Заседания семинара «Алгебраические системы»*Руководитель Л. Н. Шеврин*

№873, 17.08.2000. А. С. ВЕРНИЦКИЙ (Лондон). *О вложениях инверсных полугрупп.*

Теорема 1. *Симметрическая инверсная полугруппа на n -элементном множестве вкладывается в некоторую 2-порожденную подполугруппу симметрической инверсной полугруппы на $(n + 2)$ -элементном множестве.*

Пусть A, B, C — классы всех конечных полугрупп, представимых соответственно эндоморфизмами, частичными эндоморфизмами, частичными автоморфизмами конечных цепей.

Теорема 2. *Проблема вхождения конечной полугруппы в класс B или в класс C является NP-полной.*

Соответствующий вопрос для класса A остается открытым.

№874, 05.10.2000. Л. Н. ШЕВРИН. *Памяти Алексея Ивановича Кострикина (1929–2000). Памяти Ильи Юрьевича Жильцова (1972–2000).*

№875, 12.10.2000. К. Л. САФИН. *Идеалы итеративных алгебр.*

Доклад по кандидатской диссертации.

№876, 26.10.2000. А. Е. ФРИД (Новосибирск). *О комбинаторных свойствах DOL-слов.*

Доклад по кандидатской диссертации.

А. К. КИСЛЯКОВ. *Алгоритмы поиска оптимальных источников в графах некоторых типов.*

Доклад по кандидатской диссертации.

№877, 02.11.2000. А. Г. ПИЛУС (Новосибирск). *Эквивалентность кардиналов в логике 2-го порядка (алгебраический аспект).*

Обзор результатов Ю. Л. Ершова, Р. Маккензи, Ю. М. Важенина, докладчика, С. Шелаха, Г. Роуза и других о связи элементарной эквивалентности симметрических групп, симметрических полугрупп, свободных алгебр и других подобных объектов с эквивалентностью в логике 2-го порядка кардиналов, над которыми строятся соответствующие объекты.

№878, 23.11.2000. Б. М. ВЕРНИКОВ. *Строение решеток многообразий нильполугрупп и квазитождества в этих решетках.*

Доказано, что решетка подмногообразий произвольного многообразия нильполугрупп антиизоморфна подпрямому произведению не более чем счетной серии решеток, каждая из которых является подрешеткой решетки конгруэнций некоторого G -множества. Получено также описание комбинаторных многообразий полугрупп, решетка подмногообразий которых принадлежит наперед заданному квазимногообразию модулярных решеток.

№879, 07.12.2000. В. Ю. Попов. *О независимо разбиваемых системах тождеств.*

Система тождеств Σ называется *независимо разбиваемой*, если существует разбиение $\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ такое, что $\text{var}(\Sigma \setminus \Sigma_n) \neq \text{var} \Sigma$ для любого $n \in \mathbb{N}$. При этом система Σ называется *конечно независимо разбиваемой*, если каждая из подсистем Σ_n конечна.

Теорема 1. *Существует конечно независимо разбиваемая система полугрупповых тождеств, не эквивалентная никакой независимой системе.*

Теорема 2. *Существует независимо разбиваемая система полугрупповых [или моноидных] тождеств, не эквивалентная никакой конечно независимо разбиваемой системе.*

Теорема 3. *Существует система полугрупповых [моноидных] тождеств полугрупп [моноидов], не эквивалентная никакой конечной системе и никакой независимо разбиваемой системе.*

Теорема 4. *Существуют независимо базлируемые многообразия полугрупп $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ такие, что $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ и $\mathcal{X}$ задается в $\mathcal{Y}$ конечно независимо разбиваемой системой тождеств, не эквивалентной независимой системе.*

Теорема 5. *Существуют независимо базлируемые многообразия полугрупп $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ такие, что $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ и $\mathcal{X}$ задается в $\mathcal{Y}$ независимо разбиваемой системой тождеств, не эквивалентной конечно независимо разбиваемой системе.*

Теорема 6. *Существуют независимо базлируемые многообразия полугрупп $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ такие, что $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ и $\mathcal{X}$ не может быть задано в $\mathcal{Y}$ ни конечной, ни независимо разбиваемой системой тождеств.*

№880, 14.12.2000. М. В. Волков. *О международных алгебраических конференциях в 2000 году.*

Информация о следующих международных конференциях:

- III Международный коллоквиум по словам, языкам и комбинаторике (Киото, март);
- Алгебраические системы, формальные языки и вычисления (Киото, март);
- Логика и приложения (Новосибирск, май);
- 60-е рабочее совещание по общей алгебре (Дрезден, июнь);
- Коллоквиум по полугруппам (Сегед, июль);
- Логика, алгебра и формальная верификация конкурентных систем (Дарштупль, Германия, ноябрь).

№881, 21.12.2000; №883, 08.02.2001; №884, 15.02.2001. Л. Н. Шеврин. *Воспоминания об алгебраических конференциях XX столетия, о встречах и контактах с патриархами алгебры.*

Рассказано о наиболее примечательных из тех многочисленных конференций, в которых участвовал докладчик. В частности, представлена краткая история всесоюзных алгебраических конференций: 1) Москва, 1958; 2) Москва, 1959; 3) Свердловск, 1960; 4) Киев, 1962; 5) Новосибирск, 1963; 6) Минск, 1964; 7) Кишинев, 1965; 8) Рига, 1967; 9) Гомель, 1968; 10) Новосибирск, 1969; 11) Кишинев, 1971;

12) Свердловск, 1973; 13) Гомель, 1975; 14) Новосибирск, 1977; 15) Красноярск, 1979; 16) Ленинград, 1981; 17) Минск, 1983; 18) Кишинев, 1985; 19) Львов, 1987; 20) Новосибирск, 1989; 21) Барнаул, 1991. Две последние конференции были в действительности международными. Первая из них была посвящена памяти А. И. Мальцева и отличалась особенным масштабом — более 800 участников, в том числе более 200 иностранных; вторая была посвящена памяти А. И. Ширшова. Из зарубежных конференций особое внимание в докладе было уделено первой международной конференции по теории полугрупп (Чехословакия, 1968), нескольким конференциям по универсальной алгебре или теории полугрупп в Обервольфахе (ФРГ, 1971, 1976, 1981, 1991) и конференциям в честь 65-летия Г. Престона (Австралия, 1990), 80-летия Г. Биркгофа (ФРГ, 1991) и 80-летия Ш. Шварца (Словакия, 1994).

Другая часть доклада была посвящена воспоминаниям о П. Г. Конторовиче (1905–1968), А. Г. Куроше (1908–1971), А. И. Мальцеве (1909–1967), Д. К. Фаддееве (1907–1989), А. Клиффорде (1908–1992), Г. Биркгофе (1911–1996), Ш. Шварце (1914–1996) и некоторых других лидерах алгебры 2-й половины XX столетия.

№882, 31.01.2001. О. Г. ХАРЛАМПОВИЧ (МОНРЕАЛЬ). *Диофантова геометрия над свободными группами.*

Указана характеристика конечно порожденных групп, элементарно эквивалентных свободной неабелевой группе, как координатных групп некоторых систем квадратичных уравнений.

№885, 22.02.2001. В. Ю. ПОПОВ. *О независимо разбиваемых системах квазитожеств.*

Пусть Σ — множество предложений языка логики первого порядка. Оно называется *независимым*, если для любого $\varphi \in \Sigma$ предложение φ не выводимо из множества $\Sigma \setminus \{\varphi\}$. Множество Σ называется *конечно независимо разбиваемым*, если существует разбиение $\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ такое, что для любого n множество Σ_n конечно и не выводимо из $\Sigma \setminus \Sigma_n$.

Теорема. *Существует квазимногообразие универсальных алгебр, имеющее конечно независимо разбиваемый базис квазитожеств, но не имеющее независимого базиса квазитожеств.*

№886, 22.03.2001. Б. М. ВЕРНИКОВ. *Квазитожества в решетках многообразий нильполугрупп.*

Пусть L — произвольное квазимногообразие решеток, не содержащее 5-элементной модулярной недистрибутивной решетки. Доказано, что решетка подмногообразий многообразия нильполугрупп принадлежит L тогда и только тогда, когда она дистрибутивна. С учетом известных ранее результатов это дает полное описание многообразий нильполугрупп с указанным свойством. Аналогичный результат получен о решетках надкоммутативных подмногообразий надкоммутативных многообразий полугрупп.

№887, 05.04.2001. В. Н. РЕМЕСЛЕННИКОВ (ОМСК). *О квазимногообразии, порожденном свободной метабелевой группой.*

Пусть F — свободная нециклическая метабелева группа и $\text{qvar } F$ — квазимногообразие групп, порожденное F ; оно не зависит от ранга F . Найдено рекурсивное

множество аксиом для $\text{qvar } F$ и доказана теорема, характеризующая структуру конечно порожденных групп из $\text{qvar } F$ с четырех разных точек зрения. Эти результаты получены совместно с Ральфом Штёрмом (Манчестер).

№888, 12.04.2001. А. С. ВЕРНИЦКИЙ (Лондон). *Компьютерные вирусы как преобразования множества файлов.*

Классическое определение компьютерного вируса, принадлежащее Ф. Коэну, сформулировано на языке машин Тьюринга. Его нельзя напрямую применить к программам, работающим на машинах, использующих файловые системы. Для таких машин необходимо другое определение вируса, которое сформулировано в докладе. С новым определением становится проще доказательство того, что ни множество вирусов, ни его дополнение не являются рекурсивно перечислимыми.

№889, 19.04.2001. Д. Я. ШАРАЕВ. *Информатика и Декарт.*

Рассказано о жизни и научной деятельности Рене Декарта и о влиянии его идей на становление информатики.

№890, 26.04.2001, и №891, 10.05.2001. А. А. БУЛАТОВ. *Комбинаторные задачи и структура конечных алгебр.*

Рассматривается комбинаторная задача CSP (Constraint Satisfaction Problem, задача удовлетворения ограничений). Каждому подклассу задачи CSP ставится в соответствие конечная алгебра так, что временная сложность алгоритма, решающего задачи из соответствующего подкласса, зависит лишь от этой алгебры.

Основная проблема. *Охарактеризовать полиномиальные алгебры, т. е. алгебры, соответствующие полиномиальным классам задач.*

Гипотеза. *Алгебра полиномиальна тогда и только тогда, когда она не имеет делителей, термально эквивалентных нетривиальным унарным алгебрам.*

Приведен ряд примеров полиномиальных и NP-полных алгебр и построены алгоритмы, решающие задачи, соответствующие полиномиальным алгебрам.

№892, 17.05.2001. М. В. ВОЛКОВ, И. А. ГОЛЬДБЕРГ. *Проблема конечного базиса для полугрупп треугольных матриц.*

Доказано, что полугруппа всех треугольных $n \times n$ -матриц над полем K является существенно бесконечно базлируемой тогда и только тогда, когда $n > 3$ и $|K| > 2$.

№893, 31.05.2001. Ю. В. НАГРЕБЕЦКАЯ. *Элементарные свойства классических матричных алгебр.*

Обозреваются результаты разных авторов о разрешимости элементарных теорий матричных алгебр $GL(n, R)$, $UT(n, R)$, $R^{n \times n}$, $NT(n, R)$ над ассоциативным кольцом R с единицей, а также результаты об элементарной различимости таких алгебр. В развитие этой темы ставится вопрос о совпадении границ разрешимости для каждой матричной алгебры и соответствующего кольца и вопрос о совпадении границ различимости для однотипных алгебр, рассматриваемых над различными основными кольцами при различных порядках матриц.

Приводятся следующие результаты докладчика.

Теорема 1. *Границы разрешимости в схемной иерархии группы $GL(n, F)$ и поля F нулевой характеристики совпадают для любого $n \geq 2$.*

Теорема 2. *Границы разрешимости в схемной иерархии кольца $R^{n \times n}$ и кольца R , являющегося телом или целостным кольцом, совпадают для любого $n \geq 1$.*

№894, 02.08.2001. А. С. ВЕРНИЦКИЙ (Лондон). *Об определяющих соотношениях в группоидах.*

Определяющие соотношения в копредставлении группоида суть формальные равенства термов, порождающие все соотношения в этом группоиде. Множество соотношений рассматривается как алгебра, в которой определяющие соотношения являются порождающим множеством. Эта алгебра имеет сигнатуру $\langle 2, 2, 1 \rangle$. Предлагается некоторое абстрактное описание этой алгебры.

№895, 04.10.2001. В. Н. РЕМЕСЛЕННИКОВ (ОМСК). *Размерность алгебраических множеств над свободной метабелевой группой.*

Определены дискретные инварианты для неприводимых алгебраических множеств над свободной метабелевой группой. Приведены оценки размерности для произвольного алгебраического множества.

№896, 11.10.2001. Ю. А. НАЗЫРОВА (ЧЕЛЯБИНСК). *Слойно проективные решетки.*

Доклад по кандидатской диссертации.

№897, 18.10.2001. Б. М. ВЕРНИКОВ. *Мультипликативные свойства вполне инвариантных конгруэнций на относительно свободных полугруппах.*

Конгруэнции α и β на данной алгебре называются *слабо перестановочными*, если $\alpha\beta = \beta\alpha$, и *2.5-перестановочными*, если $\alpha \vee \beta = \alpha\beta \cup \beta\alpha$ (где $\vee$ — объединение в решетке конгруэнций, а $\cup$ — теоретико-множественное объединение бинарных отношений). Полностью описаны многообразия полугрупп, на свободных объектах которых вполне инвариантные конгруэнции 2.5-перестановочны, и комбинаторные многообразия полугрупп, на свободных объектах которых вполне инвариантные конгруэнции слабо перестановочны. Можно отметить такие следствия этого описания.

1. Для вполне регулярных многообразий полугрупп 2.5-перестановочность любых двух вполне инвариантных конгруэнций на свободных объектах многообразия эквивалентна перестановочности любых двух таких конгруэнций.

2. Если нильмногообразие полугрупп имеет дистрибутивную решетку подмногообразий, то вполне инвариантные конгруэнции на его свободных объектах 2.5-перестановочны.

3. Если многообразие полугрупп комбинаторно и вполне инвариантные конгруэнции на его свободных объектах 2.5-перестановочны, то решетка его подмногообразий принадлежит многообразию, порожденному 5-элементной модулярной недистрибутивной решеткой.

№898, 25.10.2001. Д. С. АНАНИЧЕВ, М. В. ВОЛКОВ. *О международной конференции «Прогресс в формальных языках» (Вена, июль 2001 г.).*

А. А. БУЛАТОВ. *О международных конференциях «Школа по теории ручных конгруэнций» (Будапешт, июль 2001 г.), «Симпозиум по теории вычислений»*

(Крит, Греция, июль 2001 г.), «Летняя школа по общей алгебре и упорядоченным множествам» (Стара Лесна, Словакия, сентябрь 2001 г.).

Л. Н. ШЕВРИН. *О международной конференции по математической логике, алгебре и теории множеств, посвященной 100-летию со дня рождения академика П. С. Новикова* (Москва, август 2001 г.).

А. М. ШУР. *О международной конференции «Математические основы компьютерных наук»* (Марианске Лазне, Чехия, август 2001 г.).

№899, 08.11.2001. Е. С. АРАПОВА-АРАПИНА (ТАГАНРОГ). *Частичные полурешетки полугрупп Брандта.*

Доклад по кандидатской диссертации.

№900, 15.11.2001. Л. Н. ШЕВРИН. *Некоторые итоги и перспективы работы семинара «Алгебраические системы».*

Брошен ретроспективный взгляд на исследования, проведенные участниками семинара за 35 лет его существования, и на другие аспекты работы семинара. (О различных сторонах деятельности семинара до 1999 года рассказано в статье докладчика, опубликованной в «Известиях Уральского государственного университета», №10.) Среди разрабатываемых направлений заметное место за последние годы стали занимать вопросы, относящиеся к комбинаторным проблемам алгебры, прикладной комбинаторике и проблематике сложности вычислений. Значительно расширились в последнее десятилетие международные контакты участников семинара.

Ю. М. ВАЖЕНИН. *Некоторые статистические данные работы семинара «Алгебраические системы» за последние 100 заседаний.*

За указанный период (с апреля 1997 по ноябрь 2001 года) было заслушано 128 докладов, из которых 17 сделаны иногородними докладчиками из России, Австралии, Великобритании и Канады (Новосибирск, Омск, Таганрог, Чебоксары, Челябинск, Колчестер, Лондон, Монреаль, Хобарт). Участниками семинара опубликовано свыше 200 научных и учебно-методических работ. Среди них более 30 статей в центральных российских математических журналах, около 40 статей в иностранных журналах, около 30 статей в региональных математических сборниках, свыше 70 тезисов докладов на всероссийских и международных научных конференциях, около 20 книг (учебники, учебные пособия, монографии).

№901, 22.11.2001. Ю. В. КОНОВАЛОВА, А. М. ШУР. *Теорема о взаимодействии периодов для частичных слов.*

Частичным n -словом над конечным алфавитом Σ называется частичное отображение $w : \{1, \dots, n\} \rightarrow \Sigma$. Доказан аналог теоремы Файна–Вильфа о взаимосвязи периодов слов. Дано необходимое и достаточное условие однозначной восстанавливаемости периодических частичных слов.

№902, 06.12.2001. Л. Н. ШЕВРИН. *Памяти Альберта Ивановича Старостина (1931–2001).*

П. В. СЛЕПЦОВ. *Алгоритм построения магических квадратов четного порядка.*

Магическим квадратом порядка n называется $n \times n$ -матрица (α_{ij}) , для которой $\sum_{i=1}^n \alpha_{ik} = \sum_{j=1}^n \alpha_{lj} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}$ для любых $k, l \in \{1, \dots, n\}$. Описан общий алгоритм построения магического квадрата четного порядка.

№903, 13.12.2001. А. А. Булатов. *Задача ВЫПОЛНИМОСТЬ на трехэлементном множестве.*

Изучаются подзадачи ВЬП(3;А) задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ на трехэлементном множестве, индексированные трехэлементными алгебрами А. Сформулирован критерий, позволяющий по данной алгебре А определить, существует ли полиномиальный алгоритм, решающий подзадачу ВЬП(3;А).

№904, 20.12.2001. Р. И. Григорчук (Москва). *Ветвящиеся группы и их свойства.*

Ветвящиеся группы — это группы, действующие на корневых сферически однородных деревьях, структура решетки субнормальных подгрупп которых подобна структуре самого дерева. Они играют важную роль при изучении минимально бесконечных групп (т. е. бесконечных групп, всякая истинная фактор-группа которых конечна), при изучении периодических групп, групп промежуточного роста и других важных классов групп.

В докладе изложены недавние (полученные совместно с Джоном Стюартом Уилсоном) результаты о свойствах жесткости ветвящихся групп. Первый из них гласит, что при некоторых дополнительных условиях действие группы на дереве ветвящимся образом по существу единственно. Остальные результаты относятся к 3-порожденной 2-группе G промежуточного роста, построенной докладчиком в 1980 году.

Теорема 1. *Всякая бесконечная конечно-порожденная подгруппа группы G абстрактно соизмерима этой группе.*

Теорема 2. *Группа G обладает свойством отделимости конечно-порожденных подгрупп, и, следовательно, проблема вхождения в конечно-порожденные подгруппы группы G алгоритмически разрешима.*

М. В. Зайцев (Москва). *Тождества и функции роста.*

Рассказано о положительном решении известной проблемы Амицура для ассоциативных алгебр над полем характеристики 0 и для конечномерных алгебр Ли. Построена трехступенно разрешимая алгебра Ли ассоциативного типа, экспонента которой либо не существует, либо не является целым числом.