Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Институт естественных наук
и математики

В. Г. ПИМЕНОВ
А. В. ЛЕКОМЦЕВ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

В. Г. Пименов, А. В. Лекомцев

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета в качестве учебного пособия
для студентов вуза, обучающихся по направлениям подготовки
03.04.02 «Физика», 28.04.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2023

УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73-1
П32

Под общей редакцией
А. Ю. Коврижных

Рецензенты:
кафедра высшей математики
Уральского государственного лесотехнического университета
(заведующий кафедрой кандидат физико-математических наук,
доцент *А. Ю. Вдовин*);
А. Б. Ложников, кандидат физико-математических наук, доцент
(Институт математики и механики УрО РАН)

Пименов, В. Г.

П32 Современные проблемы математики. Моделирование динамических процессов : учебное пособие / В. Г. Пименов, А. В. Лекомцев ; под общ. ред. А. Ю. Коврижных ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский федеральный университет. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2023. — 70 с. : ил. — Библиогр.: с. 68–69. — 30 экз. — ISBN 978-5-7996-3646-3. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-7996-3646-3

В учебном пособии рассмотрены понятия предельных циклов, бифуркаций, орбитальной устойчивости, аттракторов, в том числе и многомерных. Кратко приводятся основные понятия теории функционально-дифференциальных уравнений и уравнений с дробными производными, особенно численные методы их решения.

Рекомендуется студентам, обучающимся по программе магистратуры, для самостоятельной работы во время изучения дисциплины «Современные проблемы математики. Моделирование динамических процессов».

УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73-1

ISBN 978-5-7996-3646-3

Оглавление

Предисловие

Учебное пособие подготовлено на основе лекций по дисциплине "Современные проблемы математики", которые читались в последние годы для студентов магистратуры, обучающихся по направлениям подготовки "Физика", "Инноватика", "Нанотехнологии и микросистемная техника". Очень общее название дисциплины потребовало выбрать из всего многообразия современных направлений математики несколько наиболее актуальных, с точки зрения авторов. Выбор материала обусловлен научными интересами авторов, работающих на кафедре вычислительной математики и компьютерных наук, где традиционно большое внимание уделялось изучению математических моделей динамических процессов. И одним из главных инструментов изучения, особенно в последние годы, является применение широкомасштабного компьютерного эксперимента; весь материал пособия направлен на помощь в проведении таких экспериментов. По материалам данного курса имеются научные монографии и статьи, предназначенные для профессионалов-математиков, и отсутствует учебная литература для таких возможных прикладных пользователей, как физики-магистранты, или для студентов, магистрантов и аспирантов, занимающихся математическим моделированием в различных прикладных областях, включая биологию и медицину. Надеемся, что пособие хотя бы частично восполнит этот пробел.

Пособие начинается с изложения основного тезиса современного математического моделирования "модель — алгоритм — программа" и связанных с процессом моделирования видов погрешности: неустранимой, погрешности алгоритма и вычислительной. Как показывает опыт проведения различных компьютерных экспериментов, без четкого понимания влияния этих видов погрешностей на результат невозможно адекватное изучение сложных математических моделей.

Основной задачей в теории динамических систем является изучение предельных положений таких систем — аттракторов. Приводятся примеры дискретных систем, в которых возникают аттракторы сложной структуры, вплоть до хаотических. Причиной этого явления служит сочетание в системе двух факторов — структурной (глобальной) устойчивости и локальной неустойчивости.

Центральная задача курса — изучение понятия "предельные циклы" для нелинейных дифференциальных уравнений. Предельные циклы в настоящее время широко применяются в математическом моделировании различных явлений. Однако традиционной математики, изучаемой по программе бакалавриата, основанной на идее линеаризации, недостаточно для изучения данного явления. В пособии излагаются сценарии возникновения предельных циклов — мягкие и жесткие бифуркации, а также понятие "орбитальная устойчивость", необходимое для исследования предельных циклов. На примере конкретного уравнения Ван-дер-Поля описываются основные методики нахождения предельных циклов: метод отображений Пуанкаре, метод установившихся решений, метод малого параметра.

Далее с общих позиций приводятся основные факты из теории диссипативных систем произвольной размерности. Показано, что в системах размерности три и выше могут возникать не только аттракторы целой размерности (устойчивые особые точки, устойчивые предельные циклы, устойчивые инвариантные торы), но и так называемые странные аттракторы, пример которых приведен для системы Лоренца. Проводится классификация этих видов аттракторов в зависимости от размерности и количественных показателей: энтропии Колмогорова–Синая, показателей Ляпунова. Для описания размерности странных аттракторов вводится понятие дробной (фрактальной) размерности, приводится связь фрактальной размерности с показателями Ляпунова. Тот же тезис, что и для дискретных систем, раскрывается для непрерывных нелинейных систем размерности три и выше: сочетание в системе двух факторов – структурной (глобальной) устойчивости и локальной неустойчивости. Дается понятие универсальности Фейгенбаума.

В пособии приводятся понятия о функционально-дифференциальных уравнениях, а также примеры уравнений с запаздываниями различных типов, основные моменты классификации, основные конструкции численных алгоритмов.

Последний раздел теории посвящен самому бурно развивающемуся в настоящее время направлению — дробным дифференциальным уравнениям.

В пособии также приводится описание заданий для проведения численных экспериментов на практических работах. По нашему глубокому убеждению, в современной математике, в силу сложности моделей, без численного эксперимента невозможно решить большинство вопросов. Работы строятся вокруг исследования предельных циклов для нелинейных систем или уравнений второго порядка. Все объекты содержат параметр, подбирая который с помощью численного эксперимента, нужно найти предельный цикл, точки бифуркации возникновения предельного цикла, исследовать предельный цикл на орбитальную устойчивость с помощью критерия Пуанкаре, определить влияние на систему эффекта запаздывания.

1. Модель — алгоритм — программа

Математика, как самая традиционная наука, всегда играла роль главного инструмента в других науках. Законом становилось положение, которое, отвлекаясь от несущественных факторов, связывало главное в данном явлении в виде математической связи. Роль математики при этом была двоякой в формулировании данных связей (этот процесс называется математическим моделированием) и исследовании сформулированных законов-связей с помощью аппарата математики.

Однако за последние 50 лет роль математики несколько поменялась в связи с развитием и активным применением дополнительного аппарата и возможностей вычислительной техники.

Предположим, что имеется объект любой природы. Его требуется исследовать, выявив закономерности и характеристики. С помощью конкретной науки, изучающей этот объект, составляется математическая модель, в которой отражаются самые существенные характеристики объекта. Модель содержит связи между характеристиками, которые, как правило, выражаются математическими уравнениями. Чтобы установить закономерности, необходимо исследовать математическую модель, например, решить уравнения.

В математике методы решения разделяют на аналитические, численные и качественные. Традиционно с методами математики отождествляют аналитические методы, именно их изучают в первую очередь на разных стадиях обучения, в том числе и в классических университетских курсах по математике. Они имеют громадную историю, можно сказать, что именно с их помощью были созданы современная наука и техника.

Дальнейшее развитие математического моделирования связано с учетом более тонких факторов, делающих модель более адекватной явлению. Но чем адекватнее составлена математическая модель, тем она сложнее, и часто нельзя напрямую использовать аналитические методы решения.

Кроме аналитических методов в настоящее время все активнее применяют численные методы, алгоритмы, основанные на аппроксимации исходной математической модели другими моделями, реализуемыми в виде вычислительных операций, порой очень громоздких. Следует отметить, что для правильной картины изучения математической модели численные методы должны быть дополнены качественными методами, которые составляют значительную часть математики. Громоздкость численных расчетов приводит к необходимости использования вычислительных устройств (в широком смысле этого слова), и именно развитию компьютеров и их программного обеспечения обязано большинство современных достижений в науке и технике. Вслед за академиком А. А. Самарским отметим, что основу математического моделирования составляет триада *модель — алгоритм — программа.*

На выходе получаем некоторую характеристику изучаемого объекта, которую условно будем считать числом. Но эта характеристика в результате обработки каждым элементом триады в той или иной степени огрубляется, вносится погрешность. Задача состоит в изучении роста этой погрешности на каждой стадии.

Обозначим через $A_{\text{неуст}}$ погрешность, которая вносится на стадии математического моделирования, она называется *неустранимой погрешностью.*

Пример 1.1. Физический маятник, возможно с трением, описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + a\sin\varphi + b\dot{\varphi} = f(t), \\ \varphi(0) = \alpha, \\ \dot{\varphi}(0) = \beta, \end{cases}$$

где φ – угол отклонения маятника от положения равновесия.

Начальные условия α, β, а также коэффициенты уравнения a и b должны быть измерены приборами, которые имеют определенную точность. Точность измерения и определяет неустранимую погрешность.

Обозначим через $A_{\text{метода}}$ погрешность, которая вносится на стадии составления численного алгоритма, она называется *погрешностью метода.*

Например, приведенное уравнение физического маятника аналитически не решается. Можно, конечно, заменить $\sin\varphi$ на φ, тогда получим линейное уравнение второго порядка (математический маятник), решение которого выписывается в элементарных функциях, но такое упрощение модели можно сделать только при малых φ. А в теории численных методов разработаны эффективные методы решения дифференциальных уравнений, подобных уравнению физического маятника. К их числу относятся метод Эйлера, методы Рунге–Кутты, методы Адамса и др. Подбирая методы и их параметры, прежде всего шаг дискретизации, можно получить решение с требуемой погрешностью метода. Изучение разнообразия таких методов и способов оценки их погрешностей составляет содержание вычислительной математики.

Обозначим через $A_{\text{выч}}$ погрешность, которую вносит вычислительное устройство, она называется *вычислительной погрешностью.*

Так, подавляющее большинство численных алгоритмов, в том числе и упомянутые методы, требуют громадных вычислений для достижения хорошей точности, поэтому необходимо эффективно работающее вычислительное устройство. Но компьютер представляет информацию дискретно, поэтому любые действия с вещественными числами, наиболее распространенными в моделировании, вносят вычислительную погрешность. По этой причине число операций нужно по возможности оптимизировать, оптимизировать нужно также и вычислительные средства.

Все сказанное можно изобразить в виде схемы:

$$\begin{tikzcd}
 & A_{\text{неуст}} \arrow[d] & A_{\text{метода}} \arrow[d] & A_{\text{выч}} \arrow[d] & \\
\text{Объект} \arrow[r] & \boxed{\text{Модель}} \arrow[r] & \boxed{\text{Метод}} \arrow[r] & \boxed{\text{Выч. устройство}} \arrow[r] & \text{Число}
\end{tikzcd}$$

Формула полной погрешности

$$A_{\text{пол}} = \text{А}_{\text{неуст}} + A_{\text{метода}} + A_{\text{выч}}.$$

Считается, что идеальная ситуация наблюдается тогда, когда все три вида погрешности примерно равны или по крайней мере имеют один порядок. Например, нет смысла применять очень точные алгоритмы и считать на вычислительном устройстве с большой степенью точности, если имеется большая неустранимая погрешность.

Развитие математических методов в смысле привлечения дополнительного к традиционным аналитическим методам аппарата численных методов привело к обнаружению новых качественных математических явлений, некоторые из них мы рассмотрим в нашем курсе. Основную часть курса будет составлять исследование динамических (изменяющихся) объектов и их устойчивых (статических) предельных положений – аттракторов. Зачастую структура предельных положений оказывается сложной природы даже в самых простых ситуациях.

2. Примеры аттракторов сложной природы в дискретных системах

Рассмотрим следующий простой пример.

Пример 2.1. Пусть имеется последовательность чисел $x_k \in [0, 1]$, заданных соотношением

$$x_{k+1} = \{10x_k\}, \ k = 0, 1, \ldots .$$

Здесь $\{10x\}$ означает дробную часть числа x. Поведение последовательности зависит от начальной точки x_0. Рассмотрим несколько случаев:

1. Пусть $x_0 = 0.34$, тогда $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = \ldots = 0$. Последовательность сходится к неподвижной точке покоя $\hat{x} = 0$.

2. Пусть $x_0 = \frac{1}{3} = 0.3(3)$, тогда $x_1 = 0.3(3)$, $x_2 = x_3 = \ldots = 0.3(3)$. Последовательность сходится к неподвижной точке покоя $\hat{x} = 0.3(3)$.

3. Пусть $x_0 = 0.34(34)$, тогда $x_1 = 0.43(43)$, $x_2 = 0.34(34)$, $x_3 = 0.43(43)$, $x_4 = 0.34(34), \ldots$. Последовательность не имеет предела, но имеет два частичных предела. Наблюдаются колебания с периодом 2. Применяется терминология — цикл периода 2.

4. Пусть x_0 — число иррациональное, например $x_0 = \pi - 3 = 0.141592...$, тогда последовательность не только не имеет точек покоя, но и циклов любого периода. Множество, к которому стремится последовательность, имеет хаотическую природу.

Таким образом, предельные положения (аттракторы) даже в таком примере могут иметь сложную структуру. Причина этого явления состоит в глобальной (структурной) устойчивости (отрезок $[0, 1]$ отображается в себя) и локальной неустойчивости при некоторых начальных точках.

Рассмотрим содержательный пример, где наблюдается то же явление возникновения аттракторов сложной природы.

Пример 2.2 (Дискретное логистическое уравнение)**.** Это уравнение широко распространено в моделировании различных явлений. Поясним его применение на моделях теории популяций.

Пусть количество особей в популяции в дискретный момент $t = 0, 1, \dots$ обозначено N_t. Простейший закон изменения количества особей — линейный:

$$N_{t+1} = \alpha N_t,\ \alpha > 0.$$

Линейными (дифференциальными и разностными) законами также описываются практически все простейшие модели в физике, например, явление радиоактивного распада, в экономике — закон прибавочной стоимости, и во многих других моделях. Решение этого уравнения: рост N_t до бесконечности при $\alpha > 1$ и убывание в асимптотике до 0 при $\alpha < 1$.

Однако более точным является логистический закон вида

$$N_{t+1} = \alpha N_t - \beta N_t^2,$$

который учитывает борьбу за пищу между особями при подходе количества особей к границам экологической ниши $\hat{N} = \frac{\alpha}{\beta}$. Неудобство исследования этого уравнения состоит в наличии двух параметров. Сведем к одному параметру, проведя нормировку с помощью введения новой переменной $x_t = N_t / \hat{N}$.

Тогда уравнение примет вид

$$x_{t+1} = \alpha x_t (1 - x_t),\ \alpha > 0,$$

при этом $x \in [0, 1]$. Отметим, что, кроме уравнения, для однозначности решения нужно задать начальное условие $x_0 \in [0, 1]$.

Попытаемся исследовать поведение решений этого уравнения.

Сначала определим условие, при котором x_t не превосходит 1, так как в противном случае не выполняется условие нормировки. Правая часть уравнения является параболой по аргументу x_t с ветвями, направленными вниз, с вершиной в точке $x_t = \frac{1}{2}$, которая является точкой максимума. Значение параболы в точке максимума равно $\frac{\alpha}{4}$. Поэтому мы должны потребовать $\frac{\alpha}{4} \leqslant 1$.

Итак, общее ограничение на параметр $0 \leqslant \alpha \leqslant 4$.

Найдем точки покоя, то есть такие точки, где $x_{t+1} = x_t$. Для отображений вида $x_{t+1} = \varphi(x_t)$ они еще называются неподвижными точками функции $\varphi(x)$, то есть такими точками, где $\varphi(x) = x$.

В нашем случае имеем $\varphi(x) = \alpha x(1-x)$, откуда уравнение для неподвижных точек $\alpha x(1-x) = x$ дает две точки: $\xi^1 = 0$ и $\xi^2 = \frac{\alpha-1}{\alpha}$. Вторая точка существует только при $\alpha \geqslant 1$, так как в противном случае координата точки отрицательная.

Исследуем точки на устойчивость, пользуясь достаточным условием устойчивости $|\varphi'(\xi)| < 1$.

Имеем $\varphi'(x) = \alpha - 2\alpha x$.

Подставляя точку $\xi^1 = 0$, получаем, что она устойчива при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Подставляя точку $\xi^2 = \frac{\alpha-1}{\alpha}$, получаем, что она устойчива при $1 \leqslant \alpha \leqslant 3$.

Возникает вопрос: какие устойчивые объекты наблюдаются при $3 < \alpha \leqslant 4$, ведь устойчивых точек при данных значения параметра нет?

Можно попытаться найти двухкратные неподвижные точки (циклы периода 2), то есть такие точки, где $x_{t+2} = x_t$ или $\varphi(\varphi(x)) = x$.

Подставляем нашу функцию $\varphi(x) = \alpha x(1-x)$, откуда получаем уравнение четвертой степени, два корня которого известны. Далее можно найти два других корня $\xi^{3,4}$, исследовать их на устойчивость. При $\alpha = 3$ возникает бифуркация (раздвоение), когда устойчивая точка ξ^2 переходит в $\xi^{3,4}$, при этом точка ξ^2 теряет устойчивость. При некотором значении параметра $\alpha \approx 3.45$ эти точки теряют свою устойчивость и возникают четырехкратные устойчивые неподвижные точки. В принципе данное исследование можно провести аналитически. Возникающая картина называется каскадами Фейгенбаума, и ее проще смоделировать численно на лабораторной работе в виде компьютерного эксперимента. Отметим только, что порядок в возникновении циклов сменяется хаосом, а затем наоборот.

Причина появления аттракторов сложной природы та же: структурная устойчивость и локальная неустойчивость при некоторых значениях параметра.

Возникновение аттракторов сложной природы происходит по одним и тем же законам не только в дискретных системах, но и, что гораздо важнее, в непрерывных системах, описываемых дифференциальными уравнениями. Наша цель — изучить эти закономерности.

3. Предельные циклы в дифференциальных уравнениях

Классическим описанием моделей с непрерывным временем являются дифференциальные уравнения. Наиболее важный класс — автономные системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x), \tag{3.1}$$

где независимая переменная t — время; n-мерная векторная искомая функция $x = x(t)$; правая часть $f(x)$ — непрерывная на R^n функция.

Для таких объектов классическим является исследование поведения решения вблизи точек покоя (положение равновесия) x_0, где $f(x_0) = 0$, с последующей линеаризацией системы. Однако тем самым не учитывается такой важный аттрактор, как предельный цикл.

Замкнутую траекторию решения в фазовом пространстве назовем *циклом*. При этом замкнутость понимается в смысле периодичности: цикл — траектория такого решения $x(t)$, что найдется ненулевое число ω со свойством $x(t + \omega) = x(t)$ для любого действительного t.

Пример циклов — случай центра в классификации точек покоя линейных систем второго порядка с постоянными коэффициентами. Однако для нелинейных систем характерно более сложное поведение траекторий.

Определение 3.1. Замкнутую изолированную траекторию (отличную от положения равновесия) в фазовом пространстве назовем *предельным циклом*.

Рассмотрим пример предельного цикла.

Пример 3.1.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_2 + x_1(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \\ \dot{x_2} = x_1 + x_2(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}). \end{cases} \tag{3.2}$$

Переходом к полярной системе координат $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Приведем систему (3.2) к виду

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Из второго уравнения системы (3.3) получаем, что $\varphi = t + \varphi_0$, то есть полярный угол равномерно возрастает.

Приравнивая $\dot{r}$ к нулю, получаем два положения равновесия полярного радиуса: $r = 0$ и $r = 1$; первому соответствует начало координат на фазовой плоскости (x_1, x_2), а второму – окружность единичного радиуса.

Если начальное положение r_0 полярного радиуса удовлетворяет условию $0 < r_0 < 1$, то из первого уравнения системы (3.3) получаем $\dot{r} > 0$, поэтому полярный радиус будет расти. Так как траектории автономной системы не пересекаются, то в этом случае траектория будет навиваться изнутри на единичную окружность.

Если же начальное положение r_0 полярного радиуса удовлетворяет условию $r_0 > 1$, то из первого уравнения системы (3.3) получаем $\dot{r} < 0$, поэтому полярный радиус будет убывать, а траектория будет навиваться на единичную окружность снаружи. Фазовый портрет системы приведен на рис. 1.

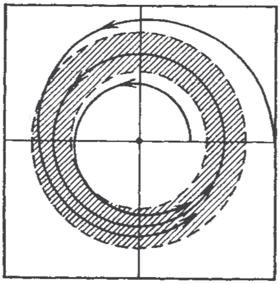


Рис. 1. Фазовый портрет [1, с. 110]

Приведем классификацию предельных циклов на фазовой плоскости (определения не претендуют на строгость). Предельные циклы, у которых другие близкие траектории неограниченно приближаются к предельному циклу, называются *аттракторами.* Предельные циклы, у которых все другие близкие траектории удаляются от предельного цикла, называются *репеллерами.* Предельные циклы, у которых с одной стороны траектории приближаются, а с другой стороны удаляются, называются *полуустойчивыми.*

Примером репеллера является система

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r-1), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

Примером полуустойчивого цикла — система

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r)^2, \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

4. Бифуркации рождения циклов

4.1. Бифуркация в широком смысле и бифуркация рождения циклов

Если поведение системы зависит от некоторого параметра, то *бифуркацией в широком смысле* называется ситуация, когда малые количественные изменения параметра вызывают качественные изменения в поведении системы. При этом параметр называется *бифуркационным.*

Рассмотрим пример линейной системы, зависящей от параметра.

Пример 4.1.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \mu x_1, \\ \dot{x_2} = -x_2. \end{cases}$$

Собственные числа этой системы $\lambda_1 = \mu$, $\lambda_2 = -1$. При $\mu < 0$ фазовый портрет системы представляет собой устойчивую особую точку типа узел, при $\mu = 0$ траектории представляют собой вертикальные прямые, при $\mu > 0$ особая точка становится неустойчивой точкой типа седло. Система при $\mu = 0$ имеет бифуркацию. При этом можно заметить (рис. 2), что изменения в поведении системы произошли плавно. В этом случае говорят, что произошла *мягкая бифуркация.*

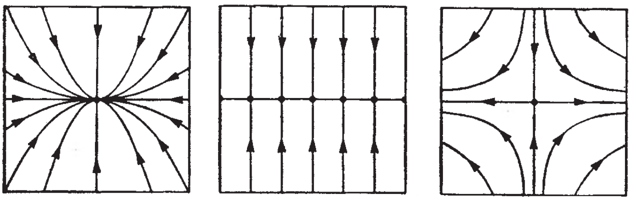


Рис. 2. Фазовые портреты [1, с. 204]

Бифуркацией в узком смысле называют ситуацию, когда из особой точки появляется предельный цикл. Эту ситуацию еще называют *бифуркацией рождения цикла.*

4.2. Пример мягкой бифуркации рождения цикла

Пример 4.2 (Андронов–Хопф)**.**

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_2 + x_1(\mu - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \\ \dot{x_2} = x_1 + x_2(\mu - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}). \end{cases} \tag{4.1}$$

В полярной системе координат система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

Из второго уравнения системы (4.2) получаем, что $\varphi = t+$ $+\varphi_0$, то есть полярный угол равномерно возрастает.

Приравнивая правую часть первого уравнения системы (4.2) к нулю, найдем положения равновесия полярного радиуса. Рассмотрим три случая:

1) $\mu < 0$. В этом случае существует одно положение равновесия: $r = 0$, причем устойчивое, что следует из отрицательности знака правой части первого уравнения системы (4.2).

2) $\mu = 0$. В этом случае также существует одно устойчивое положение равновесия: $r = 0$.

3) $\mu > 0$. В этом случае существуют два положения равновесия: неустойчивое $r = 0$ и устойчивое $r = \mu$. Последнее дает устойчивый предельный цикл.

На рис. 3 приведены фазовые портреты этих случаев.

При $\mu = 0$ произошла бифуркация рождения устойчивого цикла из особой точки, при этом возник цикл малого радиуса, то есть произошла мягкая бифуркация.

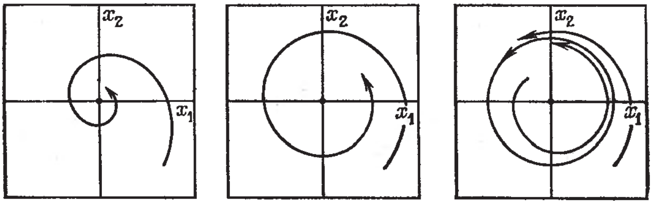


Рис. 3. Фазовые портреты [1, с. 205]

4.3. Теорема Хопфа

Рассмотрим двумерную автономную систему, зависящую от параметра

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x_1, x_2, \mu), \\ \dot{x_2} = f_2(x_1, x_2, \mu). \end{cases}$$

Условия возникновения бифуркаций рождения цикла дает следующая теорема.

Теорема 1 (Теорема Хопфа). *Пусть*

1) *при любом значении параметра μ начало координат является точкой покоя: $f_1(0, 0, \mu) = f_2(0, 0, \mu) = 0$;*
2) *при некотором значении параметра $\mu = \mu_0$ собственные числа линеаризованной в начале координат системы имеют чисто мнимые корни: $Re\lambda_1(\mu_0) = Re\lambda_2(\mu_0) = 0$;*
3) $\frac{d}{d\mu} Re\lambda(\mu) > 0$ *при* $\mu = \mu_0$;
4) *при $\mu = \mu_0$ начало координат $(0, 0)$ является устойчивой точкой покоя.*

Тогда $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации, то есть

1) *найдется число $\mu_1 < \mu_0$ такое, что при любом значении параметра μ из интервала (μ_1, μ_0) начало координат $(0, 0)$ является устойчивой точкой покоя;*
2) *найдется число $\mu_2 > \mu_0$ такое, что при любом значении параметра μ из интервала (μ_0, μ_2) начало координат $(0, 0)$ является неустойчивой точкой покоя, окруженной устойчивым предельным циклом.*

Доказательство см. в [2, с. 58].

Проверим условия выполнения теоремы для примера 4.2.

Подставляя $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ в правую часть системы (4.1), получаем $\dot{x_1} = 0$, $\dot{x_2} = 0$, то есть первое условие теоремы выполнено.

Линеаризованная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_2 + \mu x_1, \\ \dot{x_2} = x_1 + \mu x_2. \end{cases}$$

Ее собственные числа $\lambda_1 = \mu - i$, $\lambda_2 = \mu + i$, поэтому второе и третье условия теоремы также выполнены при $\mu_0 = 0$.

Для проверки устойчивости точки $(0, 0)$ при $\mu = 0$ составим функцию Ляпунова $V = x_1^2 + x_2^2$ и вычислим ее производную в силу системы: $\dot{V} = -2(x_1^2 + x_2^2)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Так как функция Ляпунова положительно определена, а ее полная производная, в силу системы, отрицательно определена, то тривиальное решение асимптотически устойчиво. В силу теоремы Хопфа точка $\mu = 0$ является точкой бифуркации.

4.4. Пример жесткой бифуркации

Рассмотрим пример системы (Хопф), заданной в полярной системе координат.

Пример 4.3.

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu + 2r^2 - r^4), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Приравнивая правую часть первого уравнения системы (4.3) к нулю, найдем положения равновесия полярного радиуса. При всех μ существует положение равновесия $r_0 = 0$, остальные положения равновесия получаем, решая биквадратное уравнение $r^4 - 2r^2 - \mu = 0$. Из последнего уравнения получаем $r^2 = 1 - \sqrt{1 + \mu}$, $r^2 = 1 + \sqrt{1 + \mu}$. Рассмотрим несколько случаев:

1) $\mu < -1$. Биквадратное уравнение действительных корней не имеет, а из анализа знака правой части первого уравнения системы (4.3) получаем, что r_0 — устойчивое положение равновесия. На рис. 4 приведено положение особой точки на оси Or в этом случае.

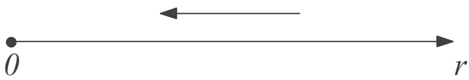


Рис. 4. Положение особой точки при $\mu < -1$

2) $\mu = -1$. Уравнение для r имеет вид $\dot{r} = -r(1-r^2)^2$, точки покоя на оси $r_0 = 0$ и $r_1 = 1$. Если $0 < r < 1$, то радиус-вектор убывает, а если $r > 1$, то радиус-вектор возрастает. Фазовый портрет имеет устойчивую особую точку $(0, 0)$ и полуустойчивый предельный цикл радиуса 1. На рис. 5 приведено положение особой точки на оси Or в этом случае.

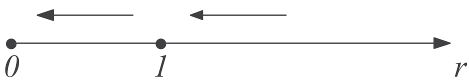


Рис. 5. Положение особой точки при $\mu = -1$

3) $-1 < \mu < 0$. Биквадратное уравнение имеет положительные действительные корни r^1 и r^2. На оси r имеются три точки покоя: $r_0 = 0$, $r_1 = \sqrt{1-\sqrt{1-\mu}}$ и $r_2 = \sqrt{1+\sqrt{1-\mu}}$. Анализ знака производной r показывает, что точки r_0 и r_2 устойчивы, а точка r_2 неустойчива. Фазовый портрет имеет устойчивую особую точку $(0, 0)$ и устойчивый и неустойчивый предельные циклы. На рис. 6 приведено положение особой точки на оси Or в этом случае. При $\mu = -1$ произошла бифуркация: возник полуустойчивый предельный цикл, который раздвоился на неустойчивый и устойчивый.

4) $\mu = 0$. Уравнение для r имеет вид $\dot{r} = r^3(2 - r^2)$, точки покоя на оси $r_0 = 0$ и $r_2 = \sqrt{2}$. Если $0 < r < r_2$, то

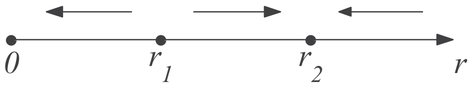


Рис. 6. Положение особой точки при $-1 < \mu < 0$

радиус-вектор возрастает, а если $r > r_2$, то радиус-вектор убывает. Фазовый портрет имеет неустойчивую особую точку $(0, 0)$ и устойчивый предельный цикл радиуса r_2. На рис. 7 приведено положение особой точки на оси Or в этом случае.

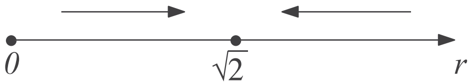


Рис. 7. Положение особой точки при $\mu = 0$

5) $\mu > 0$. Биквадратное уравнение имеет единственный положительный действительный корень $r_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1 - \mu}}$. На оси r имеются две точки покоя: неустойчивая $r_0 = 0$ и устойчивая r_2. Фазовый портрет имеет неустойчивую особую точку $(0, 0)$ и устойчивый предельный цикл. На рис. 8 приведено положение особой точки на оси Or в этом случае.

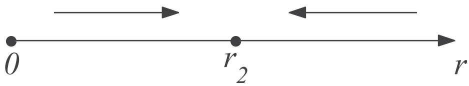


Рис. 8. Положение особой точки при $\mu > 0$

При $\mu = 0$ произошла бифуркация: неустойчивый предельный цикл радиуса r_1 слился с устойчивой особой точкой $(0, 0)$, в результате чего цикл исчез, а точка потеряла устойчивость.

Проследим изменения в поведении некоторой траектории при постепенном увеличении параметра μ. Если точка, находившаяся в начале координат, получила малое возмущение, то при $\mu < -1$ она будет стремиться к началу координат (в силу асимптотической устойчивости начала координат); вращаясь вблизи точки $(0, 0)$, наблюдаются малые колебания. Та же картина и при $-1 \leqslant \mu < 0$, так как при малых отклонениях траектория не попадает в зону влияния устойчивого предельного цикла. При $\mu = 0$ начало координат теряет устойчивость и точка будет стремиться к окружности радиуса r_2. Возникают колебания сразу большого радиуса. При этом можно заметить, что изменения в поведении системы произошли резко. В этом случае говорят, что произошла *жесткая бифуркация*. Характерная особенность жестких бифуркаций состоит в том, что наличие бифуркации зависит от предыстории в изменении параметра. В данном случае при $\mu = 0$ жесткая бифуркация произошла в результате процесса возрастания параметра.

Проследим изменения в поведении некоторой траектории при постепенном уменьшении параметра μ. Если точка, находившаяся в начале координат, получила малое возмущение, то при $\mu > 0$ она будет стремиться к окружности радиуса r_2 (в силу неустойчивости начала координат); наблюдаются колебания большого радиуса. Та же картина и при $-1 \leqslant \mu < 0$: предельный цикл радиуса r_2 остается устойчивым, плавно уменьшаясь при уменьшении параметра. При $\mu = -1$ предельный цикл теряет устойчивость и колебания сразу затухают, так как траектория стремится к асимптотически устойчивому началу координат. При уменьшении параметра жесткая бифуркация произошла при $\mu = -1$.

Значения бифуркационных параметров, при которых наблюдается бифуркация в смысле потери (или приобретения) устойчивости, называются *границами устойчивости*. Если происходит жесткая бифуркация, то граница называется *опасной*. Обычно границы опасные только с одной стороны. Вопрос изучения безопасности границ является важным вопросом при конструировании технических устройств. В нашем примере граница $\mu = -1$ опасна справа, а граница $\mu = 0$ опасна слева.

5. Орбитальная устойчивость

В динамических системах, в частности в дифференциальных уравнениях, важнейшим свойством является устойчивость движения (решения). Классическим определением является устойчивость по Ляпунову. Для полноты картины приведем это определение.

Определение 5.1. Пусть задано векторное решение $x = \eta(t)$ векторного дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $\eta(t_0)$, причем решение определено при всех $t \geqslant t_0$. Решение называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всякого другого решения $x(t)$ того же дифференциального уравнения из условия $\|x(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta$ следует $\|x(t) - \eta(t)\| < \varepsilon$ для всех моментов времени $t \geqslant t_0$.

Отрицание этого высказывания называется неустойчивостью по Ляпунову.

Усиление устойчивости называется асимптотической устойчивостью.

Определение 5.2. Решение $x = \eta(t)$ называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, если оно устойчиво по Ляпунову и выполняется условие

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - \eta(t)\| = 0.$$

Для исследования на устойчивость положений равновесия (точек покоя), то есть таких точек, где $f(t, x) = 0$, имеется весьма эффективный (особенно для автономных уравнений $\dot{x} = f(x)$) математический аппарат, состоящий в линеаризации системы вблизи положения равновесия системы и в дальнейшем исследовании собственных чисел (корней характеристического уравнения) полученной матрицы.

Если все корни имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия является асимптотически устойчивым по Ляпунову. Если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то положение равновесия является неустойчивым по Ляпунову. Если среди корней имеется часть с отрицательной вещественной частью, а часть — с нулевой вещественной частью (это так называемый критический случай), то положение равновесия может быть устойчиво по Ляпунову (но не асимптотически) или неустойчиво по Ляпунову в зависимости от дополнительных условий.

При попытке применить эту технику к исследованию предельных циклов возникают следующие проблемы. Во-первых, линеаризованная вблизи предельного цикла система оказывается не с постоянными коэффициентами, а с периодическими, следовательно, аппарат собственных чисел не работает. Существует аппарат (так называемые характеристические показатели), обобщающий понятие собственных чисел для систем с периодическими коэффициентами (см. пособие [3, глава 2] для магистрантов-математиков).

Во-вторых, сами понятия устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову оказываются слишком грубыми для того, чтобы различить асимптотику стремления к предельному циклу. В связи с этим введем новые понятия.

Пусть $x = \eta(t)$ — решение автономной системы (3.1), определенное при $t > 0$. *Положительной полутраекторией* решения $x = \eta(t)$ назовем множество в фазовом пространстве

$$L^+[\eta(\cdot)] = \{x \in R^n,\ x = \eta(t),\ t \geqslant 0\}.$$

Определение 5.3. Решение $\eta(t)$ системы (3.1) называется *орбитально устойчивым* при $t \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех других решений $x(t)$ системы (3.1) с условием $\|x(0) - \eta(0)\| < \delta$ выполняется $\rho(x(t), L^+[\eta(\cdot)]) < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$. Здесь $\rho(x, L)$ означает расстояние от точки x до множества L в пространстве R^n.

Из устойчивости по Ляпунову решения следует его орбитальная устойчивость; обратное, вообще говоря, неверно, как показывает следующий простой пример.

Пример 5.1. Рассмотрим уравнение $\dot{x} = x$, тогда все решения даются формулой $x = x_0 e^t$ и решение $\eta(t) = e^t$ неустойчиво по Ляпунову, но орбитально устойчиво, так как его положительной полутраекторией является полупрямая $x \geqslant 0$.

Определение 5.4. Орбитально устойчивое решение $\eta(t)$ называется *асимптотически орбитально устойчивым*, если существует $\Delta > 0$ такое, что для всех решений $x(t)$, удовлетворяющих соотношению $\|x(0)-\eta(0)\| < \Delta$, выполняется предельное соотношение $\rho(x(t), L^+[\eta(\cdot)]) \to 0$ при $t \to \infty$.

Используя это определение, аттрактором можно назвать асимптотически орбитально устойчивый предельный цикл.

Для исследования предельных циклов на асимптотическую орбитальную устойчивость разработана специальная техника, основанная на свойствах систем с периодическими коэффициентами и использующая такие понятия, как *показатели Ляпунова, характеристические показатели и мультипликаторы.* Эти вопросы выходят за пределы нашего курса, они изложены в ряде книг [1, 2, 4, 5] и в пособии для магистрантов-математиков [3].

Однако для систем второго порядка имеется простой критерий, обеспечивающий асимптотическую орбитальную устойчивость предельного цикла.

Рассмотрим двумерную автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x_2} = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{5.1}$$

которая имеет периодическое решение $\eta(t)$ периода ω.

Теорема 2 (Признак Пуанкаре)**.** *Если*

$$\int\limits_0^\omega [\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\eta(t)) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\eta(t))]dt < 0,$$

то периодическое решение $\eta(t)$ асимптотически орбитально устойчиво.

Доказательство можно посмотреть в [3].

6. Способы исследования предельных циклов

Классификация двумерных особых точек в линейном случае изучается в стандартном курсе обыкновенных дифференциальных уравнений [6], для нелинейных систем характер особых точек в невырожденных случаях совпадает с характером особых точек линеаризованной системы. В случае предельного цикла прием линеаризации не подходит, так как предельные циклы могут быть только у нелинейной системы. Между тем предельные циклы моделируют такие важнейшие явления в технике, как автоколебания, — процессы преобразования энергии поступательного движения в энергию колебаний. Можно отметить также колебания звука, флаттер, ламповый генератор и другие разнообразные модели, например, хищник-жертва в биологии. Проиллюстрируем некоторые приемы исследования предельного цикла на примере конкретного уравнения — уравнения Ван-дер-Поля.

6.1. Уравнение Ван-дер-Поля: наводящие соображения

Уравнение Ван-дер-Поля моделирует ламповый генератор (см. [1]) и имеет вид

$$\ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} + y = 0, \tag{6.1}$$

где ε — положительный параметр.

Проведем аналогию с линейным уравнением вида

$$\ddot{y} + a\dot{y} + y = 0.$$

Исследуя корни характеристического уравнения, получаем, что при $a > 0$ тривиальное решение (асимптотически) устойчиво, а при $a < 0$ неустойчиво. "Заморозив" коэффициент при $\dot{y}$ в уравнении (6.1), получаем при $y > 1$ устойчивость, а при

$y < 1$ — неустойчивость, то есть малые колебания усиливаются, а большие уменьшаются по амплитуде. Поэтому следует ожидать устойчивого предельного цикла — аттрактора.

Для дальнейшего исследования приведем уравнение (6.1) к нормальной форме, сделав замену $y_1 = y$, $y_2 = \dot{y}$. Получим

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2, \\ \dot{y}_2(t) = \varepsilon(1 - y_1^2)y_2 - y_1. \end{cases} \tag{6.2}$$

Рассмотрим фазовый портрет этой системы.

6.2. Метод точечных отображений Пуанкаре

Возьмем луч L на фазовой плоскости системы (6.2), выходящий из начала координат и совпадающий с осью абсцисс (в положительном направлении). Рассмотрим точку с координатой $y^{(0)}$ на этом луче. Если траектория решения системы (6.2), выпущенная из этой точки, снова пересекает луч, то координату следующей точки пересечения обозначим через $y^{(1)} = \Phi(y^{(0)})$, а функцию $\Phi(y)$ будем называть *функцией последования.*

Проиллюстрируем идею доказательства существования функции последования [7, с. 116] и ее свойств. В силу первого уравнения системы (6.2) y_1 возрастает, если точка траектории лежит выше прямой $y_2 = 0$, и y_1 убывает, если точка траектории лежит ниже прямой $y_2 = 0$. В силу второго уравнения системы (6.2) знак $\dot{y}_2$ меняется на кривой

$$y_2 = \frac{y_1}{\varepsilon(1 - y_1^2)}, \tag{6.3}$$

которая на рис. 9 изображена штриховой линией. Отсюда следует, что функция $\Phi(y^{(0)})$ определена.

Поскольку два различных решения не могут пересекаться вследствие единственности, отображение Φ является монотонным. В силу неустойчивости начала координат при малых значениях аргумента последовательность $y^{(k+1)} = \Phi(y^{(k)})$ монотонно возрастает. И наконец, значения этой последовательности ограничены (например, любым решением, начинающимся

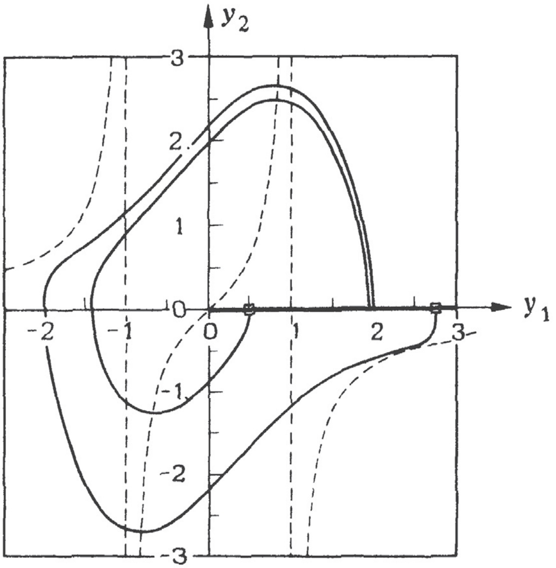


Рис. 9. Отображение Пуанкаре для уравнения Ван-дер-Поля [7, с. 117]

на правой ветви кривой (6.3)). Следовательно, должна существовать неподвижная точка отображения $\Phi(y^{(k)})$, то есть предельный цикл. Можно показать [7], что этот предельный цикл единственный.

6.3. Метод установившихся решений

Рассмотрим систему (6.2) при очень большом ε. В силу второго из уравнений (6.2) производная $\dot{y_2}$ имеет большое по модулю значение, поэтому решение будет очень быстро приближаться к положению равновесия по y_2 в окрестности кривой (6.3). Выражая y_2 из (6.3) и подставляя в первое уравнение системы (6.2), получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{y_1} = \frac{y_1}{\varepsilon(1 - y_1^2)}.$$

Проинтегрировав это уравнение, получаем

$$\frac{y_1^2}{2} - \ln|y_1| = -\frac{t}{\varepsilon} + C.$$

Если при больших y_1 пренебречь логарифмом, то эти кривые представляют собой параболы. На рис. 10 представлены решения уравнения Ван-дер-Поля при $\varepsilon = 10$ в сравнении с кривыми, полученными методом установившихся решений.

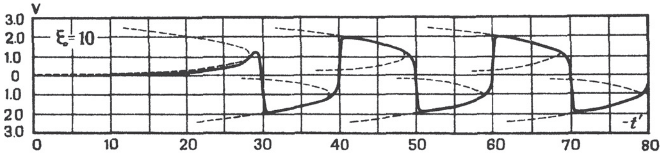


Рис. 10. Решение уравнения Ван-дер-Поля в сравнении со стационарными приближениями [7, с. 118]

6.4. Метод малого параметра

Рассмотрим случай малого ε. Будем искать периодическое решение $y(t)$ уравнения (6.1) в виде разложения по степеням ε:

$$y(t) = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \ldots,$$

где y_0, y_1, $y_2, \ldots$ — периодические функции одного и того же периода. Для того чтобы свести неизвестный период к стандартному (2π), сделаем замену независимой переменной $s = at$, где величину a также разложим по степеням ε:

$$s = t(1 + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \ldots).$$

Используя правила дифференцирования сложной функции, получаем

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = a\frac{dy}{ds} = ay', \;\; \ddot{y} = a^2\frac{d^2y}{ds^2} = a^2 y''.$$

Подставляя разложения для y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ и величины a в уравнение (6.1), получим

$$(y_0'' + \varepsilon y_1'' + \varepsilon^2 y_2'' + \ldots)(1 + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \ldots)^2 +$$
$$+\varepsilon((y_0 + \varepsilon y_1 + \ldots)^2 - 1)(y_0' + \varepsilon y_1' + \varepsilon^2 y_2' + \ldots)(1 + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \ldots) +$$
$$+(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon y_2 + \ldots) = 0. \tag{6.4}$$

Приравнивая к нулю в левой части уравнения (6.4) слагаемые, не содержащие сомножитель ε, получаем уравнение гармонических колебаний

$$y_0'' + y_0 = 0,$$

общее решение которого

$$y_0 = A\cos s + B\sin s.$$

Вместо начальных условий для нахождения констант будем использовать условия, обеспечивающие периодичность $y(s)$:

$$y_0'(0) = 0,\ y_1'(0) = 0,\ y_2'(0) = 0, \ldots,$$

откуда получаем $B = 0$. Таким образом,

$$y_0 = A\cos s,$$

где константа A будет определена на следующем шаге.

Приравнивая к нулю в левой части уравнения (6.4) слагаемые, содержащие сомножитель ε, получаем уравнение

$$y_1'' + y_1 = -2\gamma_1 y_0'' + (1 - y_0^2)y_0'.$$

Подставляя функцию y_0, получаем

$$y_1'' + y_1 = 2A\gamma_1\cos s - A\sin s + A^3(\sin s - \sin^3 s).$$

Используя формулу тройного угла $\sin(3s) = 3\sin s - 4\sin^3 s$ и приводя подобные, получаем

$$y_1'' + y_1 = 2A\gamma_1\cos s + A(\frac{A^2}{4} - 1)\sin s + \frac{A^3}{4}\sin(3s). \tag{6.5}$$

Чтобы не возник резонанс, при котором функция $y_1(s)$ не будет периодической, занулим слагаемые с $\cos s$ и $\sin s$, положив $\gamma_1 = 0,\ A = 2$. В этом случае общее решение уравнения (6.5) выражается формулой

$$y_1 = A\sin s + B\cos s + \frac{3}{4}\sin s - \frac{1}{4}\sin(3s),$$

при этом константа A зануляется из условия $y_1'(0) = 0$.

Продолжая этот процесс, получаем разложение для периодического решения уравнения Ван-дер-Поля

$$y = 2\cos s + \varepsilon(\frac{3}{4}\sin s - \frac{1}{4}\sin(3s)) + \ldots,$$

при этом

$$s = t(1 + \frac{\varepsilon^2}{8} + \ldots).$$

6.5. Заключительные замечания по теории предельных циклов

Теория предельных циклов разработана для автономных систем произвольной размерности, однако в двумерном случае имеется важное уточнение. У двумерной автономной системы вида (5.1) может быть только два вида притягивающих множеств (аттракторов — в широком смысле этого термина), так как справедлива следующая теорема.

Теорема 3 (Пуанкаре–Бендиксона)**.** *Всякое ограниченное решение двумерной автономной системы является либо точкой покоя, либо циклом, либо неограниченно приближается к точке покоя или циклу.*

Таким образом, в двумерном случае аттракторами могут быть только устойчивое положение равновесия и устойчивый предельный цикл. В системах размерности три и выше разнообразия гораздо больше. Этим вопросам посвящены следующие главы.

Подробнее вопросы, связанные с изучением предельных циклов, изложены в монографиях [1, 2, 4, 5, 7].

7. Аттракторы диссипативных систем

7.1. Фазовый поток. Диссипативность. Аттракторы

В теории дифференциальных уравнений принято исходным объектом считать систему уравнений (для простоты — автономную)

$$\dot{x} = f(x), \; x \in R^n. \tag{7.1}$$

Если функция f удовлетворяет определенным условиям, обеспечивающим существование, единственность и бесконечную продолжимость решения, то всякой начальной точке $x_0 \in R^n$ и времени $t > 0$ однозначно можно поставить в соответствие вектор $x = x(t) \in R^n$ — значение в момент t решения системы (7.1) с начальными условиями $x(0) = x_0$. При этом пространство R^n называют фазовым пространством. Таким образом, система (7.1) задает отображение $R^n \to R^{n+1}$ вида $x = \varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$, которое принято называть фазовым потоком.

В ряде монографий и учебников (см., например, [8, 9]) при изучении дифференциальных уравнений принят иной подход: исходным объектом считается не система, а фазовый поток. Дадим определения. *Фазовым пространством* будем называть пространство R^n. Отображение $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ пространства R^{n+2} в пространство R^n будем называть *фазовым потоком.* Если функция, задающая фазовый поток, зависит не от t и t_0, а лишь от их разности $t - t_0$, то фазовый поток называется *автономным*, в этом случае можно считать t_0 фиксированным (в дальнейшем $t_0 = 0$). Будем обозначать автономный фазовый поток $x = \varphi_t(x_0)$. В дальнейшем будем рассматривать только автономные фазовые потоки.

Пусть для множеств Ω из некоторого класса измеримых подмножеств фазового пространства определена мера $mes(\Omega)$. Будем считать, что фазовый поток $x = \varphi_t(x_0)$ переводит измеримое множество Ω_0 в измеримое множество Ω_t за время t. Фазовый поток назовем *лиувиллевым* или *консервативным*, если для любого $t \geqslant 0$ и для любого измеримого множества функция $m(t) = mes(\Omega_t)$ постоянна, и будем называть фазовый поток *диссипативным*, если эта функция убывающая. Для фазовых потоков систем вида (7.1) имеется критерий лиувиллевости [9, 10].

Теорема 4. *Для того чтобы фазовый поток системы* (7.1) *был лиувиллев, необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие*

$$div(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = 0.$$

Если же $div(f) < 0$, система будет диссипативна и ее фазовый объем будет со временем сокращаться. В конечном счете (то есть при $t \to \infty$) все решения такой системы сосредоточатся на некотором подмножестве фазового пространства, которое называется аттрактором. Более точно *аттрактором* по Лэндфорду называется такое множество B фазового пространства R^n, которое удовлетворяет условиям:

1) B инвариантно относительно фазового потока;

2) существует окрестность G (область притяжения), которая сжимается к B под действием потока;

3) B нельзя разложить на два непересекающихся инвариантных множества.

Рассмотрим виды аттракторов диссипативной системы (7.1) в зависимости от размерности n.

При $n = 1$ существует только один вид аттракторов: устойчивые особые точки. При $n = 2$ существует два вида аттракторов: устойчивые особые точки и устойчивые предельные циклы (аттракторы в узком значении этого термина, см. главу 3.). Эти аттракторы имеют размерность соответственно 0 и 1. Других видов аттракторов нет в силу теоремы Пуанкаре–Бендиксона.

При $n \geqslant 3$ кроме устойчивых особых точек и устойчивых предельных циклов появляются *устойчивые инвариантные торы.* В частности, двумерные инвариантные торы представляют собой поверхности, образованные траекториями квазипериодических решений с двумя рационально независимыми частотами. Отметим, что многомерные притягивающие торы являются неустойчивым образованием, так как под воздействием всегда присутствующих в системе возмущений происходит синхронизация колебаний.

Все перечисленные аттракторы называются *простыми*, поскольку являются многообразиями целой размерности. Но в системах размерности $n \geqslant 3$ могут существовать и аттракторы, не являющиеся простыми, они получили название *странные*.

7.2. Модель Лоренца

Рассмотрим систему Лоренца, которая получается из уравнений гидродинамики в задаче о термоконвекции в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma y - \sigma x, \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \tag{7.2}$$

Здесь σ – число Прандля, r – приведенное число Рэлея, b – постоянная, характеризующая размеры физической системы. Будем считать, что $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, и проследим эволюцию системы при изменении положительного параметра r.

Дивергенция системы $div(f) = -(b + \sigma + 1) < 0$, поэтому система диссипативна. Система Лоренца симметрична относительно замены $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to z$, поэтому ее фазовый портрет симметричен относительно оси Oz.

Найдем положения равновесия из уравнений

$$\sigma y - \sigma x = 0,\ rx - y - xz = 0,\ xy - bz = 0,$$

откуда получаем, что начало координат $O(0,0,0)$ при любых значениях параметра является положением равновесия.

Если $r > 1$, то в системе возникает еще два положения равновесия: точки $O_1(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ и $O_2(-\sqrt{b(r-1)},$ $-\sqrt{b(r-1)}, r-1)$.

Исследуя корни линеаризованной системы вблизи положения равновесия, получаем, что при $r < 1$ точка O устойчива, а при $r > 1$ теряет устойчивость. Точки O_1 и O_2 теряют устойчивость при $r > r_c = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1) = 23$.

Численными расчетами можно обнаружить [9] в диапазоне $13.926 < r < r_c$ наличие предельных циклов, окружающих точки O_1 и O_2, радиус которых уменьшается с ростом r. При $r = r_c$ предельные циклы сливаются с точками и точки теряют устойчивость. Единственным устойчивым предельным множеством при $r > r_c$ будет *аттрактор Лоренца* — совокупность кривых, переходящих от вращения вокруг точки O_1 к вращению вокруг точки O_2. Поведение траекторий выглядит хаотично. На рис. 11 приведено поведение траекторий при $r = 28$.

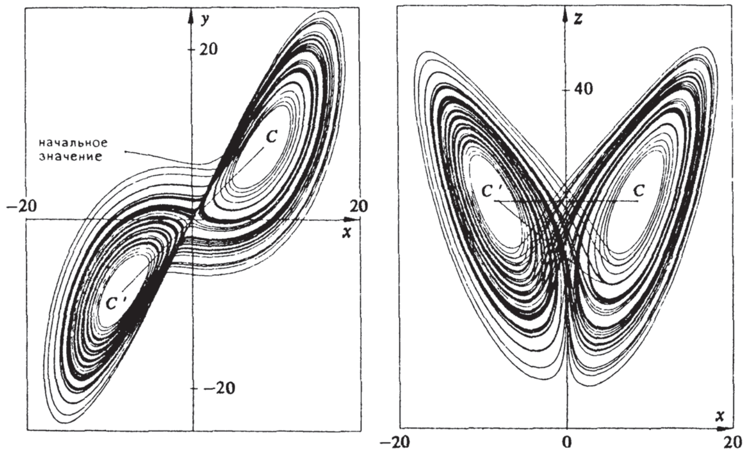


Рис. 11. Две проекции решения системы (7.2) [7, с. 127]

Можно попытаться исследовать аттрактор Лоренца методом сечений Пуанкаре, проведя в фазовом пространстве плоскость $\Pi : z = r - 1$. Численное изучение отображения $P(\Pi)$ показывает, что существует критическая линия, выше которой решения идут вправо, а ниже — влево. Следовательно, образ $P(\Pi)$ состоит из двух множеств, как показано на рис. 12.

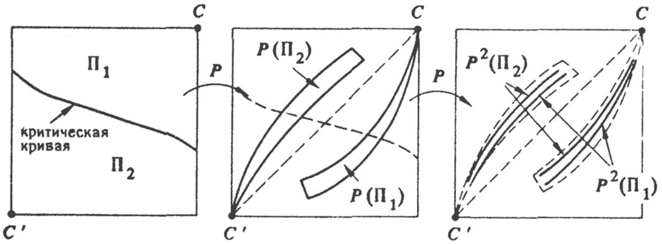


Рис. 12. Отображение Пуанкаре [7, с. 128]

Отсюда вытекает, что образ P^2 включает четыре слоя, образ P^3 — восемь слоев и т. д., причем слои размещаются все ближе друг к другу. Поэтому аттрактор состоит из бесконечного числа листов, расположенных наподобие канторова совершенного множества. Причина возникновения аттракторов сложной природы — в двух явлениях, могущих одновременно возникать в нелинейных системах: *глобальной (структурной) устойчивости и локальной неустойчивости*.

7.3. Количественные характеристики аттракторов

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (7.1) и для нее два решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ с начальными условиями $x_1(0)$ и $x_2(0)$ соответственно. Обозначим $d(t) = \|x_2(t) - x_1(t)\|$. Назовем *энтропией Колмогорова–Синая*

$$ks = \lim_{d(0)\to 0, t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{d(t)}{d(0)}.$$

Отметим, что эта характеристика глобальная по тому множеству фазового пространства, откуда берутся начальные условия. В частности, если начальные условия берутся из окрестности устойчивого положения равновесия, то, как можно проверить, $ks < 0$. Для устойчивых предельных циклов и инвариантных торов $ks = 0$. В случае странных аттракторов $ks > 0$. В последнем случае часто используют также $t_{mix} = 1/ks$ — время перемешивания, начиная с которого описание поведения системы может быть только вероятностным.

Введем другую характеристику. Зафиксируем начальную точку $x(0) = x_0$ и соответствующее ей решение $x(t)$. Дадим приращение $\xi \in R^n$ начальной точке и рассмотрим решение $x_1(t)$, соответствующее начальному условию $x_0 + \delta\xi$. Введем $d(t) = \|x_1(t) - x(t)\|$. *Показателем Ляпунова, определенным на векторах начального смещения*, назовем

$$\Lambda(\xi) = \lim_{\delta \to 0, t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{d(t)}{|\delta| \|\xi\|}.$$

Функция $\Lambda(\xi)$ меняется скачками и принимает лишь конечное число значений $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$, совпадающих с показателями Ляпунова в смысле определений раздела 2. пособия [3] для системы уравнений в вариациях, линеаризованной вблизи решения $x(t)$. Отметим некоторые свойства показателей Ляпунова [9]:

1. Один из показателей Ляпунова, отвечающий смещению вдоль траектории, не оканчивающейся в особой точке, всегда равен нулю.

2. Сумма показателей Ляпунова равна среднему вдоль траектории значению дивергенции.

3. Максимальный из показателей Ляпунова равен энтропии Колмогорова–Синая.

Опираясь на эти свойства, проведем классификацию аттракторов диссипативных систем в зависимости от знаков показателей Ляпунова.

Для одномерной системы аттракторами могут быть только устойчивые особые точки, для которых существует один показатель Ляпунова, который является отрицательным (–).

Для двумерной системы аттракторами могут быть устойчивые особые точки, для которых существуют два отрицательных показателя Ляпунова (–,–), и устойчивые предельные циклы: один отрицательный и один нулевой показатель (–,0). Для трехмерной системы возможны варианты:

(–,–,–) — устойчивая особая точка;
(–,–,0) — устойчивый предельный цикл;
(–,0,0) — устойчивый инвариантный тор;
(–,0,+) — странный аттрактор.

7.4. Дробная размерность. Гипотеза Каплана–Йорка

Существует несколько подходов к определению нецелой размерности множеств в конечномерном пространстве. Приведем одно из них. Пусть $A \subset R^n$. Покроем множество A n-мерными кубиками со стороной $\varepsilon > 0$, и пусть $N = N(\varepsilon)$ — минимальное число кубиков, необходимых для такого покрытия. Назовем *фрактальной размерностью* множества A число

$$d(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

если такой предел существует.

Рассмотрим некоторые примеры. Если в трехмерном пространстве задан прямоугольный параллелепипед, то $N = K\varepsilon^{-3}$ и $d = 3$.

Рассмотрим канторово совершенное множество на отрезке $[0, 1]$. Напомним, что это множество получается, если отрезок поделить на три равные части, убрать среднюю часть, оставшиеся части также поделить на три равные части, из которых также убираются средние части, и т. д. Возьмем последовательность $\varepsilon = (\frac{1}{3})^m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда, если $\varepsilon = 1$, то $N = 1$; если $\varepsilon = 1/3$, то $N = 2$; если $\varepsilon = (\frac{1}{3})^2$, то $N = 4$; если $\varepsilon = (\frac{1}{3})^m$, то $N = 2^m$ и фрактальная размерность канторова совершенного множества вычисляется как

$$d(A) = \lim_{m \to \infty} \frac{\ln 2^m}{\ln 3^m} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,631.$$

Рассмотрим ковер Серпинского. Это множество получается из единичного квадрата делением его на девять равных частей, выбрасыванием средней части, делением оставшихся частей также на девять частей с выбрасыванием средней части и т. д. (рис. 13). Аналогично предыдущему примеру устанавливается, что размерность этого множества равна

$$d(A) = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,893.$$

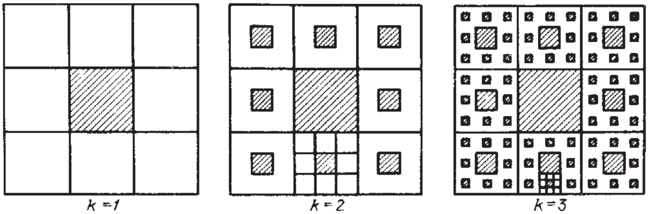


Рис. 13. Построение ковра Серпинского. Заштрихованные области удаляются в процессе итераций [9, с. 144]

Пусть теперь в качестве множества A выступает аттрактор диссипативной системы.

Упорядочим характеристические показатели Ляпунова по убыванию:

$$\Lambda_1 \geqslant \Lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \Lambda_n$$

и выберем номер j из условия

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_j \geqslant 0,$$

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_j + \Lambda_{j+1} < 0.$$

Тогда

$$d(A) = j + \sum_{i=1}^{j} \frac{\Lambda_i}{|\Lambda_{j+1}|}.$$

Это равенство называется *гипотезой Каплана–Йорка*, которая доказывается при некоторых дополнительных предположениях [9].

В частности, в трехмерном пространстве странный аттрактор имеет размерность

$$d(A) = 2 + \frac{\Lambda_1}{|\Lambda_3|}.$$

Так, странный аттрактор в системе Лоренца при параметрах $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$ имеет приближенно размерность $d(A) = 2,05$.

7.5. Каскады Фейгенбаума

Будем менять теперь в системе Лоренца (7.2) параметр b, одновременно полагая $\sigma = b + 1 + \sqrt{2(b+1)(b+2)}$ и $r = r_c$. Проведем сечение плоскостью $z = r - 1$ и исследуем неподвижные точки отображения Пуанкаре (в силу симметрии достаточно исследовать одну координату), которые соответствуют периодическим решениям. Воспроизведем результаты численных расчетов [7].

Для малых b существует одна периодическая траектория, затем при $b = b_1 = 0.1397$ она расщепляется на траекторию с периодом два, которая, в свою очередь, при $b = b_2 = 0.1433$ расщепляется на траекторию с периодом четыре, затем восемь и т. д. Существует точка b_∞, после которой движение становится хаотичным. Но и за этим значением снова и снова встречаются интервалы аттракторов периода $5, 3, \ldots$. Полная картина (рис. 14) напоминает результат вычислений по рекуррентной формуле

$$x_{k+1} = \mu(x_n - x_n^2).$$

Неподвижные точки этого отображения отрезка $[0, 1]$ в себя и возникающие при этом бифуркации хорошо исследованы [9] и получили название *каскадов Фейгенбаума*.

Замечательное открытие Фейгенбаума состоит в том, что для всех подобных отображений всегда наблюдаются одни и те же явления, в частности, величина

$$\lim_{i\to\infty} \frac{b_i - b_{i-1}}{b_{i+1} - b_i} \approx 4.6692016091029906715$$

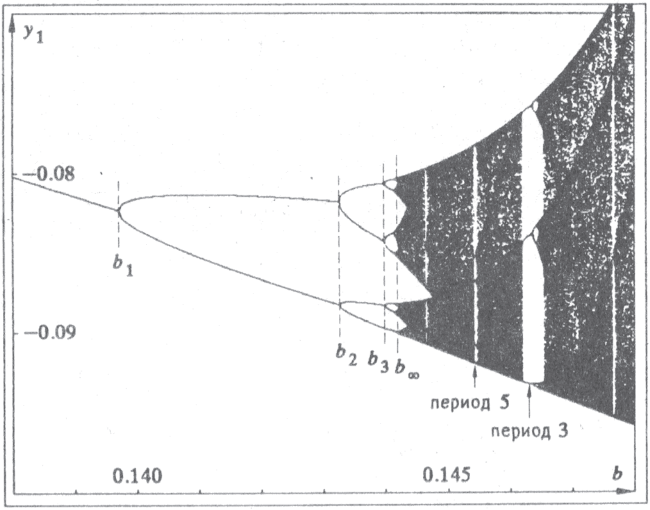


Рис. 14. Значения y_1 сечений Пуанкаре для системы (7.2) [7, с. 130]

является универсальной константой — *постоянной Фейгенбаума*.

Подробнее вопросы, затронутые в этой главе, изложены в монографиях [7, 9, 10], см. также библиографические комментарии и библиографию ко второй главе [9].

8. Некоторые сведения из теории функционально-дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения с запаздыванием, называемые также уравнениями с последействием или функционально-дифференциальными уравнениями (сокращенно ФДУ), являются обобщением обыкновенных дифференциальных уравнений.

8.1. Примеры уравнений с запаздыванием

Рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 8.1.

$$\dot{x} = x(t - \tau),$$

где $t \geqslant 0$; $\tau = 1$; x — одномерный фазовый вектор с начальными условиями $x(0) \equiv 1$. Но для того, чтобы определить дальнейшее положение системы, задания начального положения фазового вектора недостаточно, нужно задать начальную функцию. Пусть $x_0(s) = 1$ при $-1 \leqslant s < 0$. Тогда

1) если $0 \leqslant t \leqslant 1$, то известна функция $x(t-1) = 1$; интегрируя исходное уравнение, получаем

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x(t-1)dt = 1 + t,$$

то есть на этом участке решение — линейная функция;

2) если $1 \leqslant t \leqslant 2$, то $x(t-1) = 1 + (t-1) = t$; интегрируя исходное уравнение, получаем

$$x(t) = x(1) + \int_1^t x(t-1)dt = 2 + \int_1^t tdt = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2},$$

то есть на этом участке решение — парабола.

На последующих участках решение также можно выписать, при этом его гладкость повышается с течением времени. Примененный метод интегрирования уравнений с запаздыванием называется *методом шагов*.

Рассмотренный пример относится к типу *уравнений с постоянным сосредоточенным запаздыванием*:

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-\tau)).$$

Если правая часть этого уравнения от $x(t)$ не зависит, то запаздывание называется *чистым*. Величина запаздывания может быть переменной.

Пример 8.2.

$$\dot{x} = x(t - (e^{-t} + 1)) + \cos t - \sin(t - e^{-t} - 1),$$

где $t \geqslant 0$; x — одномерный фазовый вектор.

Величина запаздывания $\tau(t) = e^{-t} + 1$, поэтому $1 < \tau(t) \leqslant 2$.

Если начальные условия задаются функцией $x = \sin t$ при $-2 \leqslant t \leqslant 0$, то непосредственной подстановкой проверяется, что решение $x = \sin t$ при $t \geqslant 0$.

Этот пример относится к типу ФДУ с *переменным сосредоточенным* запаздыванием:

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t - \tau(t))).$$

Величина запаздывания должна быть неотрицательной и ограниченной: $0 \leqslant \tau(t) \leqslant \tau$.

Запаздывание может быть *распределенным*.

Пример 8.3.

$$\dot{x} = \int_{-1}^{0} x_t(s)ds = \int_{t-\tau}^{t} x(\xi)d\xi.$$

Продифференцировав обе части этого уравнения, получаем

$$\ddot{x} = x(t) - x(t-\tau).$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $x = e^{\lambda t}$, в результате подстановки получаем трансцендентное характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 1 = -e^{-\lambda\tau},$$

которое имеет ненулевой вещественный корень λ_0. Этот корень можно найти численно. Так, при $\tau = 1$ корень $\lambda_0 \approx 0.7$.

Таким образом, если начальные условия задать в виде $x(s) = e^{\lambda_0 s}$, $s \in [-1, 0]$, то решение при $t \geqslant 0$ получается вида $x(t) = e^{\lambda_0 t}$.

Существуют и более сложные виды запаздываний. Многочисленные примеры применения функционально-дифференциальных уравнений в моделировании процессов в различных отраслях науки и техники приведены в [11–14].

Все эти уравнения можно объединить формулой

$$\dot{x} = f(t, x_t(\cdot)),$$

где t — независимая переменная; x — фазовый вектор; $x_t(\cdot) = \{x(t+s), -\tau \leqslant s \leqslant 0\}$ — функция–предыстория фазового вектора, действующая на систему.

Качественная теория функционально-дифференциальных уравнений в настоящее время развита почти с той же полнотой, что и теория обыкновенных дифференциальных уравнений (см. монографии [12–14]). Однако, в силу сложности объекта, аналитические методы решения применимы лишь в исключительных случаях. Поэтому на первый план выходят численные алгоритмы.

8.2. Метод Эйлера для уравнений с постоянным запаздыванием

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-\tau)). \tag{8.1}$$

Здесь $t \in [t_0, t_0 + T]$ — независимая переменная, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — искомая векторная функция, $\tau > 0$ — величина запаздывания.

Заданы также функциональные начальные условия

$$x(t_0 + s) = \varphi(s), \ s \in [-\tau, 0]. \tag{8.2}$$

Пусть $\Delta = \tau/m$ и $N = [T/\Delta]$, где $[a]$ — целая часть числа a. Введем узлы $t_i = t_0 + i\Delta, \ i = -m, \ldots, N$. Обозначим u^i приближения точного решения $x(t_i)$ в узлах.

Явным методом Эйлера назовем алгоритм

$$u^{n+1} = u^n + \Delta f(t_n, u^n, u^{n-m}), \ n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

с начальными условиями

$$u^i = \varphi(t_i - t_0), \ i = -m, \ldots, 0.$$

Будем говорить, что метод сходится с порядком $p > 0$, если найдется константа C такая, что

$$\|x(t_n) - u^n\| \leqslant C\Delta^p, \ n = 1, \ldots, N.$$

Теорема 5. *Явный метод Эйлера для уравнений с постоянным запаздыванием сходится с первым порядком.*

8.3. Метод Эйлера с кусочно-постоянной интерполяцией для функционально-дифференциальных уравнений

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение (систему)

$$\dot{x} = f(t, x(t), x_t(\cdot)) \tag{8.3}$$

с начальными условиями (8.2). Здесь $x_t(\cdot) = \{x(t+s), -\tau \leqslant s < 0\}$ — функция – предыстория фазового вектора, действующая на систему. Остальные обозначения в (8.3) такие же, как и в (8.1). Уравнение (8.3) содержит, в частности, случаи переменного и распределенного запаздывания.

Так же как для (8.1), введем разбиение отрезка. Обозначим u^i приближения точного решения $x(t_i)$ в узлах.

Для того чтобы определить функционал f на приближенном решении, необходима интерполяция дискретной предыстории в момент t_n. Простейший способ — кусочно-постоянная интерполяция:

$$u(t) = \begin{cases} u^i, t \in [t_i, t_{i+1}), i = 0, \ldots, n-1, \\ \varphi(t - t_0), t \in [t_0 - \tau, t_0). \end{cases}$$

Явным методом Эйлера с кусочно-постоянной интерполяцией для функционально-дифференциальных уравнений назовем алгоритм

$$u_0 = \varphi(0),$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta f(t_n, u^n, u_{t_n}(\cdot)),\ n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Теорема 6. *Явный метод Эйлера с кусочно-постоянной интерполяцией для функционально-дифференциальных уравнений сходится с первым порядком.*

8.4. Аналог метода Эйлера с пересчетом с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией для ФДУ

Повышение точности численных методов может быть достигнуто за счет уменьшения шага, но это приводит к нарастанию вычислительной погрешности. Поэтому важной задачей является построение методов более высокого порядка. Для функционально-дифференциальных уравнений это может быть достигнуто за счет пересчета на каждом шаге значения функционала f в некоторых точках и одновременно за счет повышения качества интерполяции и экстраполяции дискретной модели. Приведем один из методов второго порядка.

Определим кусочно-линейную интерполяцию с экстраполяцией в момент t_n формулой

$$u(t) = \begin{cases} u^i(\frac{t_{i+1}-t}{\Delta}) + u^{i+1}(\frac{t-t_i}{\Delta}), t \in [t_i, t_{i+1}), i = 0, \ldots, n-1, \\ u^{n-1}(\frac{t_n - t}{\Delta}) + u^n(\frac{t-t_{n-1}}{\Delta}), t \in [t_n, t_{n+1}], \\ \varphi(t - t_0), t \in [t_0 - \tau, t_0). \end{cases}$$

Аналогом метода Эйлера с пересчетом назовем алгоритм

$$u_0 = \varphi(0),$$

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta}{2}\big(f(t_n, u^n, u_{t_n}(\cdot)) +$$

$$+ f(t_{n+1}, u^n + \Delta f(t_n, u^n, u_{t_n}(\cdot)), u_{t_{n+1}}(\cdot))\big), \ n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Теорема 7. *Аналог метода Эйлера с пересчетом с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией для функционально-дифференциальных уравнений сходится со вторым порядком.*

Дальнейшие способы повышения точности метода изложены, например, в книге [11]. Там же можно найти доказательства приведенных теорем о порядках сходимости изложенных выше численных методов.

9. Дробные производные и дробные дифференциальные уравнения

9.1. История и мотивировка

В математике многие абстрактные понятия возникли как обобщения ранее известных более простых понятий. Так, понятие возведения в целую степень a^n, где n — целое, определяется через операцию n-кратного умножения числа a самого на себя. Можно ввести обобщения понятия возведения в степень: a^{-n}, n — целое, а также на случай a^b, b — вещественное. Последнее является уже неконструктивным абстрактным понятием, но при целых b совпадает с конструктивным определением.

Аналогично для конструктивного определения факториала целого числа определяется вещественная функция вещественного переменного

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^x e^{-t} t^{x-1} dt, \ x > 0,$$

связанная с факториалом соотношением $\Gamma(n) = (n-1)!$, где n — целое.

Дробная производная также является обобщением хорошо известного понятия производной целого порядка. Хотя дробные производные известны давно, в последние десятилетия наблюдается буквально взрыв применения производных дробного порядка и особенно дробных дифференциальных уравнений в различных математических моделях, особенно в физике и биологии.

Истоки понятия дробной производной восходят к создателям классического дифференциального исчисления. Это понятие употребляли Я. Бернулли, Г. Лопиталь, Г. Лейбниц. Так, Г. Лейбниц писал в письме 1695 года Бернулли: "Дифференциалы порядка 1/2 — это кажущийся парадокс, из которого однажды последуют полезные результаты".

В дальнейшем это понятие развивали многие ученые, в числе которых П. С. Лаплас, Ж. Фурье, Б. Риман, Н. Х. Абель, Ж. Лиувилль, Р. Курант, О. Хевисайд, А. К. Грюнвальд, А. В. Летников. Однако понятие дробной производной оставалось математической абстракцией, известной лишь немногим специалистам. Коренным образом ситуация поменялась в последние десятилетия.

Причины интереса к дробным производным и уравнениям:

1. Во многих моделях дробные производные и уравнения дробных порядков точнее описывают явление. Например, перенос (первая производная) и диффузия (вторая производная) в математической физике — это крайние, идеальные варианты явления, а явление переноса с диффузией может быть описано дробной производной.

2. Определение дробной производной, в отличие от целой, дается нелокально, как интеграл от предыстории, поэтому может быть применено для математического моделирования сред с памятью (применяется термин "активные среды").

3. Дробными уравнениями можно описывать немарковские процессы, то есть зависящие от предыстории, что дает мощный инструмент статистике.

9.2. Дробные производные

Пусть на $(-\infty, \infty)$ задана функция $f(x)$ и $0 < \alpha < 1$. *Левой производной в смысле Римана–Лиувилля* назовем

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d_+ x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Если $n-1 < \alpha < n$, где n — целое, то

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d_+ x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}.$$

Формулы работают и для отрицательного $n-1<\alpha<n$, это понятие называется *дробным интегралом.*

Определим дробную производную функции на отрезке. Пусть задана функция $f(x)$ на $[a,b]$ и $0<\alpha<1$. Левая и правая производные определяются как

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d_{a+}x^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}.$$

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d_{b-}x^\alpha}=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_x^b\frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Главными свойствами дробных производных являются нелокальность и неразрывная связь операций дифференцирования и интегрирования дробных порядков (можно объединить производную и интеграл в одно понятие — *дифферинтеграл или интегродифференциал*).

В последние годы в приложениях используют *производные Капуто*:

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d_+x^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(n-\nu)}\int_0^x\frac{f^{(n)}(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha-n+1}}d\xi,$$

$$n-1<\alpha<n,\ n\in N,\ x>0.$$

В отличие от производных Римана–Лиувилля производная Капуто не зависит от начальных условий, поэтому она естественнее при постановке задач в дифференциальных уравнениях.

9.3. Примеры вычисления дробных производных

Пример 9.1.

$$\frac{d(x^k)}{dx}=kx^{k-1},\ldots,\frac{d^n(x^k)}{dx^n}=\frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n}=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-n)}x^{k-n}.$$

$$\frac{d^\alpha(x^k)}{dx^\alpha}=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)!}x^{k-\alpha}.$$

Пример 9.2.

$$\frac{d(e^{kx})}{dx} = ke^{kx}, \ldots, \frac{d^n(e^{kx})}{dx^n} = k^n e^{kx}.$$

$$\frac{d^\alpha(e^{kx})}{dx^\alpha} = k^\alpha e^{kx}.$$

9.4. Приближенное вычисление дробных производных

Первая производная приближенно вычисляется по следующему правилу. Пусть задана функция $f(x)$ на $[0, b]$, тогда

$$\frac{d(f(x))}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h},$$

$$\frac{d^2(f(x))}{dx^2} \approx \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2},$$

$$\frac{d^n(f(x))}{dx^n} \approx \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{n!}{j!(n-j)!} f(x - jh).$$

Для приближенного вычисления дробных производных можно применять следующий алгоритм. Если $\alpha > 0$, $x > 0$, то справедлива формула Грюнвальда–Летникова

$$\frac{d^\alpha(f(x))}{d_+x^\alpha} \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{[x/h]} (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+1-j)} f(x - jh).$$

Число слагаемых в последней сумме увеличивается с уменьшением h, однако влияние "дальних" значений функции уменьшается.

9.5. Дробные дифференциальные уравнения

Дробным (иногда называемое континуальным) дифференциальным уравнением называют уравнение следующего вида:

$$\frac{d^\alpha(y(x))}{dx^\alpha} = f(x, y(x)),\ \alpha > 0.$$

Это уравнение является аналогом обыкновенного дифференциального уравнения. Но наибольшие приложения имеют аналоги уравнений в частных производных (уравнений математической физики), где есть по крайней мере две независимые переменные: t — время и x — пространственная координата. Существуют два основных класса уравнений с дробными частными производными:

1. Уравнения в частных производных с дробной производной по времени

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t)).$$

   Если $0 < \alpha < 1$, то уравнение называется дробно-диффузионным, если $1 < \alpha < 2$, то уравнение называется дробно-волновым.

2. Уравнения в частных производных с двусторонней дробной производной по пространству $(1 < \alpha < 2)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_+\frac{\partial^\alpha u}{\partial_+ x^\alpha} + c_-\frac{\partial^\alpha u}{\partial_- x^\alpha} + f(x, t, u(x, t)).$$

9.6. Аналог численного метода Эйлера для дробных дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу с дробной производной Капуто:

$$\frac{d^\alpha(y(t))}{dt^\alpha} = f(t, y(t)),\ 0 < \alpha < 1,$$

$$y(0) = y_0.$$

Будем предполагать, что выполнены условия существования и единственности на $[0, T]$. Задача может быть записана в форме (применив к обеим частям производную порядка $-\alpha$)

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\xi)^{1-\alpha} f(\xi, y(\xi))d\xi.$$

Пусть $\Delta = T/N$, $t_i = t_0 + i\Delta$, $i = 0, \ldots, N$. Обозначим u_i приближения точного решения $y(t_i)$ в узлах. Явным методом Эйлера назовем алгоритм

$$u_{i+1} = y_0 + \Delta^\alpha \sum_{j=0}^{i} b_{j,i+1} f(t_j, u_j),$$

где

$$b_{j,i+1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}[(i-j+1)^\alpha - (i-j)^\alpha].$$

Также метод можно записать в виде

$$u_{i+1} = u_i + \frac{\Delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_i, u_i) + \Delta^\alpha \sum_{j=0}^{i-1} (b_{j,i+1} - b_{j,i}) f(t_j, u_j),$$

откуда видно, что при $\alpha = 1$ метод переходит в стандартный метод Эйлера.

Математические основы дробных производных и дробных дифференциальных уравнений изложены в книгах разного уровня [15–20]. Некоторые приложения в физике рассмотрены в [21]. Численные методы для дробных производных и дробных дифференциальных уравнений изложены в [22].

10. Задания для компьютерных экспериментов

Каждый вариант состоит из четырех заданий:

1. Компьютерное нахождение предельного цикла для системы или уравнения второго порядка.

2. Определение точек бифуркации нелинейной динамической системы второго порядка, зависящей от параметра, с помощью компьютерного моделирования.

3. Определение формы и периода предельного цикла с помощью компьютерных экспериментов. Исследование на устойчивость с помощью признака Пуанкаре полученного предельного цикла.

4. Влияние на предельный цикл постоянных запаздываний.

Ниже приведены возможные варианты систем или уравнений второго порядка для исследования:

$$\ddot{x} + 3\dot{x}^3 - \mu\dot{x} + x = 0. \tag{10.1}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(x^3 - x), \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \tag{10.2}$$

$$\ddot{x} + \mu(2\dot{x}^2 + x^4 - 1)\dot{x} + x^3 = 0. \tag{10.3}$$

$$\ddot{x} - \dot{x}\mu(1 - 3x^2 - 2\dot{x}^2) + x = 0. \tag{10.4}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = -x + \mu y - x^2 y. \end{cases} \tag{10.5}$$

$$\ddot{x} - \mu\dot{x}(1 - 5x^2 - 0.5\dot{x}^4) + x = 0. \tag{10.6}$$

$$\begin{cases}\dot{x} = \mu x + y - x^3 \cos x,\\ \dot{y} = -x + \mu y.\end{cases} \tag{10.7}$$

$$\begin{cases}\dot{x} = \mu x + y + \mu x^2 - x^2 - xy^2,\\ \dot{y} = -x + y^2.\end{cases} \tag{10.8}$$

$$\ddot{x} + (x^2 - \mu)\dot{x} + 2x + x^3 = 0. \tag{10.9}$$

$$\ddot{x} + 5\dot{x}^3 - \mu\dot{x} + x = 0. \tag{10.10}$$

$$\begin{cases}\dot{x} = \mu x - 2y - 2x(x^2 + y^2)^2,\\ \dot{y} = 2x + \mu y - y(x^2 + y^2)^2.\end{cases} \tag{10.11}$$

$$\ddot{x} + \mu(5\dot{x}^2 + 0.5\dot{x}^4 - 1)\dot{x} + x^3 = 0. \tag{10.12}$$

Разберем детально следующий вариант задачи. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + (2x^2 - \mu)\dot{x} + 4x + x^3 = 0. \tag{10.13}$$

Необходимо найти значение параметра μ, при котором уравнение (10.13) имеет устойчивый предельный цикл. Представить результат в виде графика зависимости $\dot{x}$ от x. Найти все точки бифуркаций. Представить результат в виде графиков зависимости $\dot{x}$ от x. Определить устойчивость предельного цикла с помощью критерия Пуанкаре. В исследуемое уравнение внести эффект постоянного запаздывания и исследовать его влияние на предельные циклы.

10.1. Нахождение предельного цикла

Перепишем уравнение (10.13) в виде системы уравнений. Для этого обозначим $\dot{x} = y$, тогда

$$\begin{cases}\dot{x} = y,\\ \dot{y} = (\mu - 2x^2)y - 4x - x^3.\end{cases} \tag{10.14}$$

Будем рассматривать решение системы на отрезке $[0, 1000]$ (величина выбранного отрезка подбирается эмпирическим способом в зависимости от системы). Разобьем отрезок изменения временной переменной $[0, 1000]$ на части с шагом $h = 0.01$, введя точки $t_n = t_0 + nh,\ n = 0, \ldots, M$. Приближения функций $x(t_n)$ и $y(t_n)$ в узлах будем обозначать через x_n и y_n соответственно.

Данная система (10.14) решается численно с помощью метода Рунге–Кутты четвертого порядка. Применим его для нашей системы (10.14):

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4), \end{cases}$$

где

$$K_1 = y_n,\ K_2 = y_n + \frac{1}{2}L_1,\ K_3 = y_n + \frac{1}{2}L_2,\ K_4 = y_n + L_3,$$

$$L_1 = (\mu - 2x_n^2)y_n - 4x_n - x_n^3,$$

$$L_2 = (\mu - 2(x_n + \frac{1}{2}K_1)^2)(y_n + \frac{1}{2}L_1) - 4(x_n + \frac{1}{2}K_1) - (x_n + \frac{1}{2}K_1)^3,$$

$$L_3 = (\mu - 2(x_n + \frac{1}{2}K_2)^2)(y_n + \frac{1}{2}L_2) - 4(x_n + \frac{1}{2}K_2) - (x_n + \frac{1}{2}K_2)^3,$$

$$L_4 = (\mu - 2(x_n + K_3)^2)(y_n + L_3) - 4(x_n + K_3) - (x_n + K_3)^3.$$

Из полученных графиков зависимостей $y(x)$ при разных значениях параметра μ установлено, что система (10.14) имеет устойчивый предельный цикл при значениях параметра μ от 0 до 36.9. В качестве начальных значений для численного решения системы (10.14) рассматриваются $x(0) = x_0 = 1$, $y(0) = y_0 = 1$ и $x(0) = x_0 = 2$, $y(0) = y_0 = 2$ (начальные значения брались внутри (рис. 15) и снаружи (рис. 16) устойчивого предельного цикла). Ниже приведены соответствующие графики зависимости $y(x)$.

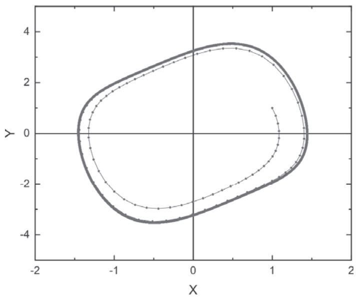


Рис. 15. $x_0 = 1,\ y_0 = 1$

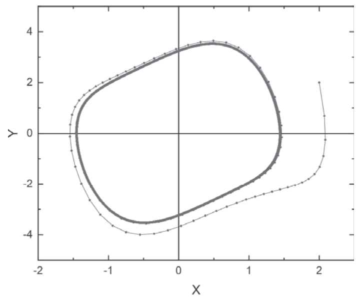
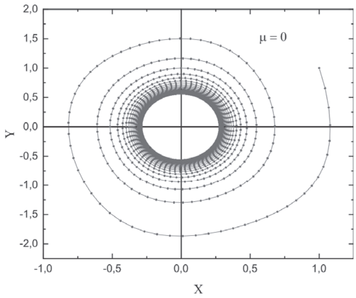


Рис. 16. $x_0 = 2,\ y_0 = 2$

Далее представлены графики зависимостей $y(x)$ при некоторых значениях параметра μ (рис. 17–22). При увеличении μ выше значения 36.9 предельного цикла не наблюдается.



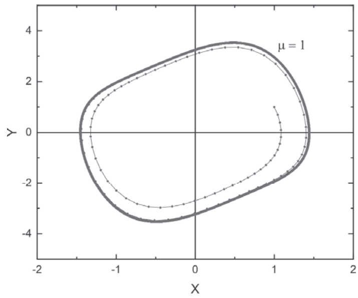
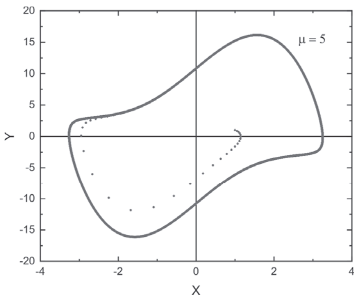


Рис. 17. $\mu = 0,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$ Рис. 18. $\mu = 1,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$



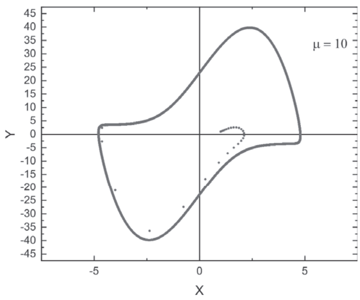


Рис. 19. $\mu = 5,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$ Рис. 20. $\mu = 10,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$

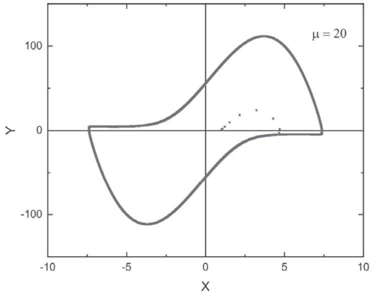


Рис. 21. $\mu = 20$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$

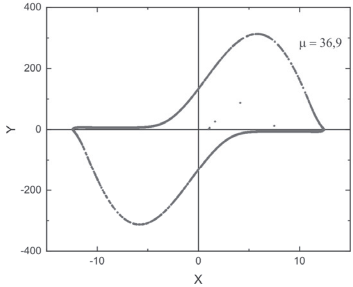
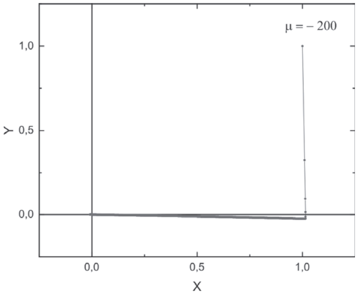


Рис. 22. $\mu = 36.9$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$

10.2. Определение точек бифуркации

Для нахождения точек бифуркации используется программа, моделирующая предельные циклы в параграфе 10.1.. Строятся графики $y(x)$ при изменении значения параметра μ. Нашей целью является нахождение таких значений параметра μ, при которых происходит качественное изменение в поведении системы. Анализируя графики зависимостей y от x при разных значениях параметра μ, установлено, что при отрицательных значениях μ система (10.14) предельного цикла не имеет. При $\mu = 0$ система имеет предельный цикл. При положительных μ, как было показано в параграфе 10.1., система (10.14) имеет устойчивый предельный цикл. Ниже представлены графики зависимостей $y(x)$ при изменении значения параметра μ от отрицательных до положительных (рис. 23–30).



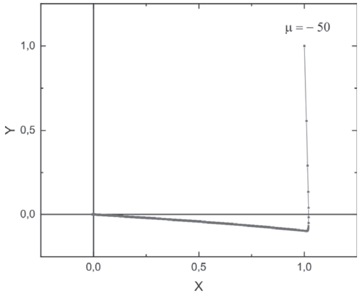
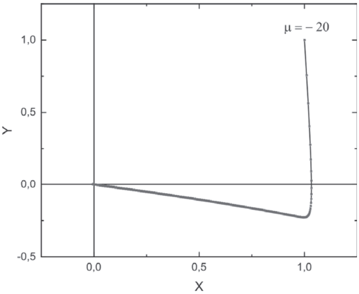


Рис. 23. $\mu = -200,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$

Рис. 24. $\mu = -50,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$



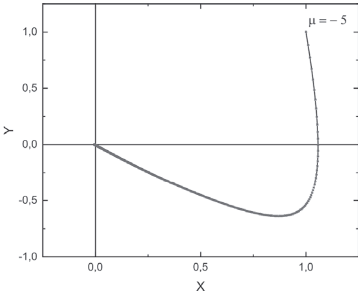
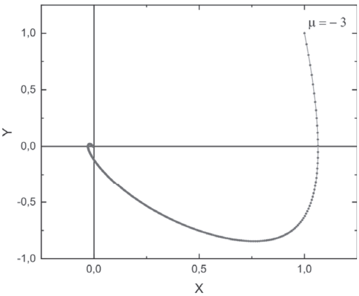


Рис. 25. $\mu = -20,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$

Рис. 26. $\mu = -5,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$



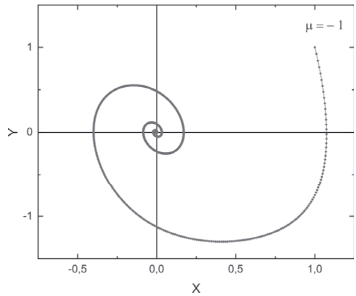


Рис. 27. $\mu = -3,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$

Рис. 28. $\mu = -1,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$

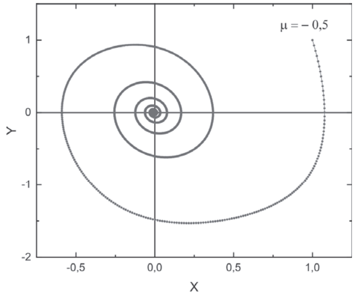


Рис. 29. $\mu = -0.5$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$

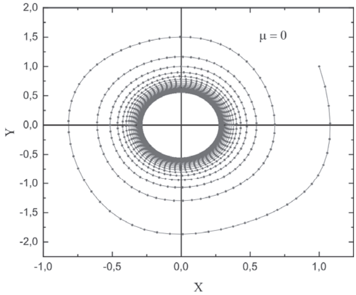


Рис. 30. $\mu = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$

При $\mu = 0$ происходит качественное изменение в поведении системы, а именно возникает предельный цикл (сходимость в точку переходит в предельный цикл). Поэтому $\mu = 0$ — точка бифуркации.

10.3. Исследование устойчивости предельного цикла с помощью признака Пуанкаре

Применим признак Пуанкаре, описанный в главе 5.. Для этого необходимо найти период ω (величина интервала времени, когда решение системы (10.14) вернется в ту же точку, из которой оно вышло). Для этого берется некоторая начальная точка, близкая к предельному циклу, и ищется решение системы. Алгоритм запоминает точку $\widehat{x}_k$ на оси абсцисс и момент времени $\widehat{t}_k$, когда решение системы пересекает ось абсцисс. Далее продолжает строиться решение системы с течением времени. И снова ожидаем того момента, когда решение системы пересекает ось абсцисс. Соответственно алгоритм запоминает точку $\widehat{x}_{k+1}$ на оси абсцисс и момент времени $\widehat{t}_{k+1}$. Продолжаем итерации по индексу k до тех пор, пока

$$|\widehat{x}_{k+1} - \widehat{x}_k| < \varepsilon, \ \varepsilon = 10^{-6}. \tag{10.15}$$

В итоге мы найдем такой индекс $\widehat{k}$, для которого выполняется условие (10.15). Соответственно период $\omega \approx \widehat{t}_{\widehat{k}+1} - \widehat{t}_{\widehat{k}}$.

Напомним признак Пуанкаре. Если

$$\int_0^{\omega}[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\eta(t)) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\eta(t))]dt < 0, \tag{10.16}$$

то периодическое решение $\eta(t)$ асимптотически орбитально устойчиво.

Выпишем для нашей системы величины $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\eta(t))$ и $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\eta(t))$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\eta(t)) = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\eta(t)) = \mu - 2x^2.$$

Тогда признак Пуанкаре (10.16) для рассматриваемой системы (10.14) представляется в следующем виде:

$$\int_0^{\omega}(\mu - 2x^2(t))dt < 0. \tag{10.17}$$

Для значений параметра μ, в которых наблюдается предельный цикл, используем условие (10.17) для проверки на орбитальную устойчивость. Проверка подтвердила наличие орбитальной устойчивости в системе (10.14) при значениях параметра μ от 0 до 36.9. Из таблицы мы видим, что с увеличением параметра μ убывает значение I (величина интеграла в формуле (10.17)). Значение I считаем с помощью формулы средних прямоугольников с шагом 0.01.

Значения I в зависимости от μ

μ	I
0	-0.25333
5	-11.504
15	-46.1964
30	-162.344
36.9	-343.246

10.4. Влияние на предельный цикл постоянных запаздываний

Введем постоянное запаздывание (τ — величина запаздывания) в систему (10.14) следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = (\mu - 2x^2(t))y(t) - 4x(t) - x^3(t - \tau). \end{cases} \tag{10.18}$$

Тогда получим следующие результаты численного моделирования (рис. 31–36):

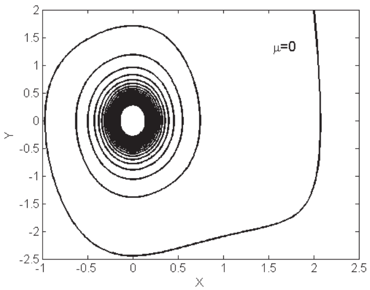


Рис. 31. $\mu = 0,\ \tau = 0,\ x_0 = 2,\ y_0 = 2$

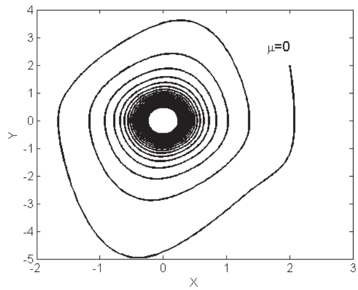


Рис. 32. $\mu = 0,\ \tau = 0.5,\ x_0 = 2,\ y_0 = 2$

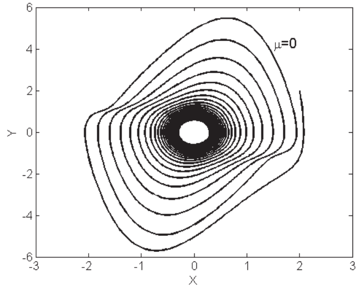


Рис. 33. $\mu = 0,\ \tau = 1,\ x_0 = 2,\ y_0 = 2$

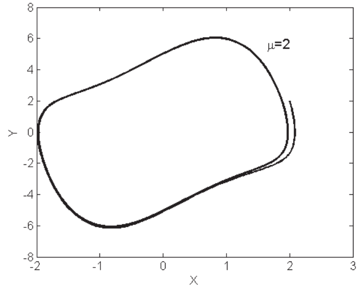
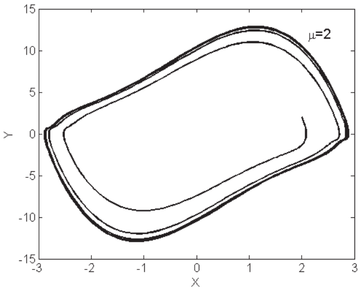


Рис. 34. $\mu = 2,\ \tau = 0,\ x_0 = 2,\ y_0 = 2$



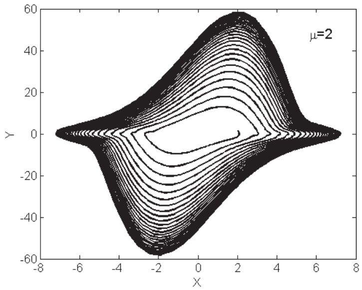


Рис. 35. $\mu = 2,\ \tau = 0.5,\ x_0 = 2,\ y_0 = 2$

Рис. 36. $\mu = 2,\ \tau = 1,\ x_0 = 2,\ y_0 = 2$

Из графиков видно, что величина запаздывания изменяет форму предельного цикла (чем больше величина запаздывания, тем сильнее изменяется форма).

Заключение

Следует отметить, что в пособии затронуты (иногда весьма поверхностно) лишь некоторые вопросы современной математики из числа тех, что не изучаются в математических курсах бакалавриата. Пособие можно рассматривать как некоторое введение в проблематику. Более подробно эти проблемы изложены в многочисленных журнальных статьях и монографиях, часть из которых приведена в библиографическом списке. Учитывая контингент слушателей курса, в пособии все сложные математические утверждения приводятся без доказательств, но их можно найти в упомянутых монографиях.

Активно овладеть изложенными в пособии понятиями можно только самостоятельно, проведя численные эксперименты в рамках сформулированных заданий. Написание и оформление отчетов по заданиям составляют немаловажную часть обучения, они вырабатывают навык написания научных работ.

Надеемся, что пособие поможет магистрантам-физикам познакомиться с некоторыми вопросами современной математики, возможно, они будут использовать изложенный математический аппарат в своих исследованиях.

Библиографические ссылки

1. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М. : Мир, 1986.
2. *Марсден Д., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М. : Мир, 1980.
3. *Пименов В. Г.* Избранные главы дифференциальных уравнений. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2003.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М. : Наука, 1967.
5. *Хессард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М. : Мир, 1985.
6. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Наука, 1983.
7. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М. : Мир, 1990.
8. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Наука, 1971.
9. *Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С.* Введение в синергетику. М. : Наука, 1990.
10. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М. : Мир, 1988.
11. *Ким А. В., Пименов В. Г.* i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Москва ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2004.
12. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М. : Наука, 1972.
13. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1984.

14. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. : Наука, 1971.

15. *Васильев В. В., Симак Л. А.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Киев : НАН Украины, 2008.

16. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М. : Высш. шк., 1995.

17. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск : Наука и техника, 1987.

18. *Podlubny I.* Fractional differential equations. San Diego : Acad. Press, 1999.

19. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional differential equations. Berlin : Springer, 2010.

20. *Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam : Elsevier, 2006.

21. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. Ульяновск : Артишок, 2008.

22. *Li C., Zeng F.* Numerical Methods for Fractional differential Calculus. CRC Press, 2015.

Учебное издание

Пименов Владимир Германович
Лекомцев Андрей Валентинович

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

Заведующий редакцией *М. А. Овечкина*
Редактор *Т. А. Федорова*
Корректор *Т. А. Федорова*
Компьютерная верстка *А. В. Лекомцев*

Подписано в печать 27.04.2023 г. Формат 60 × 84 1/16
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 4,19
Уч.-изд. л. 3,5. Тираж 30 экз. Заказ 57

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 389-94-79, 350-43-28
E-mail: rio.marina.ovechkina@mail.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

Для заметок

Для заметок

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА
2022

9785799636463