

Заседания семинара «Алгебраические системы»

Руководитель Л. Н. Шеврин

№ 905, 07.02.2002. Т. Ю. Финк (ОМСК). *Конечные полные и конечные редуцированные полугруппы.*

Дана характеристика полных конечных и минимальных полных конечных полугрупп. Доказано, что любая конечная полугруппа вложима в полную конечную полугруппу. Описаны псевдомногообразия конечных редуцированных полугрупп. Охарактеризованы примарные, примарные полные и примарные редуцированные конечные полугруппы, а также псевдомногообразия примарных конечных полугрупп.

№ 906, 14.02.2002. Е. А. Толкачева (НАРЬЯН-МАР). *Аппроксимация трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр.*

Доклад по кандидатской диссертации.

№ 907, 21.02.2002. М. В. Волков, В. Ю. Попов. *Сложность вычислений и конечные полугруппы.*

Теорема 1. *Существует 10-элементная полугруппа, проблема выполнимости квазитожеств в которой co-NP-полна.*

Теорема 2. *Существует конечная полугруппа, состоящая не более чем из 2^{1700} элементов, проблема выполнимости тождеств в которой co-NP-полна.*

№ 908, 28.02.2002. О. Г. Харлампович (МОНРЕАЛЬ). *Сложность алгоритмов в теории групп.*

Исследуется сложность в среднем таких алгоритмических проблем для конечно порожденных групп, как проблема равенства слов и проблема вхождения. В частности, обсуждаются приложения результата И. Каповича и А. Мясникова о том, что если в конечно порожденной группе G проблема равенства слов решается за субэкспоненциальное время и G имеет подгруппу конечного индекса, гомоморфным образом которой является неэлементарная гиперболическая группа, то проблема равенства слов решается в среднем за линейное время равномерно по отношению ко множеству всех инвариантных по длине мер на G . Этот результат можно применить, например, ко всем группам кос.

№ 909, 07.03.2002. О. В. РАСИН. *Алгоритмы проверки изоморфизмов графов.*

Пусть $\mathcal{G}_d$ – класс связных графов, степени вершин которых не превосходят фиксированного натурального числа d . Бабаи и Лаксом предложен полиномиальный алгоритм, решающий проблему изоморфизма графов в классе $\mathcal{G}_d$.

Обозначим через $B\mathcal{G}_d$ класс связных графов, блоки которых принадлежат $\mathcal{G}_d$.

Теорема. *Для каждого натурального числа d существует полиномиальный алгоритм, решающий проблему изоморфизма графов в классе $B\mathcal{G}_d$.*

Напомним, что почти деревом с параметром k , где k – натуральное число, называется связный граф $G = (V, E)$, для которого существует остовное дерево T такое, что каждый блок B графа G содержит не более чем k не принадлежащих дереву T ребер. Каждое почти дерево с параметром k принадлежит классу $B\mathcal{G}_{2k}$. Поэтому верно

Следствие. Для каждого натурального числа k существует полиномиальный алгоритм, решающий проблему изоморфизма для почти деревьев с параметром k .

№ 910, 14.03.2002. R. PÖSCHEL (DRESDEN). *A relational approach to Tame Congruence Theory.*

In the talk a relational view to Tame Congruence Theory (TCT) was presented (which – by a remark of A. Bulatov – better should be called an approach to a «Tame Congruence Theory for relational systems»). Based on ideas of K. Kearnes developed in 2001 many notions of TCT are very naturally definable (even in a more general form) for relational systems corresponding to ordinary universal algebras (using the Galois correspondence between invariant relations and operations).

In the talk there was shown how minimal algebras (one crucial notion for TCT) can be characterized by a ternary relation (which must be the union of invariant relations of the algebra under consideration). Further, Pálffy's theorem (characterizing minimal algebras by 5 types) was discussed under the relational point of view, in particular, in connection with the theorem (known from geometry) that affine geometries under certain conditions correspond to vector spaces. This led to the question if there is an «easy» relational proof of Pálffy's theorem.

№ 911, 21.03.2002. R. PÖSCHEL (DRESDEN). *Is there a clone theory for coalgebras?*

The theory of coalgebras developed very fast during the last two decades within computer science. Coalgebras play an important role in describing dynamic systems (automata, transition systems, etc.). A coalgebra is (in categorical setting) a morphism (mapping) $\alpha : A \rightarrow F(A)$ where F is a functor (this dualizes the notion of an algebra which can be described by morphisms of the form $\alpha : F(A) \rightarrow A$). In the talk it was shown that for special functors F (namely so-called monads – this is a generalization of the notion of a monoid) there exists a theory of invariants (which might be called clone theory for coalgebras): the coalgebras form a monoid, which can be characterized by so-called invariant co-relations. Every coalgebra is equivalent in some sense to an idempotent coalgebra, which in turn can be characterized by ternary co-relations. Most of the results presented in this talk were developed by Dragan Mašulović (Novy Sad/Dresden).

№ 912, 28.03.2002. В. Н. РЕМЕСЛЕННИКОВ (ОМСК). *Мультипликативные меры на свободных группах.*

Доклад по статье докладчика и его учеников А. В. Боровика и А. Г. Мясникова. На свободной группе $F(X)$ вводится мера Чезаро, позволяющая классифицировать комбинаторики, т. е. множества редуцированных слов $R \subseteq F(X)$, и определить меры комбинаторик. Это позволяет определить измеримость алгоритмов, проверяющих равенство слов в конечно определенных группах, рассматриваемых как факторгруппы вида $F(X)/N$.

№ 913, 04.04.2002. О. В. КНЯЗЕВ (ОМСК). *О наследственно чистых алгебрах.*

Приводится описание наследственно вербально чистых алгебр в классах всех идемпотентных полугрупп с единицей, всех полугрупп с нулем, всех групп, всех клиффордовых полугрупп и всех полугрупп.

№914, 11.04.2002, и №915, 18.04.2002. В. Г. ЛАБУНЕЦ. *Является ли головной мозг компьютером, работающим в алгебре Клиффорда?*

Предложен новый подход к распознаванию цветных и мультиспектральных объектов в евклидовых и неевклидовых n -мерных пространствах. Он основан на применении коммутативных гиперкомплексных алгебр, классических и квантовых алгебр Клиффорда. Показано, что многомерные коммутативные алгебры, классические и квантовые алгебры Клиффорда могут быть использованы для построения адекватных математических моделей процессов обработки цветных изображений в глазах и головном мозге животных.

№ 916, 25.04.2002. В. Ю. Попов. *Алгоритмические проблемы для многообразий полугрупп, моноидов, групп и колец.*

Доклад по докторской диссертации.

№ 917, 28.04.2002. А. В. Лутов. *О минимальных жестких графах и решетках.*

Рассматриваются обыкновенные неориентированные графы без петель. Граф называется *минимальным жестким*, если он является жестким, т.е. не имеет автоморфизмов, кроме тождественного, и любой его собственный подграф, имеющий более одной вершины, не является жестким.

Теорема 1. *Следующие два графа и только они являются минимальными жесткими.*



Теорема 2. *Существует счетная эндоморфно жесткая решетка, не имеющая собственных эндоморфно жестких подрешеток.*

Р. В. Хайретдинов. *О проблеме Уотермена.*

Пусть L – решетка и G – ее граф покрываемости, т.е. граф $\langle L; \rho \rangle$, в котором $x \rho y \Leftrightarrow x \prec y \vee y \prec x$. Очевидно $\text{Aut } L \subseteq \text{Aut } G$. Решетка называется *решеткой Уотермена*, если $\text{Aut } L = \text{Aut } G$. Известна проблема Биркгофа: найти все конечные решетки Уотермена.

Теорема. *Для любого $n \geq 8$ существует по крайней мере $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ неизоморфных n -элементных решеток Уотермена.*

№ 918, 16.05.2002. А. А. Булатов. *Алгебраический подход к исследованию комбинаторных задач.*

Изучается комбинаторная задача CSP (Constraint Satisfaction Problem, задача удовлетворения ограничений), в которой требуется определить, выполнима ли диофантова формула в данной модели. Для множества предикатов Γ через $\text{CSP}(\Gamma)$ обозначается класс задач CSP, в которых интерпретации предикатных символов берутся из Γ .

Каждому классу вида $\text{CSP}(\Gamma)$ сопоставляется конечная алгебра A_Γ и, обратно, каждой конечной алгебре A ставится в соответствие класс $\text{CSP}(A)$ задач CSP таким образом, что $\text{CSP}(\Gamma)$ и $\text{CSP}(A)$ имеют одинаковую вычислительную сложность.

Рассматриваются четыре проблемы.

Проблема 1. *Охарактеризовать конечные алгебры A , для которых задачи из класса $\text{CSP}(A)$ полиномиальны.*

Проблема 2. Выяснить, верно ли, что для любой конечной алгебры A класс $CSP(A)$ либо состоит из полиномиальных задач, либо содержит NP -полную задачу.

Проблема 3. Разработать алгоритм, определяющий по алгебре A , полиномиальны ли задачи из класса $CSP(A)$.

Проблема 4. Разработать алгоритмы, решающие задачи из класса $CSP(A)$ в тех случаях, когда они полиномиальны.

Обсуждаются продвижения, полученные в решении указанных проблем, а также некоторые разновидности задачи CSP .

№ 919, 30.08.2002. G. PILZ (LINZ, AUSTRIA). *The beauty and usefulness of one-sided distributive systems.*

We consider (arbitrary) mappings from a group (semigroup, ring, lattice, ...) into itself. In contrast to just «linear» maps (i.e., endomorphisms) on abelian groups or rings, where we have a ring structure, we will «loose» one distributive law in the general case. This gives rise to «near-rings» (mappings on groups), «seminear-rings» (mappings on semigroups), and so on. These structures come to life in many situations, have a sophisticated structure theory, and give rise to many applications in geometry, probability theory, in the design of statistical experiments, in coding theory, and so on.

№ 920, 10.10.2002. М. В. Волков. *О международных конференциях в 2002 году.*

Информация о следующих международных конференциях:

- Международная конференция по современной алгебре (Нэшвилл, США, май);
- Первое объединенное заседание Американского математического общества и Итальянского математического союза (Пиза, июнь);
- Международный семинар по полугруппам, автоматам и формальным языкам (Крема, Италия, июнь);
- Международная конференция по полугруппам и группам (Порто, июнь);
- Международная конференция «Прогресс в формальных языках» (Киото, сентябрь);
- Международный семинар «Алгебраические системы, формальные языки и стандартные и нестандартные теории вычислений» (Киото, сентябрь).

№ 921, 17.10.2002. А. П. СЕМИГРОДСКИХ. *О международной конференции по общей алгебре и конференции молодых алгебраистов (Кайзерслаутерн, Германия, февраль 2002 г.).*

Е. В. СУХАНОВ. *О конференции «Дискретный анализ и исследование операций» (Новосибирск, июнь 2002 г.).*

Б. М. ВЕРНИКОВ. *О международной конференции «Алгебра и ее приложения» (Красноярск, август 2002 г.).*

Г. В. ТАНАНА. *О международной конференции памяти З. И. Боровича (Санкт-Петербург, сентябрь 2002 г.).*

№ 922, 24.10.2002. А. П. СЕМИГРОДСКИХ. *Клоны полиномов над бесконечным полем простой характеристики.*

Клоны над фиксированным множеством образуют решетку. В решетке клонов над бесконечным полем K рассматривается интервал между клоном линейных форм над K и клоном всех полиномов над K . Доказывается, что два таких интервала изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие поля имеют одинаковую характеристику. В случае простой характеристики поля K показывается, что в рассматриваемый интервал вкладывается (как подрешетка) решетка подполугрупп аддитивной полугруппы натуральных чисел и (как частично упорядоченное множество) множество подмножеств счетного множества.

№ 923, 14.11.2002. Д. С. АНАНИЧЕВ, М. В. ВОЛКОВ. *О 2-сжимающих словах.*

Конечный детерминированный автомат $A = (Q, \Sigma, \delta)$ называется m -сжимаемым, если существует слово $v \in \Sigma^*$, которое сжимает A на m состояний (т. е. найдется подмножество $M \subseteq Q$ такое, что $|M| = |Q| - m$ и $\delta(q, w) \in M$ для каждого состояния $q \in Q$). При этом говорят, что слово v имеет дефект $\geq m$ по отношению к автомату A . Слово $w \in \Sigma^*$ называется m -сжимающим, если оно имеет дефект $\geq m$ по отношению к любому m -сжимаемому автомату.

Найден алгоритм, определяющий по произвольному слову w , является ли оно 2-сжимающим. Если w не является 2-сжимающим, то этот алгоритм явно строит 2-сжимаемый автомат с не более чем $|w|$ состояниями, который не сжимается на 2 состояния словом w .

№ 924, 21.11.2002. О. В. РАСИН. *Цепные dist-разложения и изоморфизмы графов.*

Цепным dist-разложением связного обыкновенного графа G называется такое разбиение $\{X_i \mid i = 1, 2, \dots, t\}$ множества V его вершин, что

- 1) $V = \bigcup_{i=1}^t X_i$ и $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$;
- 2) порожденный подграф $G(X_i)$ связан для любого i ;
- 3) $|X_1| = 1$;
- 4) для любого i и любого $v \in X_i$ расстояние от X_1 до v в графе G равно $i - 1$;
- 5) для любых i, j и $v \in X_i, w \in X_j$ таких, что $\{v, w\}$ – ребро графа G , либо $i = j$, либо $i = j - 1$, либо $j = i - 1$.

Пусть d – фиксированное натуральное число. Через PG_d обозначим класс всех графов G , обладающих цепным dist-разложением $\{X_i \mid i = 1, 2, \dots, t\}$ таким, что в каждом порожденном подграфе $G(X_i)$ степени всех вершин не превосходят d .

Теорема. *Существует полиномиальный алгоритм, который для любых двух графов из класса PG_d выясняет, изоморфны они или нет.*

№ 925, 05.12.2002. Б. М. ВЕРНИКОВ. *Многообразия полугрупп с мультипликативными ограничениями на вполне инвариантные конгруэнции их свободных объектов.*

Сделан обзор результатов докладчика по указанной теме. Приведены следующие два новых результата:

- получено описание многообразий полугрупп, на свободных объектах которых любые две вполне инвариантные конгруэнции α и β удовлетворяют равенству $\alpha\beta = \alpha \cup \beta$, где $\cup$ – теоретико-множественное объединение;

– доказано, что если V – многообразие полурешеток абелевых групп, то на всех V -свободных полугруппах любые две вполне инвариантные конгруэнции слабо перестановочны.

№ 926, 19.12.2002. М. В. Волков, Г. В. Танана. *О суммах радикальных и регулярных колец.*

Приведена классификация типов присоединенно регулярных колец. Указаны условия, обеспечивающие присоединенную регулярность кольца, представимого в виде суммы радикального подкольца и присоединенно регулярного подкольца.

Предложение. Пусть $R = K + S$, где K – радикальное, а S – присоединенно регулярное подкольцо, причем $aKa = 0$ для любого элемента $a \in S$. Тогда кольцо R присоединенно регулярно.

Получен следующий критерий присоединенной регулярности для кольца, являющегося суммой своего радикала и регулярного подкольца.

Теорема. Кольцо R , являющееся суммой своего радикала $J(R)$ и регулярного подкольца S , будет присоединенно регулярным тогда и только тогда, когда $eJ(R)e = 0$ для любого идемпотента $e \in S$.

№ 927, 13.02.2003. В. Б. Репницкий. *Интервалы в решетках подгрупп локально нильпотентных 2-групп.*

Теорема 1. Любая алгебраическая решетка изоморфна некоторому интервалу решетки подгрупп подходящей локально нильпотентной 2-группы.

Теорема 2. Любая конечная решетка изоморфна некоторой подрешетке решетки подгрупп подходящей конечной 2-группы.

№ 928, 20.02.2003. О. Б. Финогенова. *О лиевой нильпотентности ассоциативных алгебр.*

Будем называть многообразие ассоциативных алгебр почти лиево нильпотентным, если в нем не выполнено никакое тождество вида $[[\dots [x_1, x_2], x_3], \dots], x_n] = 0$, но каждое его собственное подмногообразие удовлетворяет некоторому тождеству такого вида. Многообразие X называется T -первичным, если его идеал тождеств $T(X)$ обладает следующим свойством: для любых T -идеалов U, V из включения $UV \subseteq T(X)$ следует $U \subseteq T(X)$ или $V \subseteq T(X)$. С точностью до T -первичных многообразий описаны почти лиево нильпотентные многообразия ассоциативных алгебр как над конечным, так и над бесконечным полем. Кроме того, доказано следующее

Предложение. Каждое почти лиево нильпотентное T -первичное многообразие удовлетворяет некоторому тождеству вида $x^k = 0$.

№ 929, 06.03.2003. Ю. В. Гамзова, А. М. Шур. *Частичные слова и свойство взаимодействия периодов.*

Свойство взаимодействия периодов слов состоит в следующем: всякое достаточно длинное слово с периодами p и q имеет период НОД(p, q). Представляет интерес изучение аналогичного свойства для более широкого класса объектов, а именно, для периодических частичных слов. Ранее докладчиками было показано, что в достаточно длинных частичных словах периоды взаимодействуют. В докладе приведена точная линейная оценка зависимости длины частичного слова, обладающего свойством взаимодействия периодов, от количества неопределенных символов в этом слове.

№ 930, 13.03.2003. А. П. СЕМИГРОДСКИХ. *Замкнутые классы функций на бесконечном множестве.*

Доклад по кандидатской диссертации.

№ 931, 20.03.2003. И. А. ГОЛЬДБЕРГ, М. В. ВОЛКОВ. *Тождества полугрупп треугольных булевых матриц.*

Рассматривается вопрос о конечной базлируемости тождеств для полугрупп булевых треугольных матриц. Получены следующие результаты.

1. Полугруппа всех треугольных булевых матриц размера $n \times n$ существенно бесконечно базлируема тогда и только тогда, когда $n \geq 4$.
2. Полугруппа всех унитреугольных булевых матриц размера $n \times n$ бесконечно базлируема тогда и только тогда, когда $n \geq 5$.

№ 932, 03.04.2003. Л. Н. ШЕВРИН. *Памяти Игоря Владимировича Львова (1947–2003).*

Е. С. СКВОРЦОВ. *Клоны на множестве и его частях.*

Определение задачи CSP и класса задач $CSP(\Gamma)$ см. в резюме доклада № 918. В то время как общая задача CSP NP-полна, для некоторых Γ задачи из $CSP(\Gamma)$ могут быть решены за полиномиальное время. В таком случае множество отношений Γ называют *полиномиальным*.

Операция амальгамирования при некоторых условиях позволяет сконструировать из известных полиномиальных множеств отношений новое такое множество. Докладчиком и А. А. Булатовым рассмотрен случай амальгамирования клонов отношений, заданных на произвольных множествах, и найдены необходимые и достаточные условия полиномиальности их амальгамы.

№ 933, 10.04.2003. Б. М. ВЕРНИКОВ. *Многообразие полугрупп, на свободных объектах которых вполне инвариантные конгруэнции слабо перестановочны.*

Доказано, что многообразие полугрупп обладает свойством, указанным в названии доклада, тогда и только тогда, когда оно является либо многообразием полурешеток групп, либо вполне простым многообразием, либо нильмногообразием, удовлетворяющим одной из 237 конкретных систем тождеств.

№ 934, 17.04.2003. М. В. ВОЛКОВ. *Динамика проконечных слов.*

Представлены результаты Ж. Алмейды (Порто, Португалия) и докладчика о проконечных словах – элементах проконечного пополнения свободной полугруппы. Для проконечных слов введены понятия сложности и энтропии. Приведен пример проконечного слова максимальной энтропии, значение которого в каждой конечной полугруппе S может быть вычислено за время, ограниченное полиномом от $|S|$.

№ 935, 08.05.2003. Л. Н. ШЕВРИН. *О задачах семинара в связи с вхождением коллектива семинара в число победителей конкурса грантов Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ Российской Федерации.*

№ 936, 13.05.2003. В. Ю. ПОПОВ. *Проблема нахождения центра и медианы множества слов.*

*Расстоянием Левенштейна $d(u, v)$ между словами u и v называется минимальное количество вычеркиваний, вставок и замен букв, необходимое для преобразования слова v в слово u . Слово w называется *медианой (центром)* множества слов S , если величина $\max_{u \in S} d(w, u)$ (соответственно величина $\sum_{u \in S} d(w, u)$) минимальна. Рассматривается*

Проблема нахождения медианы (центра) множества слов.

Даны: множество слов S в алфавите Σ , натуральное число D .

Задача: существует ли слово w такое, что $\max_{u \in S} d(w, u) \leq D$ (соответственно такое, что $\sum_{u \in S} d(w, u) \leq D$)?

Теорема 1. *Проблема нахождения медианы (центра) множества слов NP-полна при $|\Sigma| \geq 4$.*

Теорема 2. *Проблема нахождения медианы множества слов разрешима за полиномиальное время при каждом фиксированном D .*

№ 937, 22.05.2003. А. П. СЕМИГРОДСКИХ. *Наименьший рекурсивно замкнутый клон.*

Клон функций на $\mathbb{N}$, замкнутый относительно примитивной рекурсии, называется *рекурсивно замкнутым*. Доклад посвящен обсуждению следующего вопроса: из каких функций состоит наименьший из рекурсивно замкнутых клонов?

Функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$ называется *тах-ограниченной*, если для всех $x_1, \dots, x_n$ выполняется неравенство $y \leq \max(x_1, \dots, x_n)$.

Гипотеза. *Наименьший рекурсивно замкнутый клон есть клон всех тах-ограниченных примитивно рекурсивных функций.*

Приведены некоторые аргументы в поддержку этой гипотезы.

№ 938, 29.05.2003. В. Ю. ПОПОВ. *О проблеме SBH-ADD.*

Рассматриваются следующие проблемы.

Проблема нахождения кратчайшего надслова множества слов.

Даны: натуральное число p , множество слов S длины p в алфавите Σ , натуральное число k .

Задача: существует ли слово w такое, что $|w| \leq k$ и каждое слово $u \in S$ есть подслово слова w ?

Проблема SBH-ADD.

Даны: натуральное число p , множество слов X длины p в четырехбуквенном алфавите ДНК $\{A, C, T, G\}$, натуральные числа k и r .

Задача: существует ли множество слов Y такое, что $|Y| \leq r$ и существует правильное наложение множества слов $X \cup Y$, длина которого не превосходит k ?

Теорема 1. *Проблема нахождения кратчайшего надслова множества слов при $|\Sigma| \geq 2$ является NP-полной.*

Теорема 2. *Проблема SBH-ADD является NP-полной.*

№ 939, 13.06.2003. К. В. АДРИЧЕВА (ЧИКАГО). *Выпуклые геометрии: последние достижения.*

Рассматриваются подклассы класса полудистрибутивных вверх решеток, связанные с так называемыми выпуклыми геометриями. Представлены результаты, показывающие, что решетки из одних рассматриваемых классов вкладываются в решетки из других классов.