УДК 51–72

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОНЦЕНТРИРОВАННОЙ ФЕРРОЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ

Русанов М.С., Елфимова Е. А.

Уральский федеральный университет имени первого президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

rusanoff.mixail@yandex.ru, Ekaterina.Elfimova@urfu.ru

Аннотация. Целью данной работы является описание одновременного влияния как диполь-дипольных взаимодействий, так и амплитуды поля на динамическую восприимчивость и релаксационные процессы в феррожидкостях. Для этого будут построены формулы, отражающие зависимость диполь-дипольных и поле-дипольных взаимодействий. Акцент ставится на изучение области высоких амплитуд магнитного поля и восприимчивости Ланжевена. Полученные приближенные формулы для динамической восприимчивости комплексно предсказываю динамический отклик феррожидкостей, одновременно учитывая влияние амплитуды переменного поля и диполь-дипольных взаимодействий.

Ключевые слова ферромагнитная жидкость, уравнение Фоккера-Планка, магнитный момент, плотность вероятностей, намагниченность, динамическая восприимчивость, восприимчивость Дебая, восприимчивость Ланжевена.

THE DYNAMIC MAGNETIC SUSCEPTIBILITY OF A FERROFLUID: THE INFLUENCE OF INTERPARTICLE INTERACTIONS AND AC FIELD AMPLITUDE

Rusanov M. S., Elfimova E. A.

Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia

Abstract. This work describes the influence of dipole-dipole interactions and the field amplitude on the dynamic susceptibility and relaxation processes in ferrofluids. For this purpose, we will construct formulas reflecting the dipole-dipole and field-dipole interactions dependence. The main direction is the study of the region of high amplitudes of the magnetic field and the Langevin susceptibility. Approximate formulas for the dynamic susceptibility complexly predict the dynamic response of ferrofluids. At the same time, the influence of the amplitude of the alternating field and dipole-dipole interactions are considered.

Key words ferromagnetic liquid, Fokker-Planck equation, magnetic moment, probability density, magnetization, dynamic susceptibility, Debye susceptibility, Langevin susceptibility.

Феррожидкость моделируется как ансамбль из N сферических, одинакового диаметра, однодоменных частиц, распределенных в жидкости. Направление i-го магнитного момента описывается вектором $\boldsymbol{m}_i = m\widehat{\boldsymbol{m}}_i = m(\sin\theta_i\cos\varphi_i, \sin\theta_i\sin\varphi_i, \cos\theta_i)$. Положение центра i-ой частицы определяется радиус вектором $\boldsymbol{r}_i = r\widehat{\boldsymbol{r}}_i = r(\sin\zeta_i\cos\psi_i, \sin\zeta_i\sin\psi_i, \cos\zeta_i)$. Чтобы избежать размагничивающего эффекта был выбран сосуд с формой вытянутого цилиндра радиуса R и объёма V, вытянутый вдоль оси Oz. Внешнее переменное магнитное поле $\boldsymbol{H} = h\,cos(\omega t)\,\widehat{\boldsymbol{H}}$ действует в том же направлении, $\widehat{\boldsymbol{H}} = (0,0,1)$. Предполагается, что релаксация магнитного момента происходит согласно Броуновскому механизму релаксации. Из-за симметрии системы ориентация магнитного момента описывается только полярным углом θ_i. Вращательное движение магнитного момента случайно выбранной частицы (например, с номером 1) описывается плотностью вероятности $W = W(t,x)$, $x = \cos\theta_1$, которая является решением уравнения Фоккера-Планка:

$$2\tau_B\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\left(\frac{\partial W}{\partial x} + W\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right], \qquad (1)$$

где U – потенциальная энергия диполя в единицах тепловой энергии k_BT. $W(t,x)$ удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{-1}^{1} W(t,x)\,dx = 1. \qquad (2)$$

В отсутствии межчастичных взаимодействий, обозначаемой идеальным случаем (id), потенциальная энергия случайно выбранного диполя (с номером 1) имеет вид:

$$U = U_{id}(1) = \frac{U_H(1)}{k_BT} = -\alpha\cos(\omega t). \qquad (3)$$

Чтобы учесть диполь-дипольные взаимодействия воспользуемся результатом более ранней работы [1], в который одночастичная энергия $U_{id}(1)$ была расширена за счёт включений диполь-дипольный взаимодействий на основе модифицированной теории среднего поля первого порядка [1]:

$$U = U_{int}(1) = \frac{1}{k_BT}\left(U_H(1) + \rho\langle U_d(1,2)W^{id}(2)\rangle_2\right), \qquad (4)$$

где ρ – концентрация частиц, $W^{id}(2) = W^{id}(t,x_2)$ – вероятность ориентации магнитного момента частицы с номером 2 в идеальной системе. Угловые скобки означают усреднение по всем возможным ориентациям магнитного момента и положениям частицы номер 2.

$$\rho\langle U_d(1,2)W^{id}(2)\rangle_2 = \int d\widehat{m}_2\int d\widehat{r}_2 U_d(1,2)\,W^{id}(2), \qquad (5)$$

$$\int d\hat{\boldsymbol{m}}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} dx_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_2, \quad \int d\hat{\boldsymbol{m}}_2 \cdot 1 = 1,$$
$$\int d\hat{\boldsymbol{r}}_2 = \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi} d\psi_2 \int_0^{\pi} \sin\zeta_2 d\zeta_2 \int_d^{R/\sin\zeta_2} r_2^2 dr_2, \quad \int d\hat{\boldsymbol{r}}_2 \cdot 1 = V.$$

Подставляя результат интегрирования (5) в уравнение (4), получим:
$$U = U_{int}(1) = -\left[\alpha + \frac{\chi_L}{2}\int_{-1}^{1} W^{id}(t, x_2) x_2 dx_2\right] x\cos(\omega t). \qquad (6)$$

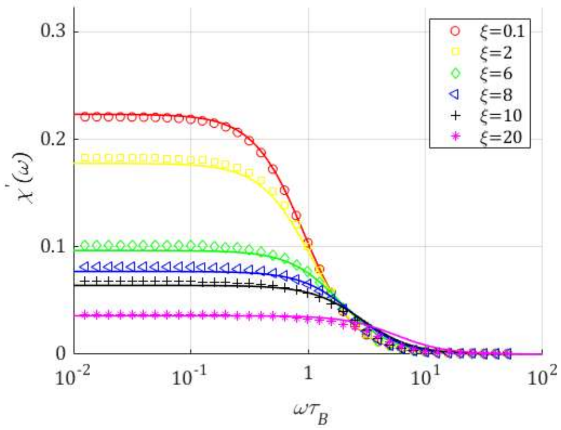
В потенциальную энергию диполя (6) восприимчивость Ланжевена χ_L входит в первой степени. Это означает, что в модель включены только парные межчастичные взаимодействия. Трёхчастичные, четырёхчастичные (и более) взаимодействия в этой модели не учитываются.

Для решения уравнения Фоккера-Планка используется конечно-разностная схема. Впервые эта схема была предложена в работе [2] для решения задач конвекции-диффузии. Также в [2] доказан критерий сходимости к решению. Преимуществом метода является стабильность решения даже в случае преобладания конвективного члена в уравнении.

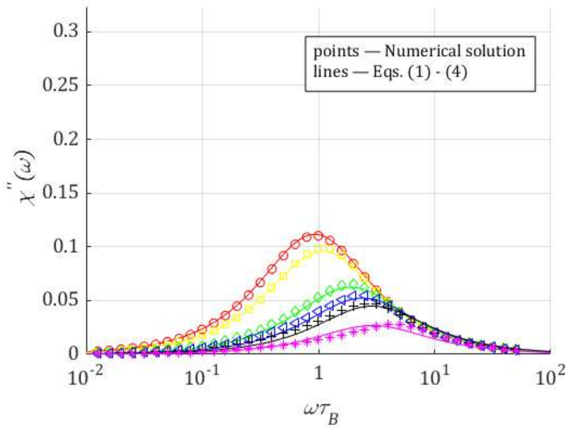
Для получения простого аналитического выражения для динамической восприимчивости взаимодействующих частиц в переменном поле произвольной амплитуды использовался метод, предложенный в работе [3]. Динамическая восприимчивость была представлена в виде (7), где $\chi(0)$ – значение действительной части восприимчивости на низких частотах, $1/\tau_e$ – положение и $[k\chi(0)/2]$ – значение максимума мнимой части динамической восприимчивости. В общем случае $\chi(0)$, τ_e и k являются функциями от α и χ_L. При формировании аналитических выражений для $\chi(0)$, τ_e и k зависимость от восприимчивости Ланжевена учитывалась до χ_L^2. Численные значения для $\chi(0)$, τ_e и k для системы с $\chi_L = 0.4$ аппроксимировались выражениями с неопределенными коэффициентами. В результате были получены следующие аналитические выражения для динамической восприимчивости в зависимости от амплитуды поля и с учётом взаимодействий:
$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega), \qquad (7)$$
$$\chi'(\omega) = \frac{\chi(0)}{1+(\omega\tau_e)^2},$$
$$\chi''(\omega) = k\frac{\chi(0)\omega\tau_e}{1+(\omega\tau_e)^2},$$
$$\chi(0) = \chi_L\left(1+\frac{\chi_L}{3}\right)\left(1-\frac{0.101\xi^2}{1+0.276\xi+\ .104\xi^2}\right), \qquad (8)$$
$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{1}{\tau_B}\sqrt{\left(1-\frac{\chi_L}{3}\right)^2 + 0.076\xi^2}, \qquad (9)$$

$$k = 1 + \frac{0.027\xi^2}{1+0.102\xi+0.047\xi^2}, \tag{10}$$

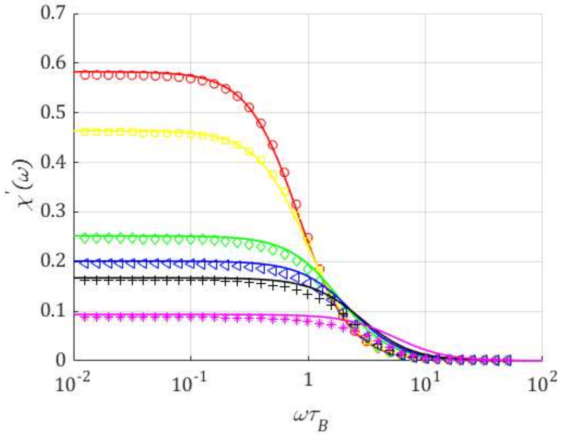
Стоит отметить, что новые формулы (7) – (10) были получены на основе численных результатов для системы с восприимчивостью Ланжевена $\chi_L = 0.4$. В дальнейшем, будет показано, что выражения (7) – (10) справедливы для систем и с другими значениями χ_L.



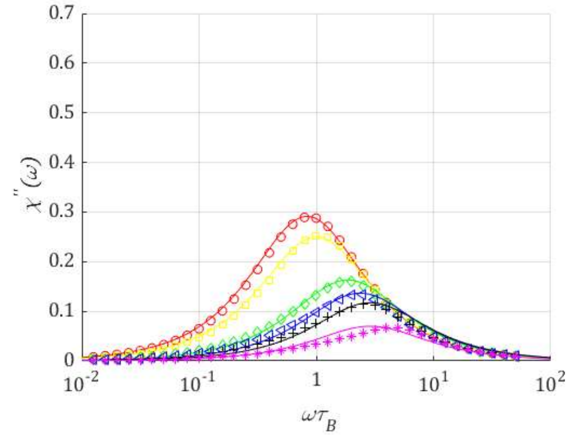
а)



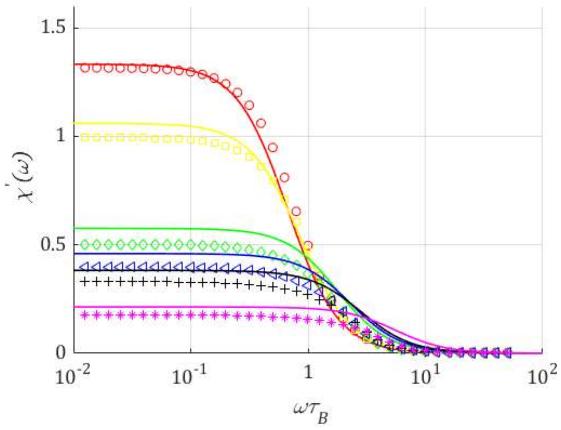
б)



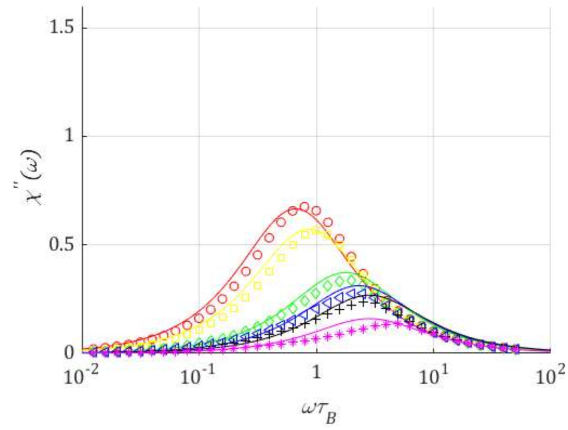
в)



д)



е)



ж)

Рисунок 1 – действительная $\chi'(\omega)$ и мнимая $\chi''(\omega)$ части восприимчивости взаимодействующих частиц с (а), (б) $\chi_L = 0.2$; (в), (д) $\chi_L = 0.5$; (е), (ж) $\chi_L = 1$. На всех графиках показана динамическая восприимчивость при амплитуде переменного поля $\xi = 0.1$, 2, 6, ,8, 10, 20. Точки взяты из численных расчетов, сплошные линии – формулы (7) – (10).

На рис 1. сравниваются численные расчеты динамической восприимчивости со взаимодействием частиц и результаты формул (7) – (10). Рассматриваются три системы с восприимчивостью Ланжевена $\chi_L = 0.2$, 0.5 и 1 для амплитуды переменного поля $0.1 \le \xi \le 20$. Для $\chi_L = 0.2$ и 0.5 численного решение хорошо соответствует теоретическим значениям. При $\chi_L = 1$ наблюдаются небольшие отклонения. В целом, можно заключить, что новые формулы надёжны в диапазоне $\chi_L \lesssim 1$ и $\xi \lesssim 20$. Как было отмечено ранее, межчастичные взаимодействия учитываются в уравнении Фоккера-Планка в пределах модифицированной теории среднего поля первого порядка. Это означает, что в модель включены только парные межчастичные взаимодействия. На рис. 1 видно, что увеличение амплитуды поля приводит к уменьшению восприимчивости и смещению вправо мнимой части $\chi''(\omega)$. Это приводит к уменьшение времени релаксации. Таким образом, увеличение амплитуды поля способствует ускорению ориентационной релаксации частиц в системе.

Библиографический список

1. O. Ivanov, V. S. Zverev, S. S. Kantorovich, Revealing the signature of dipolarinteractions in dynamic spectra of polydisperse magnetic nanoparticles, Soft Matter12 (15) (2016) 3507–3513. doi:10.1039/c5sm02679b.

2. N. Afanas'eva, P. N. Vabishchevich, M. V. Vasil'eva, Unconditionally stable schemes forconvection-diffusion problems, Russian Mathematics 57 (3) (2013) 1–11.

3. T. Yoshida, K. Enpuku, Simulation and quantitative clarification of ac susceptibilityof magnetic fluid in nonlinear brownian relaxation region, Japanese Journal of AppliedPhysics 48 (12R) (2009) 127002.