СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ГАУССА — ЭВЕРХАРТА И LOBBIE

Д. Л. Басхаев
Томский государственный университет

В работе представлен сравнительный анализ эффективности методов численного интегрирования Гаусса — Эверхарта и Lobbie в условиях моделирования орбитального движения астероидов. Исследовалась возмущенная и невозмущенная задача двух тел. Кроме того, проанализировано поведение методов при решении смешанных систем дифференциальных уравнений. В результате выявлена хорошая пригодность обоих методов для решения задач астероидной динамики. Однако более универсальным и эффективным является интегратор Lobbie.

COMPARATIVE ANALYSIS OF NUMERICAL INTEGRATION METHODS OF GAUSS — EVERHART AND LOBBIE

D. L. Baskhaev
Tomsk State University

The paper presents a comparative analysis of the numerical integration methods of Gauss — Everhart and Lobbie in the conditions of simulating the orbital motion of asteroids. The perturbed and unperturbed two-body problem was studied. The behavior of the methods in solving mixed systems of differential equations was also analyzed. As a result, the good suitability of both methods for solving the asteroid dynamics problems was revealed. However, the Lobbie integrator is more versatile and efficient.

Введение

Для решения большинства задач орбитальной динамики необходимо решать дифференциальные уравнения (ДУ), которые невозможно проинтегрировать аналитически. Чтобы получить результат, зачастую прибегают к их численному решению. Уже разработано множество методов, однако есть риск, что их использование будет нерентабельным, и результаты будут недостаточно точны либо же вовсе окажутся недостоверными. Поэтому важно разрабатывать высокоточные и эффективные численные методы интегрирования, которые позволяли бы исследовать интересующие нас задачи.

Данное исследование посвящено сравнительному анализу двух методов численного интегрирования ДУ: интегратору Гаусса — Эверхарта [1] и коллокационному интегратору Lobbie [2]. Моделировалось орбитальное движение астероидов с различными эксцентриситетами в рамках возмущенной и невозмущенной задачи двух тел, и изучалась эффективность данных алгоритмов. Была также изучена новая возможность интегратора Lobbie решать смешанные системы ДУ без перевода их к уравнениям первого порядка.

Описание методики

Объектами исследования в работе являлись интегратор Гаусса — Эверхарта и новый коллокационный интегратор Lobbie, их прототипом стал широко известный интегратор Эверхарта [3]. Но в интеграторе Lobbie в отличие от интегратора Гаусса — Эверхарта используются не канонические полиномы, а полиномы Ньютона. В Lobbie также задействованы разбиения гауссовых квадратур Лобатто, что является причиной наличия только четных порядков и появления геометрических свойств [4]. Более подробно с интеграторами можно ознакомиться в [1, 2].

Для моделирования орбитального движения с сайта Центра Малых Планет были выбраны орбиты астероидов с различными эксцентриситетами: (4964) Kourovka, (3753) Cruithne, (3200) Phaethon. В табл. 1 перечислены их орбитальные характеристики. Данные получены на момент времени t.

Таблица 1. Орбитальные характеристики астероидов

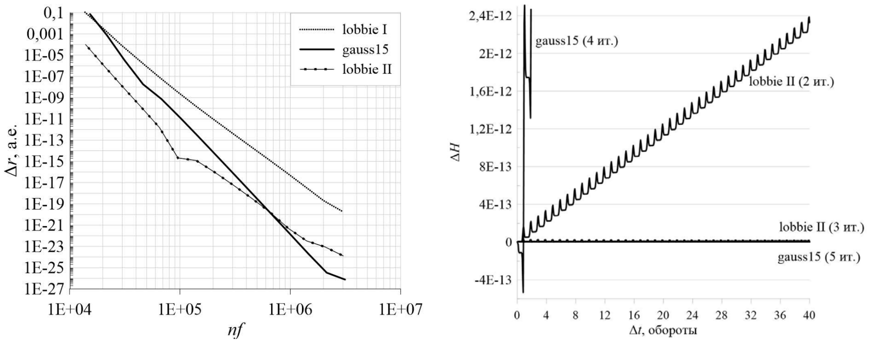
Объекты	Phaethon	Cruithne	Kourovka
a, а. е.	1.271348	0.997716	2.2624391
e	0.889789	0.514934	0.1233911
$i,^\circ$	22.2571	19.80691	4.91924
$\Omega,^\circ$	265.22	126.22	167.40334
$\omega,^\circ$	322.1801	43.84422	204.864
$M,^\circ$	143.9764	66.34177	66.341774
T, гг	1.43	1	3.4
t, JD	2459400.5	2459400.5	2459400.5

В качестве реализации интеграторов были взяты их схемы 10-го порядка. Моделирование велось на интервале 100 орбитальных периодов. Для интегратора Lobbie имеются две реализации, соответствующие уравнениям первого (lobbie(I)) и второго (lobbie(II)) порядков. В качестве изменяемого параметра выступала локальная точность на шаге, которая варьировалась от 10^{-2} до 10^{-20}. Итогом анализа является график «точность — быстродействие», в котором оси абсцисс соответствуют значения параметра быстродействия nf — число обращений к процедуре правых частей, а оси ординат — точности интегрирования Δr. Оценка точности интегрирования определялась путем сравнения с эталонными орбитами, которые были посчитаны схемами более высоких порядков.

Изложение результатов

В качестве примера на рис. 1*а* представлены результаты для астероида Kourovka. На графике видно, что интегратор Lobbie обладает преимуществом в силу возможности интегрировать уравнения второго порядка. Но при высокой точности он уступает интегратору Гаусса — Эверхарта. В диапазоне значений от 10^{-2} до 10^{-15} а. е. явное преимущество у схемы Lobbie второго порядка.

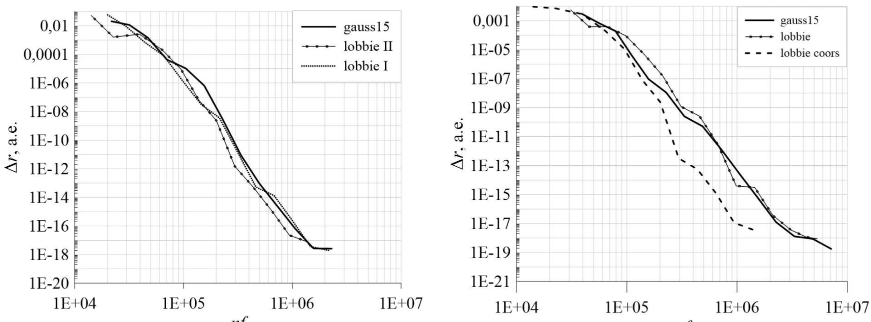
Особенностью данного моделирования является использование в обоих интеграторах трех итераций для вычисления нелинейных уравнений на шаге. При таком значении в схемах интегрирования могут проявляться геометрические свойства [4]. Это можно явно наблюдать при исследовании поведения интегралов задачи двух тел. На рис. 1*б* приведены результаты отклонения интеграла энергии от начального значения. Эксперимент проводился с постоянным шагом $h = T/16$ для интеграторов 8-го порядка. Наглядно видно, что при использовании в Lobbie двух итераций идет линейное накопление ошибки, а при трех итерациях ошибка ведет себя устойчиво. Для интегратора Гаусса — Эверхарта геометрические свойства проявляются при использовании 5 итераций. Это свойство позволяет удерживать решение вблизи его орбиты и обеспечивает в данном случае сохранность значений периода и большой полуоси [4]. Данное исследование показывает, что итерационная сходимость в схеме Lobbie лучше.



а *б*

Рис. 1. График «точность — быстродействие» интеграторов Lobbie (I,II) и Гаусса — Эверхарта для астероида Kourovka ($e = 0.12$) на примере решения задачи двух тел (*а*), отклонение в вычисляемой энергии H для астероида Kourovka ($e = 0.12$) (*б*)

Следующим этапом является исследование поведения интеграторов в рамках возмущенной задачи двух тел. Результаты исследования представлены на рис. 2*а*.



а *б*

Рис. 2. График «точность — быстродействие» интеграторов Lobbie (I,II) и Гаусса — Эверхарта для астероида Kourovka ($e = 0.12$) на примере решения возмущенной задачи двух тел (*а*) и на примере решения смешанных систем (*б*)

Заметно явное ухудшение эффективности всех трех схем. Графики стали менее гладкими, угол наклона уменьшился, что тоже говорит о снижении эффективности. Явного преимущества какого-либо интегратора не выявлено. Все три ломаные линии показывают приблизительно одинаковую эффективность, находятся вблизи друг друга и достигают своего предела точности при 10^{-18}—10^{-19} а. е. Такое поведение обусловлено влиянием ошибок, накапливаемых в координатах планет. Значения этих величин считывались из фонда координат DE431. Ограничения в нашем исследовании обусловлены двойной точностью фонда.

При исследовании решения смешанных систем было обнаружено, что, несмотря на результаты работы [2], ожидаемой повышенной эффективности интегратора Lobbie не удалось получить (графики lobbie и gauss15). Пониженная эффективность обуславливается самим видом добавочных уравнений в вариациях для параметра *MEGNO*. Вклад от вычисления добавочных переменных стал существенным, и шаг интегрирования начал быстро дробиться. Для решения этой проблемы были решено определять шаг только по координатам. Из рис. 2*б* (lobbie coor) можно заметить, что удалось повысить быстродействие более чем в два раза.

Заключение

Таким образом, в ходе данного исследования изучена эффективность и поведение интеграторов Гаусса — Эверхарта и Lobbie. Были получены следующие результаты:

1. Обнаружено значительное преимущество интегратора Lobbie для решения задачи двух тел в силу возможности интегрировать уравнения второго порядка.

2. Выявлено наличие геометрических свойств в обоих интеграторах, а также условия их возникновения. Более эффективным в числе итераций является интегратор Lobbie.

3. Не было обнаружено существенного преимущества какого-либо из интеграторов при решении возмущенной задачи двух тел.

4. Интегратор Lobbie показал более высокую эффективность в решении смешанных систем ДУ нежели интегратор Гаусса — Эверхарта.

Обобщая, можно сделать вывод о том, что оба интегратора хорошо подходят для решения задач астероидной динамики. Однако более универсальным и эффективным является интегратор Lobbie.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-72-10022, `https://rscf.ru/project/19-72-10022/`

Библиографические ссылки

[1] *Avdushev V. A.* Интегратор Гаусса-Эверхарта // Вычислительные технологии. — 2010. — Vol. 15. — P. 31—46.

[2] *Avdushev V. A.* Коллокационный интегратор Lobbie в задачах орбитальной динамики // Астрономический вестник. — 2021. — Vol. 56. — P. 36—46.

[3] *Everhart E.* Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits // Celest. Mech. — 1974. — Vol. 10. — P. 35—55.

[4] *Hairer E., Lubich C., Wanner G.* Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations // Springer. — 2002. — P. 659.