A. G. *Ekstremal’nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadanii: voprosy teorii* (Extreme tasks of routing and distribution of tasks: theory questions), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, Institute of Computer Science, 2008.
20. Lawler E. L. Efficient implementation of dynamic programming algorithms for sequencing problems. Report BW106, Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum, 1979.
21. Chentsov A. G., Chentsov A. A. On the question of finding the value of routing problem with constraints, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2016, vol. 48, issue 2, pp. 11–27. https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v48.i2.30

Received 20.03.2023

Accepted 30.04.2023

Aleksandr Georgievich Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6568-0703
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Citation: A. G. Chentsov. A bottleneck routing problem with a system of priority tasks, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 61, pp. 156–186.