Заседания семинара «Алгебраические системы»

Руководитель Л. Н. Шеврин

№851, 26.08.1999. P.G.Trotter (Hobart, Australia). *On e-varieties of regular semigroups.*

An *e-variety of regular semigroups* is a class of regular semigroups that is closed under taking homomorphic images, direct products, and regular subsemigroups. Although e-varieties are not usually varieties of algebras, it is known (by Y. T. Yeh) that analogues of free objects, namely bifree objects, exist (on at least 2 generators) precisely in the e-varieties of locally inverse semigroups and the e-varieties of E-solid semigroups. Bifree objects are defined on a «doubled» alphabet and have a universal property analogous to that of a free object. A unified approach to modelling the bifree objects in the e-varieties respectively of all locally inverse semigroups and of all E-solid semigroups was described. This allows for a unified theory of biidentities for e-varieties of locally inverse or E-solid semigroups. As well, trifree objects (defined on a «tripled» alphabet), are described along with the result that it is precisely the e-varieties of locally E-solid semigroups that have trifree objects on a least 3 generators.

№852, 07.10.1999. Л.Н.Шеврин, М.В.Волков, И.Ю.Жильцов, Е.В.Суханов, А.М.Шур. *О международных конференциях по полугруппам в Браге (Португалия,* 18–23 *июня* 1999 *г.) и в Санкт-Петербурге* (2–8 *июля* 1999 *г.*).

№853, 14.10.1999. А.А.Булатов. *Многоместные коммутаторы и мальцевские алгебры.*

Вводится понятие многоместного коммутатора, являющегося обобщением стандартного понятия коммутатора. Доказывается, что эти коммутаторы обладают почти всеми свойствами обычных коммутаторов.

Универсальная алгебра называется *E-минимальной*, если среди ее унарных полиномиальных операций есть лишь один неконстантный идемпотент — тождественное преобразование. Алгебра называется *мальцевской*, если существует термальная операция $m(x,y,z)$, удовлетворяющая тождествам $m(x,y,y) = m(y,y,x) = x$.

Теорема 1. *E-минимальная мальцевская алгебра с p^2 элементами, где p — простое число, определяется с точностью до полиномиальной эквивалентности своей решеткой конгруэнций и действием на ней многоместных коммутаторов.*

Теорема 2. *Множество конечных попарно полиномиально неэквивалентных E-минимальных мальцевских алгебр счетно.*

№854, 21.10.1999. А.А.Крохин, А.П.Семигродских. *Конгруэнции на решетках клонов.*

Пусть A — конечное множество, L_A — решетка всех клонов на A. При $|A| = 2$ полностью описано строение произвольной конгруэнции на решетке L_A. Из этого описания следует, что решетка L_A имеет наибольшую собственную (т.е. не совпадающую с универсальным отношением) конгруэнцию η, причем соответствующая факторрешетка L_A/η конечна.

В случае $|A| > 2$ доказано, что любой клон на A, содержащий все унарные функции или порождаемый некоторым множеством унарных функций, образует одноэлементный класс любой собственной конгруэнции на L_A. В качестве следствия получаются утверждения о неразложимости решетки L_A в прямое произведение, об отсутствии в L_A нетривиальных дистрибутивных и дуально дистрибутивных элементов, а также о наличии в L_A наибольшей собственной конгруэнции.

№855, 04.11.1999. М.В.Волков. *Слова, минимизирующие образ функции.*

Над каждым конечным алфавитом A построено слово w_n длины $O(|A|^{\frac{1}{2}(n^2-n)})$ со следующим свойством: для любого гомоморфизма $\varphi : A^+ \to T_n$ (где T_n — полугруппа всех преобразований n-элементного множества) ранг преобразования $w_n\varphi$ минимален среди рангов всех преобразований вида $v\varphi$, где v пробегает A^+. Обсуждены некоторые приложения построенного слова к теории конечных автоматов.

№856, 11.11.1999. М.В.Волков. *Два замечания о конечной базируемости конечных полугрупп.*

Предложение 1. *Для любого $n \geq 5$ многообразие, порожденное всеми n-элементными конечно базируемыми полугруппами, не конечно базируемо.*

Полугруппа называется *слабо конечно базируемой*, если она содержится в некотором конечно базируемом локально конечном многообразии.

Предложение 2. *Псевдомногообразие всех конечных слабо конечно базируемых полугрупп конечно базируемо.*

№857, 25.11.1999, и №863, 02.03.2000. В.В.Кабанов. *Параметры доминирования и неприводимости в графах.*

Доклад по докторской диссертации.

№858, 02.12.1999, и №859, 09.12.1999. В.Ю.Попов. *О независимых системах тождеств.*

Теорема 1. *Существует система тождеств полугрупповой сигнатуры такая, что многообразие моноидов и многообразие полугрупп, заданные этой системой, не обладают независимыми базисами тождеств.*

Теорема 2. *Существуют независимо базируемое многообразие $\mathcal{M}$ полугрупп (группоидов, моноидов, колец) и многообразие $\mathcal{N} \supset \mathcal{M}$ такие, что $\mathcal{M}$ не имеет независимого базиса в $\mathcal{N}$.*

Теорема 3. *Не существует алгоритма, определяющего по произвольной конечной системе Σ тождеств группоидной (моноидной, групповой, кольцевой) сигнатуры, является ли Σ независимой.*

№860, 16.12.1999. О.Г.Харлампович (Монреаль). *Уравнения над вполне свободно аппроксимируемыми группами.*

Группа G называется *вполне свободно аппроксимируемой*, если для любых неединичных элементов $x_1, \ldots, x_n \in G$ существует гомоморфизм φ группы G в свободную группу счетного ранга такой, что $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n) \neq 1$.

Указана связь вполне свободно аппроксимируемых групп с уравнениями в свободной группе.

Теорема 1 (Харлампович, Мясников). *Любая конечно порожденная вполне свободно аппроксимируемая группа получается из свободной группы конечным числом расширений централизатора.*

Теорема 2. *На любой конечно порожденной вполне свободно аппроксимируемой группе существует свободная регулярная функция длины в* $\mathbb{Z}^n$.

Эти теоремы позволяют дать описание множества решений любой системы уравнений над конечно порожденной вполне свободно аппроксимируемой группой.

№861, 10.02.2000. М.В.Волков. *О псевдомногообразиях, порожденных регулярными полугруппами.*

Класс конечных [регулярных] полугрупп называется [e-]*псевдомногообразием*, если он замкнут относительно взятия конечных прямых произведений, гомоморфных образов и [регулярных] подполугрупп. Пусть A_2^1 и B_2^1 — хорошо известные шестиэлементные моноиды, задаваемые следующими копредставлениями (в классе моноидов с нулем):

$$A_2^1 = \langle a, b \mid aba = a^2 = a,\ bab = b,\ b^2 = 0 \rangle,$$
$$B_2^1 = \langle a, b \mid aba = a,\ bab = b,\ a^2 = b^2 = 0 \rangle.$$

Теорема. *Если* e-*псевдомногообразие* $\mathcal{V}$ *регулярных полугрупп содержит моноид* B_2^1, *не содержит моноид* A_2^1 *и содержит не все конечные инверсные полугруппы, то псевдомногообразие полугрупп, порожденное* $\mathcal{V}$, *не имеет конечного базиса псевдотождеств.*

Следствия этого результата включают, в частности, теорему Сапира о том, что если многообразие, порожденное конечной инверсной полугруппой, содержит моноид B_2^1, то оно не конечно базируемо, и теорему Хиггинса–Марголиса о том, что псевдомногообразие, порожденное е-псевдомногообразием всех апериодических инверсных полугрупп, строго содержится в классе всех апериодических полугрупп с коммутирующими идемпотентами.

№862, 17.02.2000. А.А.Булатов. *Сложность вычислений и псевдомногообразия конечных алгебр.*

Изучается следующая комбинаторная задача ВЫПОЛНИМОСТЬ: *выяснить выполнимость данной* $\exists$-*формулы в классе моделей на фиксированном конечном множестве* D.

Через $CSP(A)$ обозначим класс частных задач ВЫПОЛНИМОСТЬ, в которых предикаты интерпретируются отношениями из некоторого множества Γ отношений на D, а A — такая алгебра на D, что ее основными операциями являются все операции, сохраняющие отношения из Γ.

Теорема. *Класс конечных алгебр* A *таких, что задачи из класса* $CSP(A)$ *разрешимы за полиномиальное время, является псевдомногообразием.*

№864, 09.03.2000. Ю.В.Нагребецкая. *О границах разрешимости колец целочисленных матриц.*

Исследуются границы разрешимости кольца $\mathbb{Z}^{n\times n}$ всех целочисленных матриц данного порядка n и класса $\{\mathbb{Z}^{n\times n} \mid n \in M\}$, где M — некоторое рекурсивное множество.

№865, 16.03.2000. Ю.В.Нагребецкая. *О граничной эквивалентности колец и матричных колец над ними.*

Изучается вопрос о совпадении границы разрешимости относительно схемной и схемно-альтернативной иерархий кольца всех матриц данного порядка над ассоциативным кольцом R с единицей и границы разрешимости самого кольца R в сигнатуре без констант и в сигнатуре с единицей. Этот же вопрос исследуется и для множества всех $k \times \ell$-матриц, где k и ℓ не больше некоторого натурального n, с естественно определенными на нем операциями.

№866, 23.03.2000. В.Б.Репницкий, А.С.Верницкий. *О полугруппах, представимых изотонными преобразованиями цепей.*

Дается абстрактная характеристика класса полугрупп, вложимых в полугруппы эндоморфизмов конечных цепей.

№867, 06.04.2000. А.П.Семигродских. *О замкнутых классах примитивно рекурсивных функций.*

Замкнутым классом называется класс функций, замкнутый относительно всевозможных суперпозиций. Рассматриваются замкнутые классы примитивно рекурсивных функций. Под *рекурсивно замкнутым классом* понимается замкнутый класс, который также замкнут относительно примитивной рекурсии. Описано упорядоченное по включению множество рекурсивно замкнутых классов, порожденных замкнутыми подклассами замкнутого класса, порожденного функциями 0, x и $x + 1$. Для большинства классов этого множества дано внутреннее описание.

№868, 13.04.2000, и №871, 18.05.2000. И.Ю.Жильцов. *Сингулярные слова.*
Решена одна из двух задач, к которым Ж. Алмейда и Б. Стейнберг свели известную проблему Крона–Роудза о вычислимости групповой сложности конечных полугрупп. А именно, для класса всех конечных апериодических полугрупп найден базис эпигрупповых тождеств и доказана разрешимость эпигрупповой эквациональной теории. Основной инструмент доказательства — сингулярные слова, т.е. классы некоторой конгруэнции свободной алгебры с одной ассоциативной бинарной операцией и счетным семейством унарных операций. Показано, что понятия примитивности и сопряженности можно распространить с обычных слов на нормальные сингулярные с сохранением всех основных комбинаторных свойств.

№869, 20.04.2000. А.Б.Шабунин (Чебоксары). *Свободные и конечно определенные алгебры многообразий квазигрупп и многообразия Кантора.*

Доклад по докторской диссертации.

№870, 11.05.2000. Ю.В.Нагребецкая. *Границы разрешимости матричных алгебр и алгебр преобразований.*

Доклад по кандидатской диссертации.

В.Ю.Попов. *Алгоритмические проблемы для многообразий полугрупп и колец.*
Обзор результатов, полученных автором за последние годы.

№872, 01.06.2000. Б.М.Верников. *Решетки многообразий полугрупп и решетки конгруэнций унарных алгебр.*

Обзор результатов, полученных автором за последние годы.