На правах рукописи

КОРОТКИЙ Дмитрий Александрович

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ С ОПЕРЕЖЕНИЕМ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург
2008

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Уральский государственный университет им. А.М.Горького» на кафедре вычислительной математики

Научный руководитель:	—	доктор физико-математических наук, профессор Пименов Владимир Германович
Официальные оппоненты:	—	доктор физико-математических наук, профессор Сесекин Александр Николаевич
	—	кандидат физико-математических наук, доцент Вдовин Андрей Юрьевич
Ведущая организация	—	ГОУ ВПО «Пермский государственный университет», г. Пермь

Защита диссертации состоится 24 сентября 2008 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.286.10 по защите докторских и кандидатских диссертаций при ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького» по адресу:
620000, г.Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн.248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького»

Автореферат разослан "___" ____________ 2008 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многие свойства реальных объектов определяются эффектом последействия, состоящего в том, что дальнейшее состояние объекта зависит не только от настоящего, но и от прошлого, т.е. от его предыстории. Моделировать такие процессы позволяют функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ), называемые также уравнениями с запаздыванием или уравнениями с последействием.

Возникновение подобных систем, связанных с эффектом последействия, потребовало развития соответствующей теории, которая активно развивалась такими математиками как Н.В. Азбелев, Г.А. Бочаров, С.А. Брыкалов, Ю.Ф. Долгий, Е.С. Жуковский, Г.А. Каменский, А.В. Ким, В.Б. Колмановский, Н.Н. Красовский, А.В. Кряжимский, А.Б. Куржанский, Н.Ю. Лукоянов, В.И. Максимов, В.П. Максимов, В.В. Малыгина, Г.И. Марчук, А.Д. Мышкис, В.Р. Носов, С.Б. Норкин, Ю.С. Осипов, В.Г. Пименов, Л.С. Понтрягин, Л.Ф. Рахматуллина, А.Н. Сесекин, Е.Л. Тонков, С.Н. Шиманов, Л.Э. Эльсгольц, C.H.T. Baker, H.T. Banks, R. Bellman, K.L. Cooke, R.D. Driver, J.K. Hale, V. Lakshmikantam, V. Volterra и многими другими.

Полученные в этой области фундаментальные результаты сформировали качественную теорию дифференциальных уравнений с запаздыванием. Математическая теория таких дифференциальных уравнений, бурно развивавшаяся в последние десятилетия, во многом приобрела законченный вид и сейчас активно применяется при моделировании различных объектов и процессов. Разработаны также различные численные алгоритмы решения уравнений с запаздыванием многих видов (см., например, работы В.Г. Пименова [1], А.В. Кима и В.Г. Пименова [2], C.T.H. Baker [3], а также библиографию в них).

В то же время уравнения с опережением времени практически не изучены, хотя упоминания о них встречаются давно, в основном, в связи с

[1] *Пименов В.Г.* Функционально-дифференциальные уравнения: численные методы. Екатеринбург: УрГУ, 1998.

[2] *Ким А.В., Пименов В.Г.* i-гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнения. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004.

[3] *Baker C.T.H., Paul C.A.H., Wille D.R.* Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations // Advanced in Comput. Math. 1995. Vol. 3. P.171-196.

классификацией уравнений с отклоняющимся аргументом [4], [5], [6].

Причинами такого «невнимания» можно назвать отсутствие «физической осуществимости» в математическом моделировании таких систем, а также сложность и, зачастую, некорректность математических постановок задач. Из общих результатов по исследованию функционально-дифференциальных уравнений можно упомянуть результаты работ пермской школы [7], в которые, в частности, можно вложить и многие постановки задач с опережением. Линейным уравнениям второго порядка с опережением и запаздыванием посвящена третья глава в книге [8]. Между тем, интерес к задачам с одновременным наличием опережения и запаздывания обусловлен рядом задач, в которых такие системы появляются как необходимый объект изучения. Упомянем некоторые из таких задач.

В некоторых прикладных задачах, например, из области электротехники (передача электрических сигналов в высоковольтных линиях электропередачи), биологии (исследование динамики популяций), математические модели приводят к дифференциальным уравнениям с опережением и запаздыванием или к уравнениям с опережением (см. упоминания об этом, например, в работах [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], а также библиографию в них). Здесь в основном исследуются вопросы качественного

[4] *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

[5] *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

[6] *Каменский Г.А., Скубачевский А.Л.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: Издательство МАИ, 1992.

[7] *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференцальных уравнений. М.: Наука, 1991.

[8] *Каменский Г.А., Скубачевский А.Л.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: Издательство МАИ, 1992.

[9] *Kato T., McLeod J.B.* The functional-differential equation $\dot{y}(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bulletin of the American Mathematical society. 1971. Vol. 77. № 6. P. 891–937.

[10] *Fox L., Mayers D.F., Ockendon J.R., Tayler A.B.* On a functional differential equation // J. Inst. Math. Appl. 1971. Vol. 8. P. 271–307.

[11] *Yan J.* Oscillation of first-order impulsiv differential equations with advanced argument // Computers and Mathematics with Applications. 2001. Vol. 42. № 6. P. 1353–1363.

[12] *Zheng Z.X.* Theory of functional differential equations. Anhui: Education Press, 1994.

[13] *Agarwal R.P.* Difference equations and inequalities: theory, methods, and applications. New York: Marcel Dekker Inc., 2000.

[14] *Schulman L.S.* Some differential-difference equations containing both advance and retardation // J. Math. Phys. 1974. Vol. 15. №3. P.295–298.

[15] *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

[16] *Zhang Z., Li Q.* Oscillation theorems for second-order advanced functional difference equations // Computers and Mathematics with Applications. 1998. Vol. 36. № 1. P. 11–18.

поведения решений таких уравнений. В прикладных работах часто рассматриваются уравнения

$$\dot{y}(t) = a \cdot y(\tau(t)) + b \cdot y(t) \ , \quad t \in [t_0, \infty) \ ,$$

где $\tau(t)$ может принимать следующие значения

$$(a) \quad \tau(t) = t + \tau \ , \quad \tau = const > 0 \ ,$$

$$(b) \quad \tau(t) = \lambda \cdot t \ , \quad \lambda = const > 1 \ ,$$

$$(c) \quad \tau(t) = t^{\alpha} \ , \quad \alpha = const > 1$$

(случаи (b) и (c) подходящей заменой переменной и искомой функции приводятся к случаю (a)) ; встречаются также уравнения

$$\dot{y}(t) = y(t) \cdot [\, a - b \cdot \lg\, y(t) - c \cdot \lg\, y(\lambda \cdot t)\,] \ ;$$

$$\ddot{y}(t) + w \cdot y(t) = \alpha \cdot y(t - \tau) + \beta \cdot y(t + \sigma) + \varphi(t) \ .$$

В численных методах решения краевых задач одним из основных алгоритмов является метод прогонки, сводящий краевую задачу к начальной путем обращения времени [17]. Если система имела запаздывание, то при обращении времени в системе возникнет опережение. Другие алгоритмы решения краевых задач для систем с запаздыванием изучались в работе [18].

В теории управления движением системами с запаздыванием применение необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума приводит к сопряженной системе с опережением [19], [20], [21]. Совместное рассмотрение исходной и сопряженной систем приводит к общей системе с одновременным наличием опережения и запаздывания.

[17] *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы высшей математики. Т. 2. Минск: Вышайшая школа, 1975.

[18] *Онегова О.В.* Некоторые методы численного решения краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений // Известия Уральского госуниверситета (Серия: Математика и механика. Выпуск 4). 2002. № 22. С. 114-128.

[19] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

[20] *Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.* Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992.

[21] *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974.

Отметим также, что вопросы разрешимости отдельных уравнений или некоторых классов уравнений с опережением и запаздыванием рассматривались, например, в работах [22], [23], [24], [25].

Эти и другие модельные задачи дифференциальных систем с одновременным запаздыванием и опережением делают актуальным разработку методов исследования подобных задач, причем в силу сложности задач, основным инструментом решения должны стать численные методы.

Приведем постановки основных краевых задач, которые встречаются в приложениях и будут рассматриваться в данной работе. Будет рассматриваться система дифференциальных уравнений с опережением и запаздыванием следующего вида

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), x(t-\tau), x(t+\tau)\big), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\mathbb{R}_+ \ni \tau$ — величина запаздывания и опережения (величины запаздывания и опережения для простоты считаются одинаковыми), f — некоторая заданная n-мерная вектор-функция, определенная на множестве $[a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Пусть заданы также какой-нибудь элемент $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и какие-нибудь n-мерные вектор-функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, определенные на промежутках $[a-\tau, a)$ и $(b, b+\tau]$ соответственно. Пусть далее для простоты $b - a \geqslant \tau$.

Требуется найти решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$x(t) = \varphi(t),\ a-\tau \leqslant t < a; \ \ x(a) = x_0; \ \ x(t) = \psi(t),\ b < t \leqslant b+\tau. \tag{2}$$

Под решением краевой задачи (1)-(2) обычно будет пониматься кусочно-непрерывная n-мерная вектор-функция $x = x(t)$, $a - \tau \leqslant t \leqslant b + \tau$, которая непрерывна на отрезке $[a,b]$, почти во всех точках этого отрезка дифференцируема и почти во всех точках этого отрезка удовлетворяет системе (1), в точке $t = a$ принимает значение x_0, на промежутке $[a-\tau, a)$ совпадает с функцией $\varphi(\cdot)$, а на промежутке $(b, b+\tau]$ совпадает с функцией $\psi(\cdot)$.

[22] *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

[23] *Baotong C.* Functional differential equations mixed type in Banach spaces // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1995. Vol. 94. P. 47–54.

[24] *Oberg R.J.* On the local existence of solutions of certain functional-differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 20. P. 295–302.

[25] *Frederickson P.L.* Global solutions to certain nonlinear functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1971. Vol. 33. P. 355–358.

Цель работы. Цель работы состоит в исследовании вопросов корректной разрешимости краевых задач типа (1)-(2), исследовании свойств решений, разработке конструктивных методов приближенного нахождения этих решений, разработке программных средств для численного моделирования систем с опережением и запаздыванием, а также применении разработанных средств для решения некоторых классов задач управления для систем с запаздыванием.

Методы исследования. В основе исследований лежат понятия и методы теории функций и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, численных методов анализа, теории оптимального управления. Для исследования разрешимости краевых задач используются теоремы о неподвижных точках. В исследовании непрерывной зависимости решения от параметров используются общие методы и подходы, аналогичные тем, которые используются в теории обыкновенных дифференциальных уравнений при оценивании решений. Для разработки численных методов применяются общие подходы вычислительной математики, в частности, разностные методы и вычислительные методы линейной и нелинейной алгебры. При исследовании задач оптимального управления используется принцип максимума Понтрягина. Для разработки программных средств применялись современные технологии программирования, языки программирования C++, Pascal, Delphi.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:
— получены теоремы о корректной разрешимости некоторых классов линейных и нелинейных краевых задач для систем с опережением и запаздыванием, основанные на теоремах о неподвижных точках;
— указаны условия непрерывной зависимости решения рассматриваемых краевых задач от параметров этих задач;
— разработаны конструктивные методы приближенного решения линейных и нелинейных краевых задач для систем с опережением и запаздыванием, указаны условия сходимости разработанных методов и получены некоторые оценки их скорости сходимости;
— для некоторых классов задач оптимального управления для систем с запаздыванием и квадратичным функционалом качества получены системы оптимальности, представляющие собой системы с опережением и запаздыванием, указаны условия их корректной разрешимости, описаны

методы их численного интегрирования и проведено численное моделирование;
— разработан комплекс программных средств для численного моделирования решений соответствующих краевых задач, в котором реализованы разработанные в работе численные методы и алгоритмы, а также выполнена визуализация результатов расчетов.

Достоверность полученных в работе результатов подтверждается соответствующими математическими доказательствами, соответствием полученных теоретических результатов надежным результатам компьютерного моделирования, использованием общепризнанных апробированных математических методов вычислений и согласованностью результатов, полученных различными способами.

Теоретическая и практическая ценность. Системы с опережением и запаздыванием играют важную роль при описании различных процессов и явлений в науке и технике. С одной стороны, в работе получен ряд новых теоретических результатов по методам исследования свойств таких систем (разрешимость, устойчивость, численные методы, сходимость, оценки скорости сходимости). Эти результаты имеют теоретическую ценность и могут быть использованы для дальнейшего развития теории функционально-дифференциальных уравнений и ее приложений. С другой стороны, полученные в работе результаты могут иметь и практическую ценность. Они могут использоваться при решении прикладных задач, моделировании рассматриваемых систем в различных ситуациях. Для этих целей может оказаться полезным разработанный программный комплекс, в котором реализованы разработанные в работе численные методы и алгоритмы. Полученные результаты применены для исследования и моделирования важного с теоретической и прикладной точек зрения класса задач оптимального управления для систем с запаздыванием.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на Всероссийской конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач"(Екатеринбург, 2-6 февраля 2004); конференции-семинаре "Теория управления и математическое моделирование", посвященной 50-летию Ижевского математического семинара и 30-летию кафедры "Прикладная математика и информатика"Ижевского государственного технического университета (Ижевск, 31 января - 4 февраля 2006); конференции-семинаре "Теория управления и математическое моделирование"(Ижевск, 3 июля - 8 июля 2006), посвященной 75-летию Удмуртского государственного университета; конференции-семинаре "Теория управления и математическое моделирование"(Ижевск, 4 - 9 мая 2008), посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева; научных семинарах кафедры вычислительной математики Уральского госуниверситета (руководитель — профессор В.Г. Пименов); научном семинаре отдела дифференциальных уравнений Института математики и механики УрО РАН (руководитель — профессор В.И. Максимов).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-8] (см. список в конце автореферата). Работы [1-3] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК. В совместных работах [1, 4] научному руководителю В.Г. Пименову принадлежат постановки задач и общие методики исследований, а диссертанту — доказательства основных теорем, разработка алгоритмов численных методов и соответствующих программных средств.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы и трех приложений. Главы разбиты на параграфы. Общий объем работы составляет 123 страницы. Библиография содержит 91 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы исследований, обсуждается история вопроса и показывается место проводимых исследований среди других подобных исследований, формулируется цель диссертационной работы и пути её достижения, кратко описывается содержание диссертации, отмечены новизна и практическое значение работы.

В первой главе изучаются линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с опережением и запаздыванием. Для таких систем формулируется краевая задача на конечном промежутке времени. Она состоит в нахождении непрерывной на заданном отрезке функции, которая почти всюду дифференцируема на этом отрезке и удовлетворяет соответствующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений с опережением и запаздыванием на рассматриваемом отрезке, с левой стороны отрезка искомая функция должна совпадать с известной функцией, на левом конце отрезка искомая функция должна принимать заданное начальное состояние, с правой стороны отрезка искомая функция должна совпадать с известной функцией

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + C(t)x(t+\tau) + D(t), \ a \leqslant t \leqslant b, \\ x(a) = x_a \ , \\ x(t) = \varphi(t), \quad a - \tau \leqslant t < a, \\ x(t) = \psi(t), \quad b < t \leqslant b + \tau. \end{cases} \tag{3}$$

Для сформулированной краевой задачи исследуется вопрос о существовании и единственности решения, исследуются свойства решения, разрабатываются методы приближенного нахождения этого решения и проводится численное моделирование.

Теорема 1.2.2. *Если при некотором* $\lambda > 0$ *выполняется условие*

$$\sigma_\lambda \ < \ 1 \ , \tag{4}$$

$$\sigma_\lambda = \|A\|_C \ \frac{1 - e^{-\lambda l}}{\lambda} + \|B\|_C \ \frac{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(l+\tau)}}{\lambda} + \|C\|_C \ \frac{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda(\tau - l)}}{\lambda} \ ,$$

то краевая задача (3) *имеет единственное решение.*

Вопросы о существовании и единственности решения исследуются с помощью принципа сжимающих отображений. Показано, что условие (4), является существенным достаточным условием как для существования, так и для единственности решения рассматриваемой краевой задачи. Приводятся примеры, показывающие, что без этого условия краевая задача может иметь несколько (и даже бесконечное число) решений, а может и вообще не иметь решений. Приводятся также примеры, показывающие, что это условие не является необходимым условием как для существования, так и для единственности решения.

Показано, что решение сформулированной краевой задачи при соответствующих условиях непрерывно зависит как от исходных данных (начальной функции, начального состояния системы, финальной функции), так и от матричных коэффициентов системы, при варьировании всех этих параметров в их естественных пространствах.

Теорема 1.5.1. *Пусть при некотором* $\lambda > 0$ *выполняется условие* (4)*. Тогда решение* $x(\cdot) = x(\cdot; \varphi, x_0, \psi, A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot))$ *краевой задачи* (3) *непрерывно зависит в равномерной метрике пространства* $C([a,b]; \mathbb{R}^n)$ *от варьирования параметров* φ, x_0, ψ, $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$, $D(\cdot)$

в метриках норм $\|\cdot\|_{C=C[a,a-\tau)}$, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{C=C(b,b+\tau]}$, $\|\cdot\|_{C=C([a,b];\mathbb{R}^{n\times n})}$, $\|\cdot\|_{C=C([a,b];\mathbb{R}^{n\times n})}$, $\|\cdot\|_{C=C([a,b];\mathbb{R}^{n\times n})}$, $\|\cdot\|_{C=C([a,b];\mathbb{R}^{n})}$ *соответственно.*

Далее рассматривается один подкласс рассматриваемого класса краевых задач, в котором задачи допускают расщепление на запаздывающую составляющую и составляющую с опережением

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = A_1(t)\,x_1(t) + B_1(t)\,x_1(t-\tau) + D_1(t), \quad a < t \leqslant b\ , \\ x_1(a) = x_1^0\ , \\ x_1(t) = \varphi_1(t), \quad a-\tau \leqslant t < a\ , \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \dot{x}_2(t) = A_2(t)\,x_2(t) + C_2(t)\,x_2(t+\tau) + D_2(t), \quad a < t \leqslant b\ , \\ x_2(a) = x_2^0\ , \\ x_2(t) = \psi_2(t), \quad b < t \leqslant b+\tau\ . \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{5}$$

Запаздывающая составляющая при соответствующих ограничениях всегда имеет единственное решение при любых допустимых исходных данных. Составляющая с опережением имеет единственное решение при любых допустимых исходных данных, если соответствующая система с опережением обладает некоторым свойством достижимости (для любого заданного состояния системы на левом конце отрезка изменения независимой переменной существует хотя бы одно состояние системы на правом конце этого отрезка, такое, что решение соответствующей системы с опережением, совпадающее на правом конце с существующим состоянием, на левом конце совпадает с заданным состоянием). Конструктивность нахождения решения опережающей составляющей во многом зависит от конструктивности нахождения подходящего состояния системы на правом конце. В этом отношении может оказаться полезной формула, аналогичная формуле Коши для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений или систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Наличие такой формулы удалось установить и для систем с опережением, ее вывод приведен в шестом параграфе первой главы. Анализ этой формулы показывает, что при достаточной конструктивности нахождения соответствующей фундаментальной матрицы Коши и при невырожденности этой матрицы, задача для опережающей составляющей может быть решена достаточно конструктивно.

Теорема 1.7.1. *Каковы бы ни были непрерывные матрицы-функции* $A_1(\cdot), B_1(\cdot), D_1(\cdot)$, *начальное состояние* x_1^0, *начальная непрерывная функция* $\varphi_1(\cdot)$ *с конечным пределом в точке* $t = a$, *а также каковы бы ни были непрерывные матрицы-функции* $A_2(\cdot), B_2(\cdot), D_2(\cdot)$, *начальное состояние* x_2^0 *и финальная непрерывная функция* $\psi_2(\cdot)$ *с конечным пределом в точке* $t = b$, *удовлетворяющие условию достижимости или невырожденности соответствующей фундаментальной матрицы Коши, краевая задача* (5) *имеет единственное решение, которое может быть найдено методом шагов или с помощью формул Коши.*

При рассмотрении некоторых задач оптимального управления для систем с запаздыванием использование принципа максимума Понтрягина приводит к системами с опережением и запаздыванием. В линейном варианте могут появиться системы, которые можно условно назвать системами, связанными по состоянию, а соответствующие краевые задачи для них — связанными по состоянию краевыми задачами

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = A_1(t)x_1(t) + B_1(t)x_1(t-\tau) + C_1(t)x_2(t) + D_1(t),\ a < t \leqslant b\ , \\ x_1(a) = x_1^a\ , \\ x_1(t) = \varphi_1(t), \quad a-\tau \leqslant t < a\ , \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \dot{x}_2(t) = A_2(t)x_2(t) + B_2(t)x_2(t+\tau) + C_2(t)x_1(t) + D_2(t),\ a \leqslant t < b\ , \\ x_2(b) = x_2^b\ , \\ x_2(t) = \psi_2(t), \quad b < t \leqslant b+\tau\ . \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Теорема 1.7.2. *Если при некотором* $\lambda > 0$ *выполняется условие*

$$(\sigma_\lambda^*)^2 = (\sigma_\lambda^{(1)})^2 + (\sigma_\lambda^{(2)})^2 \ < \ 1\ ,$$

$$\sigma_\lambda^{(1)} = \|A_1\|_C \frac{1-e^{-\lambda l}}{\lambda} + \|B_1\|_C \frac{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(l+\tau)}}{\lambda} + \|C_1\|_C \frac{1-e^{-\lambda l}}{\lambda}\ ,$$

$$\sigma_\lambda^{(2)} = \|A_2\|_C \frac{e^{\lambda l}-1}{\lambda} + \|B_2\|_C \frac{e^{\lambda(l+\tau)} - e^{\lambda\tau}}{\lambda} + \|C_2\|_C \frac{e^{\lambda l}-1}{\lambda}\ ,$$

то связанная по состоянию краевая задача имеет единственное решение.

В предпоследнем параграфе первой главы разрабатывается численный метод решения краевых задач, основанный на явном разностном методе Эйлера (из-за наличия опережения схема в целом является неявной). Соответствующая система линейных алгебраических уравнений

$$\mathbb{A}u = \mathbb{F} \tag{6}$$

в подробной записи имеет вид

$$\mathbb{A}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} * & & & * & & & & & & & \\ * & * & & & * & & & & & & \\ & * & * & & & * & & & & & \\ & & * & * & & & * & & & & \\ & & & * & * & & & * & & & \\ * & & & & * & * & & & * & & \\ & * & & & & * & * & & & * & \\ & & * & & & & * & * & & & * \\ & & & * & & & & * & * & & \\ & & & & * & & & & * & * & \\ & & & & & * & & & & * & * \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u^1 \\ \dots \\ \dots \\ u^m \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u^{p-m} \\ \dots \\ \dots \\ u^p \end{pmatrix} = \mathbb{F} \ ,$$

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} -\Delta D^0 - (1+\Delta A^0)u^0 - \Delta B^0 u^{-m} \\ -\Delta D^1 - \Delta B^1 u^{-m+1} \\ -\Delta D^2 - \Delta B^2 u^{-m+2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\Delta D^m - \Delta B^m u^0 \\ -\Delta D^{m+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\Delta D^{p-m} \\ -\Delta D^{p-m+1} - \Delta C^{p-m+1} u^{p+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\Delta D^{p-1} - \Delta C^{p-1} u^{p+m-1} \end{pmatrix} .$$

В матрице $\mathbb{A}$ значком "$*$" обозначаются места, на которых могут находиться ненулевые матричные блоки размерности $n \times n$ (все остальные матричные блоки в матрице — нулевые). Видно, что матрица системы является блочной четырёхдиагональной. На правой диагонали стоят сверху вниз блоки ΔC^0, ... , ΔC^{p-m}; на главной диагонали стоят блоки $(-E)$, где E — единичная матрица; под главной диагональю стоят сверху вниз блоки $(E+\Delta A^0)$, ... , $(E+\Delta A^{p-1})$; на левой диагонали стоят сверху вниз блоки ΔB^{m+1}, ... , ΔB^{p-1}. Все блоки имеют размерность $n \times n$.

Предложено несколько вариантов итерационных методов решения таких систем линейных алгебраических уравнений (хорошо зарекомендовали себя метод Гаусса-Зейделя, метод сопряженных градиентов, метод минимальных невязок). Доказана теорема о сходимости приближенных решений, найденных по схеме Эйлера, к точному решению исходной дифференциальной задачи при стремлении шага разностной сетки к нулю и приводится также оценка скорости сходимости.

Теорема 1.8.2. *Если при некотором $\lambda > 0$ выполняется условие* (4), *то приближенное решение краевой задачи* (3), *найденное явным методом Эйлера, сходится к точному решению этой задачи при стремлении шага дискретизации к нулю $\Delta \to 0$, причем для точности приближения z справедлива оценка*

$$\|z\|_C^{(\lambda)} = \max\{\ e^{-\lambda t_i} \cdot \|z^i\|\ :\ i = 0, ..., p\ \} \leqslant \frac{b-a}{1-\sigma_\lambda} \cdot \omega(\Delta)\ ,$$

где $\omega(\Delta)$ — модуль непрерывности производной решения.

Основное внимание в работе было уделено явному методу Эйлера. Рассмотрение простейших примеров показало, что неявный метод Эйлера не приводит к заметному увеличению точности расчетов и не является более экономичным по сравнению с явным методом. Как представляется, это связано с тем, что как в одном, так и в другом случаях схемы в целом являются неявными, ни одна из них не имеет видимых преимуществ перед другой. По аналогии с системами с запаздыванием здесь возможно также рассмотрение методов высокого порядка, однако в данном случае они являются очень громоздкими.

В последнем параграфе главы проводится описание численного моделирования рассматриваемых краевых задач. Исходная дифференциальная задача аппроксимируется по явной разностной схеме Эйлера. Затем получившаяся в результате аппроксимации система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) решается тремя различными итерационными методами : методом Гаусса-Зейделя, методом сопряженных градиентов и методом минимальных невязок. Результаты расчетов сравниваются между собой и сравниваются с точным решением исходной дифференциальной задачи. Для каждого из методов решения СЛАУ указаны условия их сходимости. Проведены вычислительные эксперименты и приведены сравнительные характеристики результатов вычислений. В одном из примеров, в котором выполняется условие (4), итерации каждого из рассматриваемых методов решения СЛАУ достаточно быстро сходятся к точному решению СЛАУ и при соответствующем измельчении разностной сетки приближенные решения достаточно быстро сходятся к точному решению исходной дифференциальной задачи. В другом примере, в котором условие (4) не выполняется, итерации рассматриваемых методов решения СЛАУ дают некоторые приближения решения СЛАУ, причем каждый метод дает некоторое свое приближение и, вообще говоря, не наблюдается сходимости к какому-нибудь одному решению при увеличении числа итераций; при измельчении разностной сетки приближенные решения не сходятся к предъявленному точному решению исходной дифференциальной задачи. В третьем примере, в котором заведомо существует несколько решений дифференциальной задачи, итерации каждого из рассматриваемых методов решения СЛАУ достаточно быстро сходятся к точному решению СЛАУ и при измельчении разностной сетки приближенные решения достаточно быстро сходятся к одному из точных решений исходной дифференциальной задачи. Программные средства, предназначенные для численного моделирования, описаны в Приложении-1. Там же приводятся несколько иллюстраций пользовательского интерфейса.

Вторая глава посвящена исследованию краевых задач для некоторых классов нелинейных систем с опережением и запаздыванием вида (1)–(2). В этой главе результаты, полученные в первой главе для линейных систем, обобщаются на нелинейные краевые задачи. Сформулированы и доказаны некоторые теоремы о разрешимости краевых задач.

Теорема 2.2.1. *Если при некотором $\lambda > 0$ выполняется условие*

$$\widehat{\sigma}_\lambda = L_x \frac{1 - e^{-\lambda l}}{\lambda} + L_y \frac{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(l+\tau)}}{\lambda} + L_z \frac{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda(\tau - l)}}{\lambda} < 1 \ , \qquad (7)$$

где L_x, L_y, L_z — константы Липшица функции f по своим переменным

$$\| f(t, x_1, y_1, z_1) - f(t, x_2, y_2, z_2) \| \leqslant L_x \|x_1 - x_2\| + L_y \|y_1 - y_2\| + L_z \|z_1 - z_2\| \ ,$$

то краевая задача (1)–(2) имеет единственное решение.

Указываются условия непрерывной зависимости решения от параметров (исходных данных краевой задачи и правой части системы).

Теорема 2.3.1. *Пусть при некотором $\lambda > 0$ выполняется условие $\widehat{\sigma}_\lambda < 1$. Тогда решение $x(\cdot) = x(\cdot; \varphi, x_0, \psi)$ краевой задачи (1)–(2) непрерывно зависит в равномерной метрике пространства $C([a,b]; \mathbb{R}^n)$ от варьирования параметров φ, x_0 и ψ в нормах пространств $C([a, a-\tau]; \mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ и $C([b, b+\tau]; \mathbb{R}^n)$ соответственно.*

Аналогичная теорема справедлива при равномерном варьировании правой части системы.

Исследуются также некоторые специфические краевые задачи, которые возникают при рассмотрении задач оптимального управления для систем с запаздыванием и квадратичным критерием качества. Указаны условия разрешимости таких задач. Разработаны численные методы нахождения приближенных решений нелинейных задач, основанные на подходе Эйлера. Указаны методы приближенного решения нелинейных систем алгебраических уравнений, появляющихся при дискретизации дифференциальной задачи. В частности, приведены некоторые условия сходимости метода простых итераций, который оказывается весьма удобным и нетрудоемким при численном моделировании.

Опишем кратко один из удобных вариантов метода простых итераций. Исходное дифференциальное уравнение аппроксимируем разностной схемой

$$u^{i+1} - u^i = \Delta \cdot f\big(t_i, u^i, u^{i-m}, u^{i+m}\big) \ , \quad i = 0, \ldots, p-1 \ .$$

В результате получаем систему нелинейных уравнений для нахождения неизвестных u^i, $i = 1, \ldots, p$:

$$\begin{cases} u^{-m} = \varphi^{-m} \\ \cdots \\ u^{-1} = \varphi^{-1} \\ u^0 = x_0 \\ u^{i+1} - u^i = \Delta \cdot f\big(t_i, u^i, u^{i-m}, u^{i+m}\big) \ , \quad \text{i = 0, ... , p - 1} \ , \\ u^{p+1} = \psi^{p+1} \\ \cdots \\ u^{p+m} = \psi^{p+m} \ . \end{cases} \tag{8}$$

Эту систему можно представить в операторном виде

$$AU = F(U) \ , \tag{9}$$

где $U = (u^{-m}, ..., u^{-1}, u^0, u^1, ..., u^i, ..., u^p, u^{p+1}, ..., u^{p+m})^T$. Для решения подобных нелинейных уравнений существует целый арсенал методов приближенного решения, среди которых можно указать методы простых итераций, градиентные методы, различные варианты метода Ньютона, метод Брауна, метод секущих Брайдена и другие [26], [27], [28], [29].

Матрица A не вырождена и обратная к ней матрица вычисляется достаточно просто.

Рассмотрим итерационный процесс

$$A\,U^{(k+1)} = F(U^{(k)}) \ . \tag{10}$$

Теорема 2.5.1. *Если при некотором $\lambda > 0$ выполняется условие* (7), *то итерационный процесс* (10) *сходится к единственному точному решению U^* системы нелинейных алгебраических уравнений* (9) *со скоростью геометрической прогрессии, каково бы ни было при этом начальное приближение $U^{(0)}$.*

Сформулированы также условия сходимости решения дискретизованной задачи к точному решению дифференциальной задачи. Указаны оценки точности приближений. Здесь формулировки основных утверждений аналогичны формулировкам в линейном случае.

Проведены вычислительные эксперименты, результаты которых приведены в заключительном параграфе. Описание программного комплекса, с помощью которого можно проводить численное моделирование решения нелинейных краевых задач, помещено в Приложении-2. Там же имеется несколько вкладок пользовательского интерфейса.

В третьей главе рассматриваются задачи оптимального управления для систем с запаздыванием и квадратичным критерием качества. Хорошо известно [30], [31], [32], [33], [34], что принцип максимума в таких задачах

[26] *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.

[27] *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.

[28] *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы высшей математики. Т. 1. Минск: Вышайшая школа, 1975.

[29] *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2005.

[30] *Красовский Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. №4. С.716-724.

[31] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

[32] *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974.

[33] *Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.* Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992.

[34] *Янушевский Р.Т.* Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978.

приводит к сопряженным системам, которые являются системами с опережением. Совместное использование исходной и сопряженной систем дает систему опережающе-запаздывающего типа (систему оптимальности). Как сами системы такого типа, так и содержательные задачи для таких систем изучены в литературе достаточно слабо. Для исследования и численного моделирования таких систем могут применяться подходы, алгоритмы и методы, разработанные в первых двух главах. В некоторых случаях оптимальное управление может быть выражено через решение системы оптимальности и эффективно вычислено. Среди таких случаев выделяются задачи с линейной и квазилинейной системами.

Рассматривается управляемая система с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f(\,t,\, x(t),\, x(t-\tau),\, u(t)\,), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$x(t_0+s) = \varphi(t_0+s), \quad s \in [-\tau, 0],$$

с некоторой заданной функцией $f = f(t,x,y,u)$ и заданной предысторией $\varphi = \varphi(t_0+s)$, $s \in [-\tau, 0]$. Множество допустимых управлений U состоит из всех измеримых функций, значения которых принадлежат некоторому множеству $P \subseteq \mathbb{R}^m$. Требуется минимизировать интегральный функционал качества

$$J(u) = \int_{t_0}^{\vartheta} F\,(\,t, x(t), u(t)\,)\,dt \to \min: \; u \in U \;,$$

где F — некоторая заданная функция.

Для рассматриваемой задачи справедливо необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума: если $u^0(\cdot)$ — оптимальное управление, $x^0(\cdot)$ — оптимальная траектория, то

$$H(t, x^0(t), x^0(t-\tau), u^0(t), \psi(t)) = \max_{v \in P} H(t, x^0(t), x^0(t-\tau), v, \psi(t)),$$
$$H(t,x,y,u,\psi) = \psi^T f(t,x,y,u) - F(t,x,u).$$

Сопряженная система для $\psi = \psi(t)$ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -H_x(t, x^0(t), x^0(t-\tau), u^0(t), \psi(t)) - \\ -H_y(t+\tau, x^0(t+\tau), x^0(t), u^0(t+\tau), \psi(t+\tau)) = \\ = -f_x^T(t, x^0(t), x^0(t-\tau), u^0(t))\psi(t) + F_x(t, x^0(t), u^0(t)) - \\ -f_y^T(t+\tau, x^0(t+\tau), x^0(t), u^0(t+\tau))\psi(t+\tau), \quad t \in [t_0, \vartheta], \\ \psi(t) = 0, \quad t \geqslant \vartheta. \end{cases}$$

Объединив сопряженную систему с исходной, получим систему с опережением и запаздыванием (систему оптимальности). Рассмотрим некоторые частные случаи.

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + C(t)u(t).$$

Пусть функционал качества является квадратичным и $P = \mathbb{R}^m$

$$J(u) = \int_{t_0}^{\vartheta} \left(\|x(t)\|_n^2 \ + \ \|u(t)\|_m^2\right) dt,$$

здесь $\|\cdot\|_k$ — евклидова норма в R^k, соответствующее скалярное произведение обозначим символом $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$. Функция Гамильтона-Понтрягина в данном случае имеет вид

$$H(t,x,y,u,\psi) = -\|x\|_n^2 - \|u\|_m^2 + \langle A(t)x + B(t)y + C(t)u, \psi\rangle_n.$$

Максимум этой функции по u достигается при

$$u^0(t) = 2^{-1}\, C^T(t)\psi(t).$$

Система оптимальности имеет вид

$$\left\{\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + 2^{-1}C(t)\, C^T(t)\psi(t), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in [t_0,\vartheta], \\ &x(t_0+s) = \varphi(t_0+s), \quad -\tau \leqslant s \leqslant 0, \\ &\dot{\psi}(t) = 2x(t) - A^T(t)\psi(t) - B^T(t+\tau)\psi(t+\tau), \quad t \in [t_0,\vartheta], \\ &\psi(t) = 0, \quad t \geqslant \vartheta. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

С помощью результатов первой главы формулируется теорема существования и единственности решения этой задачи. Путем дискретизации задача (11) сводится к системе линейных алгебраических уравнений, которая затем может решаться различными численными методами. Некоторые из численных методов разработаны в первой главе. Если $(x_\Delta(\cdot), \psi_\Delta(\cdot))$ — какое-либо приближенное решение системы оптимальности, то тем самым будет найдено и соответствующее приближение к оптимальному управлению

$$u_\Delta^0(t) = 2^{-1}\, C^T(t)\psi_\Delta(t) \approx u^0(t).$$

Рассмотрим квазилинейную систему следующего вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t,\, x(t-\tau)) + C(t,\, x(t-\tau))u(t).$$

Функционал качества будем считать интергальным и квадратичным, как и в линейном случае, и $P = \mathbb{R}^m$. Функция Гамильтона-Понтрягина в данном случае имеет вид

$$H(t, x, y, u, \psi)) = -\|x\|_n^2 - \|u\|_m^2 + \langle A(t)x + B(t, y) + C(t, y)u, \psi\rangle_n.$$

Воспользовавшись принципом максимума, находим

$$u^0(t) = 2^{-1}C^T(t, x(t-\tau))\psi(t).$$

Система оптимальности имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t, x(t-\tau)) + \\ +2^{-1}C(t, x(t-\tau))C^T(t, x(t-\tau))\psi(t), \quad t \in [t_0, \vartheta], \\ x(t_0+s) = \varphi(t_0+s), \quad -\tau \leqslant s \leqslant 0, \\ \dot{\psi}(t) = 2x(t) - A^T(t)\psi(t) - B_y^T(t+\tau, x(t))\psi(t+\tau) - \\ -2^{-1}[C(t+\tau, x(t))C^T(t+\tau, x(t))\psi(t+\tau)]_y^T\psi(t+\tau), \\ \hfill t \in [t_0, \vartheta], \\ \psi(t) = 0, \quad t \geqslant \vartheta. \end{cases} \tag{12}$$

С помощью результатов второй главы формулируется теорема существования и единственности решения этой задачи. Путем дискретизации задача (12) сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений, которая затем может решаться различными численными методами, разработанными во второй главе. Если $(x_\Delta(\cdot), \psi_\Delta(\cdot))$ — какое-либо приближенное решение системы оптимальности, то тем самым будет найдено и соответствующее приближение к оптимальному управлению

$$u_\Delta^0(t) = 2^{-1}\, C^T(t, x_\Delta(t-\tau))\psi_\Delta(t) \approx u^0(t).$$

В заключительном параграфе главы приводятся результаты численного моделирования. Описание соответствующего программного комплекса для численного моделирования и несколько страниц пользовательского интерфейса приведены в Приложении-3.

Опишем, к примеру, результаты численного моделирования решения задачи оптимального управления (системы оптимальности) для системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t-\tau) + c(t)u(t), \quad t \in [t_0, \vartheta], \\ x(t) = \varphi(t), \quad t_0 - \tau \leqslant s \leqslant t_0. \end{cases}$$

Здесь $u^0(t) = 2^{-1}c(t)\psi(t)$, система оптимальности имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t-\tau) + 2^{-1}c^2(t)\psi(t), \quad t \in [t_0, \vartheta], \\ x(t) = \varphi(t), \quad t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0, \\ \dot{\psi}(t) = 2x(t) - a(t)\psi(t) - b(t+\tau)\psi(t+\tau), \quad t \in [t_0, \vartheta], \\ \psi(t) = 0, \quad t \geqslant \vartheta. \end{cases}$$

Выпишем расширенные матрицы

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} a(t) & 2^{-1}c^2(t) \\ 2 & -a(t) \end{pmatrix}, \quad B_0(t) = \begin{pmatrix} b(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b(t+\tau) \end{pmatrix}.$$

Предварительно система оптимальности сводится к задаче с начальной предысторией, чтобы можно было воспользоваться программами, написанными для расчетов примеров из главы I. Для этой цели используется метод стрельбы. При этом систему оптимальности удобно записать в матричном виде с использованием расширенных матриц. Затем модифицированная система оптимальности решается численно путем дискретизации с использованием явного метода Эйлера. Полученная при этом система линейных алгебраических уравнений решается методом Гаусса-Зейделя, методом сопряженных градиентов и методом минимальных невязок). Приведем один из конкретных примеров численного моделирования.

Пример 3.4.2. Параметры эксперимента: $t \in [0, 3]$, шаг дискретизации $\Delta = 1/20$, запаздывание $\tau = 1$, количество шагов в итерационных численных методах Гаусса-Зейделя и минимальных невязок 10000, в методе сопряженных градиентов количество итераций определяется автоматически. Функция предыстории $\varphi(t) = 2 + 0.1\,t$, $t \in [-1, 0]$,

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} -0.1\,sin(t) & 0.5 - 0.1\,t + 0.005\,t^2 \\ 2 & 0.1\,sin(t) \end{pmatrix}, \; B_0(t) = \begin{pmatrix} 0.1\,t^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.1 - 0.2\,t - 0.1\,t^2 \end{pmatrix}.$$

При таком выборе параметров условие (4) существования и единственности решения задачи выполняется. Результаты расчетов приведены на рисунке 3.4.2. На верхнем рисунке изображена переменная состояния системы, на нижнем — сопряженная переменная. При этом $J(u^0_\Delta) = 1.074$.

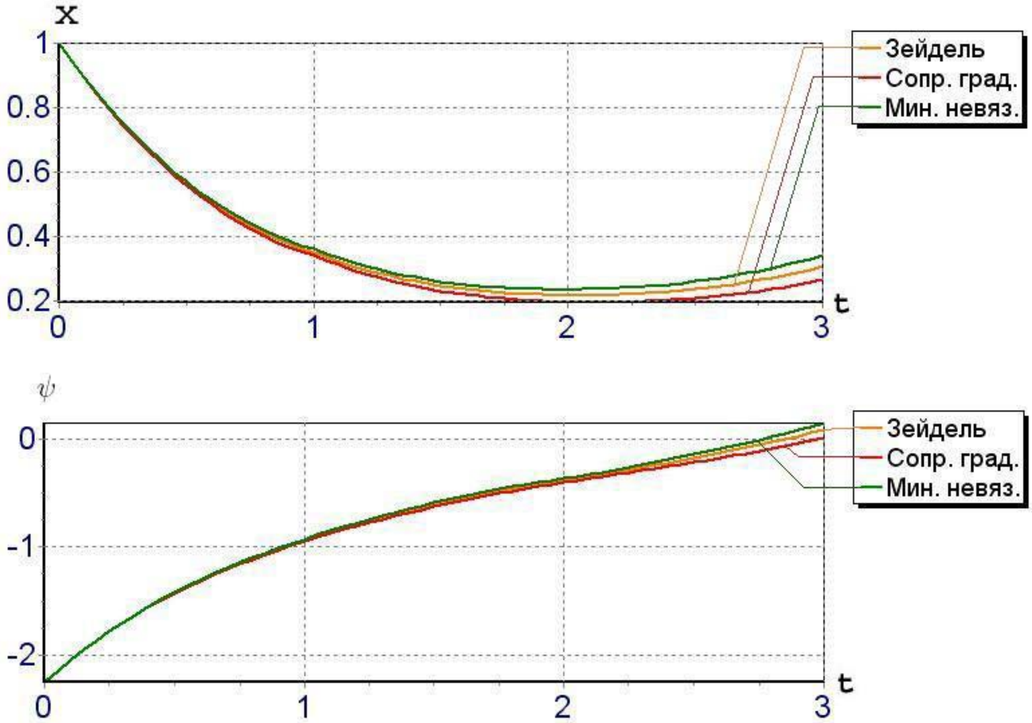

Рисунок 3.4.2. Решение системы оптимальности в примере 3.4.2.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах:

1. Пименов В.Г., Короткий Д.А. О решении систем дифференциальных уравнений с опережением и запаздыванием // **Известия Уральского госуниверситета.** 2006. № 44. (Серия: Математика и механика. Выпуск 9.). С. 113–139, усл. печ. л. 2,21.

2. Короткий Д.А. Численное моделирование задачи оптимального управления для системы с запаздыванием // **Системы управления и информационные технологии.** 2008. № 1.2 (31). С. 291–295, усл. печ. л. 0,68.

3. Короткий Д.А. Решение задачи оптимального управления для системы с запаздыванием // **Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.** 2008. Выпуск 2. С. 61–62, усл. печ. л. 0,17.

Другие публикации:

4. Короткий Д.А., Пименов В.Г. Численное моделирование решений уравнений с опережением и запаздыванием // Тезисы докладов Всероссийской конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач"(Екатеринбург, 2-6 февраля 2004 г.). Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та. 2004. С. 119–120.

5. Короткий Д.А. Системы с опережением и запаздыванием: численное решение // Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. Выпуск 2 (36). С. 185–188.

6. Короткий Д.А. Нелинейная краевая задача с опережением и запаздыванием // Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. Выпуск 3 (37). С. 71–72.

7. Короткий Д.А. Системы с опережением и запаздыванием // Тезисы студенческих научных работ: Направление "Естественные науки". Екатеринбург: Издательство Уральского госуниверситета. 2006. С. 18–20.

8. Короткий Д.А. Моделирование оптимальных процессов для систем с запаздыванием // Информационные технологии моделирования и управления. 2008. № 3 (46). С. 304–310.