Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого
Президента России Б.Н. Ельцина»

На правах рукописи

Горбова Татьяна Владимировна

Численные методы исследования дробных моделей популяционной динамики

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2022

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики и компьютерных наук ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина».

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Солодушкин Святослав Игоревич
Официальные оппоненты:	Короткий Александр Илларионович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН», заведующий отделом прикладных задач.
	Масловская Анна Геннадьевна, доктор физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Амурский государственный университет» (г. Благовещенск), профессор кафедры математического анализа и моделирования.
	Алиханов Анатолий Алиевич, кандидат физико-математических наук ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет» (г. Ставрополь), проректор по научной и исследовательской работе.

Защита состоится 14 декабря 2022 г. в 13.00 на заседании диссертационного совета УрФУ 1.2.05.22 на базе ФГБОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина» по адресу: 620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, к.248.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», `https://dissovet2.urfu.ru/mod/data/view.php?d=12&rid=4041`.

Автореферат разослан «__» ________ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук Косолобов Д.А.

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы. Математические модели теории популяции отличаются большим разнообразием. В современных моделях присутствуют такие эффекты, как зависимость исследуемой численности популяции от времени и пространства, следовательно, динамика описывается уравнениями в частных производных; эффект зависимости от предыстории процесса, следовательно, модели могут иметь запаздывания различных видов, причем зависимости, как правило, нелинейные. В последнее время исследуются модели, в которых присутствуют дробные производные, кроме того, оператор дифференцирования может быть нелинейным.

Первые популяционные модели (Мальтуса, Верхлюста) описывались обыкновенными дифференциальными уравнениями. Одной из первых моделей, содержащих эффект запаздывания была модель Хатчисона

$$\dot{x}(t) = r(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}),$$

в которой был объяснен эффект периодичности решений, наблюдаемый при $r\tau > \pi/2$. В дальнейшем были рассмотрены многие модели, содержащие запаздывания более общего вида [9,10], такие уравнения получили названия функционально-дифференциальные [11].

Модели, описываемые уравнениями в частных производных с нелинейностью

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u(1-u),$$

которые имеют специальное решение в виде бегущей волны, получили названия уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова (КПП) или уравнения Фишера.

В последние годы появилось много моделей с использованием дробных производных. Среди них отметим работу [12], в которой рассматривалось уравнение

$$\frac{\partial^\alpha p(x,y,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 \phi(p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(p)}{\partial y^2} + g(x,y,t,p), \tag{1}$$

t, x, y — независимые переменные, имеющие смысл времени и пространственных координат соответственно, $p = p(x,y,t)$ — искомая функция, имеющая смысл плотности популяции, $g(x,y,t,p)$ — функция неоднородности, $\phi(p)$ — функция, учитывающая тот факт, что движение происходит почти исключительно против градиента плотности населения и тем более быстро, чем выше плотность популяции в данной точке, $0 < \alpha < 1$. Эта модель (будем называть её по имени первого автора моделью Srivastava) наряду с дробными производными имеет нелинейность в операторе дифференцирования, что наделяет систему существенными особенностями.

Так как аналитическими методами сложные модели удается полностью исследовать крайне редко, на первый план выходит необходимость эффективных численных методов.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений с эффектом запаздывания численные алгоритмы решения разработаны достаточно полно, см. монографии [13, 14] и библиографические ссылки в них. Для уравнений в частных производных самым эффективным остается разностный подход [15], в частности, для уравнений в частных производных с эффектом запаздывания разностные методы описаны в [16]. Литература по численным методам решения уравнений с дробными производными достаточно обширна и всё время пополняется, отметим статьи [17–23] и монографию [24].

В то же время, численные алгоритмы для решения уравнений вида (1) с нелинейностью в операторе дифференцирования в настоящее время не разработаны. Тем более отсутствуют численные алгоритмы для уравнений с нелинейностью в операторе дифференцирования и эффектом запаздывания. В исследованиях диссертационной работы предполагается восполнить этот пробел.

Цели и задачи диссертационной работы. Работа направлена на развитие и обоснование методов математического моделирования дробных моделей популяционной динамики с нелинейностью в операторе дифференцирования и с наличием эффекта запаздывания общего вида. Целью работы является разработка и обоснование сходимости сеточных численных методов решения дробных диффузионных уравнений с нелинейностью в операторе дифференцирования и с эффектом запаздывания общего вида. К задачам работы относятся:

1. Разработать алгоритмы численного решения диффузионного уравнения с нелинейностью в операторе дифференцирования и с функциональной наследственностью и исследовать порядки их сходимости.

2. Разработать алгоритмы численного решения уравнения с дробной нелинейной по пространству производной и исследовать порядки их сходимости.

3. Разработать алгоритмы численного решения диффузионного уравнения с дробной нелинейной по времени производной и функциональной наследственностью, исследовать порядки их сходимости.

4. Для указанных выше задач провести численные эксперименты на тестовых

примерах.

5. Разработать программный комплекс, реализующий разработанные алгоритмы и провести численные эксперименты на тестовых задачах.

6. Провести численные эксперименты на модельных примерах теории популяционной динамики.

Методология и методы исследования. В основе исследования лежат понятия и методы общей теории численных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Так как объектом численного решения являются различные типы дифференциальных уравнений дробного порядка, то в исследованиях используются понятия теории дробного исчисления и дробных уравнений. Однако, исследуемые эффекты наследственности потребовали для построения и исследования разрабатываемых численных методов использовать также понятия и методологию численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений [13], особенно теоремы сходимости в общей схеме систем с наследственностью, в форме, приспособленной для уравнений с частными производными [16]. Для исследования дробных по пространству уравнений с нелинейным оператором дифференцирования, кроме того, используются аппроксимации дробных производных из [22]. Для доказательств сходимости сконструированных методов решения дробных по времени уравнений используется аппарат дробных дискретных неравенств Гронуолла [19–21].

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие основные результаты.

Для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе разработан неявный численный метод; при этом нелинейные системы алгебраических уравнений, возникающие на каждом временном слое, решаются методом Ньютона. Для предложенного метода исследована устойчивость и определен порядок сходимости.

Для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе разработан численный метод, являющийся аналогом метода Кранка-Николсон, для данного метода исследована устойчивость и определен порядок сходимости.

Для дробного по пространственной переменой уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе разработан неявный численный метод, метод исследован на устойчивость и сходимость.

Для модели популяционной динамики дробного по времени порядка с запаздыванием общего вида разработан неявный численный метод, для которого исследована устойчивость и определен порядок сходимости.

Положения, выносимые на защиту:

- разработанные и обоснованные разностные методы для решения диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе. Доказательство устойчивости этих методов и определение порядка их сходимости;

- разработанный и обоснованный неявный разностный метод для решения уравнения дробного порядка по пространственной переменой с нелинейностью в дифференциальном операторе;

- разработанные и обоснованные численные методы для решения уравнения дробного порядка по времени с запаздыванием общего вида, возникающего в модели популяционной динамики;

- разработанные комплексы программ для численного решения начально-краевых задач с нелинейностью в дифференциальном операторе.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретическая значимость работы состоит в разработке и исследовании численных алгоритмов для новых классов задач, возникающих в популяционной динамике, а именно, для уравнений диффузионного типа с нелинейностью в операторе дифференцирования и эффектом наследственности; для уравнений диффузионного типа с нелинейностью в операторе дифференцирования и дробной пространственной производной; для уравнений диффузионного типа с нелинейностью в операторе дифференцирования и эффектом наследственности и дробной временной производной.

Практическая значимость работы состоит в возможном применении результатов работы для исследования с помощью компьютерных экспериментов сложных моделей популяционной динамики. Возможно также применение разработанных численных алгоритмов в моделировании других явлений, описываемых подобными математическими моделями, например, в газовой динамике.

Достоверность результатов. Достоверность полученных в работе результатов подтверждается соответствующими математическими доказательствами и проведенными компьютерными экспериментами на тестовых примерах.

Апробация работы. Основные результаты работы обсуждались на семинарах кафедры вычислительной математики и компьютерных наук Института естественных наук и математики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, а также представлялись на следующих конференциях:

49-ой и 52-ой Всероссийских с международным участием школах-конференциях «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2018 и 2021);

49-ой и 52-ой Всероссийских с международным участием школах-конференциях «Современные проблемы математики и ее приложений», (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2018 и 2021);

7th International Conference on Finite Difference Methods. Theory and Applications. FDM 2018, (Lozenetz, Bulgaria, 2018);

IV международной научной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики (Нальчик, 2018);

International Conference on Differential and Difference Equations and Applications. ICDDEA 2019, (Lisbon, Portugal, 2019);

X Всероссийской конференции с международным участием «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященной памяти академика А.Ф.Сидорова и 100-летию Уральского федерального университета, (Абрау-Дюрсо, 2020).

Личный вклад. В работах, написанных в соавторстве с научным руководителем, С.И.Солодушкину принадлежит постановка задач и помощь в подготовке публикаций. В работах, написанных в соавторстве с В.Г.Пименовым, соавтору В.Г.Пименову принадлежит выбор общих методик исследований и постановка целей. Основные результаты принадлежат лично автору, а именно: детальная разработка численных алгоритмов рассматриваемых задач, их тестирование и исследование порядков их сходимости; разработка программного комплекса, реализующего разработанные алгоритмы; проведение численных экспериментов на модельных примерах теории популяционной динамики и сравнение их с результатами, полученными аналитически при определенных условиях. Систематизация результатов и подготовка научных публикаций также принадлежат лично автору.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]- [8]. Работы [1]- [6] опубликованы в изданиях, индексируемых в международных базах Scopus или WoS, из них 2 работы [2], [6] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК.

Благодарности. Автор благодарит научного руководителя кандидата физико-математических наук, доцента С.И.Солодушкина за постоянное внимание к работе, а также сотрудников кафедры вычислительной математики и компьютерных наук за ценные советы. Исследование проведено при поддержке проекта 075-02-2021-1387 Министерства науки и высшего образования РФ «Уральский математический центр».

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Библиография содержит 118 наименования. Общий объем работы составляет 104 страницы машинописного текста.

Основное содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор литературы по изучаемой проблеме, ставятся цели и задачи работы, изложена ее научная и практическая значимость.

В главе 1 конструируются и исследуются численные алгоритмы решения начально-краевой задачи для параболического дифференциального уравнения с нелинейностью в операторе дифференцирования и с эффектом наследственности. В разделе 1.1 приводится мотивировка задачи и краткий обзор источников. Далее проводится постановка задачи для уравнения

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(p)}{\partial x^2} + g(x,t,p_t(x,\cdot)). \tag{2}$$

Предполагая однозначную обратимость $\phi(p)$ на интересующей нас области, сделаем замену $u = \phi(p)$, $p = \omega(u)$, тогда (2) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \omega(u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t,u_t(x,\cdot)),\ u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+s), -\tau \leqslant s \leqslant 0\}. \tag{3}$$

Соответствующим образом изменятся начальные и граничные условия. Делаются предположения относительно существования и единственности решения $u(x,t)$ этой задачи и его достаточной гладкости. Также предполагается липшицевость функционала f по третьему аргументу и выполнение условия гладкости функции $\omega(u)$ и условия

$$0 < \hat{\omega} \le \omega'(u). \tag{4}$$

В разделе 1.2 проводится дискретизация задачи. Разобьем отрезок изменения пространственной переменной $[0, X]$ на части с шагом $h = X/N$, введя точки $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$, и разобьем отрезок изменения временной переменной $[-\tau, T]$ на части с шагом $\Delta = T/M$ (без ограничения общности $\tau/\Delta = m$ — целое), введя точки $t_j = j\Delta$, $j = -m, \ldots, M$. Приближения функций $u(x_i, t_j)$ в узлах сетки будем обозначать через u^i_j. При всяком фиксированном $i = 0, \ldots, N$ введем дискретную предысторию к моменту t_j, $j = 0, \ldots, M$: $\{u^i_k\}_j = \{u^i_k, j - m \leqslant k \leqslant j\}$. Вводится понятие интерполяции и экстраполяции дискретной предыстории. В дальнейшем в этой главе используется кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением.

Для $j = 0, 1, ..., M-1$, рассматривается нелинейная неявная разностная схема

$$\begin{gathered}\frac{\omega(u^i_{j+1}) - \omega(u^i_j)}{\Delta} = \frac{u^{i-1}_{j+1} - 2u^i_{j+1} + u^{i+1}_{j+1}}{h^2} + f(x_i, t_{j+1}, u^i_j(\cdot)),\ i = 1, ..., N-1, \\ u^0_{j+1} = \mu_0(t_{j+1}),\ u^N_{j+1} = \mu_1(t_{j+1}),\end{gathered} \tag{5}$$

с начальными условиями $u^i_j = \phi(\varphi(x_i, t_j)),\ i = 0, ..., N,\ j = -m, ..., 0$. Здесь $u^i_j(\cdot)$ — результат интерполяции с экстраполяцией.

Для решения (5) на каждом временном слое j применяется метод Ньютона

$$\begin{gathered}\omega(u^i_{j+1}[k]) + \omega'(u^i_{j+1}[k])(u^i_{j+1}[k+1] - u^i_{j+1}[k]) - \\ - \Delta\frac{u^{i-1}_{j+1}[k+1] - 2u^i_{j+1}[k+1] + u^{i+1}_{j+1}[k+1]}{h^2} = \omega(u^i_j) + \Delta f(x_i, t_{j+1}, u^i_j(\cdot)),\end{gathered} \tag{6}$$

Система (6) представляет собой трехдиагональную систему линейных уравнений с диагональным преобладанием и может быть эффективно решена с помощью алгоритма прогонки. Далее проводится обоснование сходимости предложенного метода.

В разделе 1.3. приводятся элементы общей теории нелинейных разностных схем с наследственностью, являющейся обобщением на нелинейный случай схемы [16]. Также рассматривается общая теория аппроксимационных разностных схем систем с наследственностью. Доказываются теоремы о порядках сходимости в этих аксиоматических схемах.

В следующем разделе производится вложение метода (6) в эту общую схему.

В разделе 1.5 проверяется устойчивость метода (6), необходимая для применения общих теорем о порядках сходимости.

В разделе 1.6 вводятся невязка неявного нелинейного метода (5) и невязка аппроксимационного метода (6). Изучается их порядок малости относительно шагов дискретизации и числа итераций. В результате вложения, факта устойчивости и определения порядков невязки получается утверждение.

Теорема 5. *Неявный аппроксимационный метод* (6) *сходится и имеет порядок сходимости* $\Delta + h^2 + \lambda^{2^K}$, $0 < \lambda < 1$, *где* λ *— число, определяемое параметрами метода.*

В разделе 1.7 приводятся результаты численных экспериментов на тестовом примере с нелинейностью в дифференциальном операторе и с наличием распределенного запаздывания, имеющем известное точное решение. Результаты экспериментов подтверждают теоретические выводы о сходимости метода.

В разделе 1.8 для той же задачи рассматривается более точный относительно шага по времени метод, являющийся аналогом метода Кранка-Николсон

$$\begin{aligned}\frac{\omega(u^i_{j+1}) - \omega(u^i_j)}{\Delta} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{u^{i-1}_{j+1} - 2u^i_{j+1} + u^{i+1}_{j+1}}{h^2} + \frac{u^{i-1}_j - 2u^i_j + u^{i+1}_j}{h^2}\right) + \\ + f(x_i, t_j + \frac{\Delta}{2}, u^i_{t_j+\frac{\Delta}{2}}(\cdot)),\ i = 1, \ldots, N-1.\end{aligned} \tag{7}$$

Будем решать (7) при каждом фиксированном j методом Ньютона

$$\begin{aligned}\omega(u^i_{j+1}[k]) + \omega'(u^i_{j+1}[k])(u^i_{j+1}[k+1] - u^i_{j+1}[k]) - \\ - a^2\Delta\frac{u^{i-1}_{j+1}[k+1] - 2u^i_{j+1}[k+1] + u^{i+1}_{j+1}[k+1]}{2h^2} = \\ = a^2\Delta\frac{u^{i-1}_j - 2u^i_j + u^{i+1}_j}{2h^2} + \omega(u^i_j) + \Delta f(x_i, t_j + \frac{\Delta}{2}, u^i_{t_j+\frac{\Delta}{2}}(\cdot)).\end{aligned} \tag{8}$$

В разделе 1.9 аналог метода Кранка-Николсон (7) вкладывается в нелинейную разностную схему раздела 1.3, доказывается устойчивость метода, исследуется порядок невязки метода (7) и аппроксимационного метода (8), в результате получается следующий результат

Теорема 7. *Метод* (8) *сходится и имеет порядок сходимости* $\Delta^2 + h^2 + \lambda^{2^K}$, $0 < \lambda < 1$.

В разделе 1.10 описаны численные эксперименты на тестовых примерах, имеющих известные точные решения. Эти эксперименты показали сходимость метода (8) и его преимущества перед методом (6). При этом сравнивались не только зависимости максимальной величины погрешности от шагов дискретизации, но и вычислительный порядок сходимости. В случае аналога метода Кранка-Николсон (8) вычислительный порядок погрешности по временному шагу Δ оказался близок к 2, что согласуется с утверждением теоремы 7.

В главе 2 конструируются и исследуются численные алгоритмы решения начально-краевой задачи для дробного по пространственной координате уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе. Для простоты в этой главе рассматриваются уравнения без запаздывания и зависимости в неоднородности от искомой функции.

В разделе 2.1 приводится мотивировка задачи и краткий обзор источников. Далее проводится постановка начально-краевой задачи для уравнения

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^\alpha \phi(p(x,t))}{\partial x^\alpha} + f(x,t). \tag{9}$$

Левосторонняя дробная производная определяется в смысле Римана–Лиувилля

$$\frac{\partial^\alpha F(x)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{F(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha-n+1}}\, d\xi,$$

где n — целое, такое, что $n-1 < \alpha \le n$, а также предположим, что $F(x) = 0$ для $x \le 0$. Далее будем рассматривать случай $1 < \alpha \le 2$.

Предполагая однозначную обратимость функции $\phi(p)$ в рассматриваемой области, сделаем подстановку $u = \phi(p)$, $p = \omega(u)$, тогда (9) примет вид

$$\frac{\partial \omega(u(x,t))}{\partial t} = \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} + f(x,t), \tag{10}$$

с соответствующими начальными и граничными условиями.

Делаются предположения относительно существования и единственности решения $u(x,t)$ этой задачи и его достаточной гладкости. Также предполагается выполнение условия гладкости функции $\omega(u)$ и условия (4).

В разделе 2.3 проводится дискретизация задачи и строится разностная схема. Для аппроксимации левосторонней дробной производной в узлах будем использовать сдвинутые формулы Грюнвальда

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i,t_j)}{\partial x^\alpha} \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s}\, u(x_{i+1-s},t_j), \quad 1 \le i \le N-1,$$

где нормализованные веса Грюнвальда определяются следующим образом $g_{\alpha,0} = 1$ и

$$g_{\alpha,s} = (-1)^s \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-s+1)}{s!},\ s = 1,2,3,\dots.$$

В результате получается нелинейная неявная разностная схема (аналог схемы

Кранка-Никольсон)

$$\frac{\omega(u_{j+1}^i)-\omega(u_j^i)}{\Delta}=\frac{1}{2h^\alpha}\left(\sum_{s=0}^{i+1}g_{\alpha,s}\,u_{j+1}^{i+1-s}+\sum_{s=0}^{i+1}g_{\alpha,s}\,u_j^{i+1-s}\right)+f_{j+1/2}^i,$$
$$\text{для}\ \ i=1,...,N-1,$$
$$\text{и}\ \ u_{j+1}^0=\mu_0(t_{j+1}),\ u_{j+1}^N=\mu_1(t_{j+1}), \tag{11}$$

где $f_{j+1/2}^i=f(x_i,t_j+\Delta/2)$.

Для каждого фиксированного j система (11) является нелинейной системой уравнений относительно u_{j+1}^i, $i=1,...,N-1$. Для решения (11) на каждом временном слое j применим вариант метода Ньютона

$$\omega(u_{j+1}^i[k])+\omega'(u_{j+1}^i[k])(u_{j+1}^i[k+1]-u_{j+1}^i[k])-\omega(u_j^i)=$$
$$=\frac{\Delta}{2h^\alpha}\left(\sum_{s=0}^{i+1}g_{\alpha,s}\,u_{j+1}^{i+1-s}+\sum_{s=0}^{i+1}g_{\alpha,s}\,u_j^{i+1-s}\right)+\Delta f_{j+1/2}^i. \tag{12}$$

В разделе 2.4 исследуется разрешимость системы (12), следуя работе [22].

В разделе 2.5 производится вложение исследуемого метода в общую схему, изложенную в разделе 1.3. Также проверяется устойчивость метода (12).

В разделе 2.6 вводится понятия невязки нелинейного метода (11) и невязки аппроксимационного метода (12) и исследуются их порядки малости относительно шагов дискретизации и числа итераций в (12). Выводится результат

Теорема 10. *Метод* (12) *сходится и имеет порядок сходимости* $\Delta^2+h+\lambda^{2^K}$, $0<\lambda<1$.

В разделе 2.7 приводятся результаты численных экспериментов на тестовых примерах.

В главе 3 конструируются и исследуются численные алгоритмы решения начально-краевой задачи для дробного по времени уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе и с наличием эффекта запаздывания. Задача для дробного по времени уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе была в базовой модели популяционной динамики [12].

В разделе 3.1 приводятся источники техники конструирования численных алгоритмов и доказательства теоремы сходимости. Техника доказательства сходимости основана на дробном дискретном неравенстве Гронуолла и значительно отличается от используемой в предыдущих главах.

Приводится постановка задачи. Рассматривается уравнение вида

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha}=\frac{\partial^2\phi(u)}{\partial x^2}+f(x,t,u(x,t),u_t(x,\cdot)), \tag{13}$$

$0 \leqslant t \leqslant T, \quad 0 \leqslant x \leqslant X-$ независимые переменные, $u(x,t)$ — искомая функция, $u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+s), \tau \leqslant s < 0\}$ — предыстория искомой функции к моменту t, $\tau > 0$ — величина запаздывания. Дробная производная Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, определяется формулой

$$\frac{d^\alpha F(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{F'(\xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi, \ t > 0.$$

Заданы граничные и начальные условия

$$u(0,t) = u_0(t), \ u(X,t) = u_1(t), \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{14}$$

$$u(x,0) = \varphi(x,t), \ 0 \leqslant x \leqslant X, \ -\tau \leqslant t \leqslant 0. \tag{15}$$

Предполагается, что решение этой задачи существует и единственно, а также делаются предположения достаточной гладкости решения $u(x,t)$ и функции $\phi(u)$, липшецевости функционала f по двум последним аргументам и выполнения условия (4).

В разделе 3.2 проводится дискретизация задачи и строится разностная схема. Как и в предыдущих главах, приближения функций $u(x_i,t_j)$ в узлах сетки обозначим u_j^i.
Заменим производную Капуто на разностный оператор

$$D_\Delta^\alpha u_m^i = \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{m} a_{m-j}(u_j^i - u_{j-1}^i), \tag{16}$$

$a_i = (i+1)^{1-\alpha} - i^{1-\alpha}$. Эта аппроксимация, называемая L_1-аппроксимацией дробной производной [24], имеет порядок малости по Δ, равный $2-\alpha$. Заменим вторую производную по x разностным оператором

$$\delta_x^2 \phi(u_m^i) = \frac{\phi(u_m^{i-1}) - 2\phi(u_m^i) + \phi(u_m^{i+1})}{h^2},$$

который при сделанных предположениях имеет порядок малости по h, равный 2. Для $m = 1, 2, \ldots, M$, рассмотрим нелинейную неявную разностную схему

$$D_\Delta^\alpha u_m^i = \delta_x^2 \phi(u_m^i) + f(x_i, t_m, u_{m-1}^i, u_{m-1}^i(\cdot)), \ i = 1, \ldots, N-1, \tag{17}$$

$u_m^0 = u_0(t_m), \ u_m^N = u_1(t_m)$, с начальными условиями $u_m^i = \varphi(x_i,t_m), \ i = 0, \ldots, N, \ m = -M_0, \ldots, 0$, где $u_{m-1}^i(\cdot)$ является результатом кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией продолжением.

В разделе 3.3 проводится анализ погрешности метода. Вводятся понятия погрешности ε_m^i, невязки без интерполяции и невязки с интерполяцией метода

(17). Доказывается, что при сделанных в этой главе предположениях невязка без интерполяции и невязка с интерполяцией имеют порядок $\Delta + h^2$. Указывается также метод с кусочно-линейной интерполяцией, невязка которого имеет порядок $\Delta^{2-\alpha} + h^2$.

Далее приводятся утверждения и понятия, необходимые для доказательства теоремы сходимости, главное из которых — вариант дробного дискретного неравенства Гронуолла [20]. Приводится дополнительное предположение

Условие 3.1. Пусть выполняется

$$\sum_{i=1}^{N-1}(-h\delta_x^2\varepsilon_m^i)\delta_x^2(\phi(u(x_i,t_m)) - \phi(u_m^i)) \leqslant \sum_{i=1}^{N-1}(-h)(\delta_x^2\varepsilon_m^i)^2.$$

Также приводятся достаточные условия его выполнения.

При сделанных предположениях доказывается утверждение

Теорема 11. *Погрешность метода* (17) *имеет первый порядок малости по* Δ *и второй по* h.

В разделе 3.4 описывается алгоритм приближенного решения нелинейной системы (17).

Предполагая однозначную обратимость $\phi(u)$ на интересующей нас области, сделаем замену $z = \phi(u)$, $u = \omega(z)$, соответственно $z_m^i = \phi(u_m^i)$, тогда (17) для каждого $m = 1, \ldots, M$ запишется в виде

$$\begin{gathered} D_\Delta^\alpha \omega(z_m^i) = \delta_x^2 u_m^i + f(x_i, t_m, \omega(z_{m-1}^i), \omega(u_{m-1}^i)(\cdot)),\ i = 1, \ldots, N-1, \\ \hfill z_m^0 = \phi(u_0(t_m)),\ z_m^N = \phi(u_1(t_m)), \end{gathered} \tag{18}$$

с начальными условиями $z_0^i = \phi(\varphi(x_i)),\ i = 0, \ldots, N$.

Для решения этой системы на каждом временном слое m применим метод Ньютона. Обозначим приближение z_m^i на k итерации через $z_m^i[k]$, возьмем $z_m^i[0] = z_{m-1}^i$, получаем на каждой итерации линейную систему

$$\begin{multlined} \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\omega'(z_m^i[k])z_m^i[k+1] - \delta_x^2 z_m^i[k+1] = \\ = \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}(\omega'(z_m^i[k])z_m^i[k] - \omega(z_m^i[k])) + \\ + \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\omega(z_{m-1}^i) - \tilde{D}_\Delta^\alpha \omega(z_{m-1}^i) + f(x_i, t_m, \omega(z_{m-1}^i), \omega(u_{m-1}^i)(\cdot)). \end{multlined} \tag{19}$$

Система (19) представляет собой трехдиагональную систему линейных уравнений и может быть решена методом прогонки.

В разделе 3.5 приводятся результаты численных экспериментов на тестовых примерах.

Глава 4 посвящена описанию программного комплекса, позволяющего проводить компьютерные эксперименты для численного исследования моделей популяционной динамики. Было разработано четыре программных модуля, соответствующие исследуемым алгоритмам. Разработанные методы численного решения дифференциальных уравнений реализованы на языке программирования Python 3.7 и включены в расширяемый комплекс программ «Исследование дробных моделей популяционной динамики». Модули представлены в виде ipynb-файлов — документов, которые хранятся в текстовом формате JSON. Они включают в себя входные и выходные данные вычислений, непосредственно исполняемый код, изображения и пояснительный текст. Для визуализации графики используется библиотека Matplotlib версии 2.1.1.

В главе 5 приведены результаты численных экспериментов для тестовых моделей непосредственно и для моделей популяционной динамики с помощью программного комплекса, описанного в главе 4. Приводятся численные расчеты по классической модели КПП, затем в эту модель вводится распределенное запаздывание. Отдельно исследуется одномерная по пространственной переменной модель [12], содержащая нелинейность в операторе дифференцирования. В последнем примере в уравнение модели вводится дополнительный эффект запаздывания.

В заключении приводятся основные результаты проделанной работы, указываются возможные направления дальнейших исследований.

Заключение

Для важного с практической точки зрения класса моделей популяционной динамики, содержащих уравнение диффузионного типа, осложненное эффектами дробных производных, нелинейности в операторах дифференцирования и запаздывания общего вида в диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе разработан, протестирован и исследован на устойчивость и порядок сходимости неявный численный метод в сочетании с методом Ньютона для решения возникающей системы нелинейных уравнений.

2. Для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе разработан, протестирован и исследован на устойчивость и порядок сходимости аналог метода Кранка-Николсон.

3. Для дробного по пространственной переменой уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе разработан, протестирован и исследован на устойчивость и порядок сходимости аналог метода Кранка-Николсон в сочетании с методом Ньютона для решения возникающей системы нелинейных уравнений.

4. Для дробного по времени уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе и с эффектом запаздывания разработан, протестирован и исследован на устойчивость и порядок сходимости неявный численный метод в сочетании с методом Ньютона для решения возникающей системы нелинейных уравнений.

Рекомендации и дальнейшие перспективы разработки темы. Одним из возможных направлений для продолжения исследований может послужить разработка более точных численных методов для решения всех задач, рассмотренных в диссертации. Так для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе возможна разработка и исследование аналога компактной схемы, имеющей четвертый порядок малости по пространственному шагу. Для дробного по пространственной переменой уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе можно рассмотреть уравнения с эффектом наследственности. Для этого класса задач возможна разработка численных методов второго порядка по шагу времени. Для дробного по времени уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе и с эффектом запаздывания возможно перенести на этот класс уравнений метод А.А.Алиханова порядка $3-\alpha$ по шагу времени. Эти, более точные методы, могут быть оформлены в виде комплекса программ, предназначенные для решения соответствующих задач в теории популяций и аналогичных задач в других науках, например, в газовой динамике.

Интересным направлением является повышение точности разностных схем с использованием экстраполяции по Ричардсону. При достаточной гладкости решения начально-краевой задачи ошибка метода допускает разложение в ряд по степеням некоторого малого параметра, которым является, например, шаг сетки. Это открывает возможность составить линейную комбинацию решений, найденных при разных шагах, таким образом, что главные члены в разложении погрешностей сократятся и точность метода повысится.

Эти более точные методы могут быть оформлены в виде комплекса программ, предназначенного для решения соответствующих задач в теории популяций и аналогичных задач в других науках, например, в газовой динамике.

Другое возможное направление исследований связано с задачами двух пространственных переменных. Именно такие задачи рассматривались в базовой популяционной модели Srivastava, так как особи, как правило, распространяются по поверхности. В диссертации рассмотрен случай одной пространственной переменной, этот случай можно рассматривать как случай центральной пространственной симметрии. Двумерные по пространству задачи очень актуальны и в настоящее время исследования в этом направлении интенсивно проводятся рядом авторов. Однако численные методы для таких задач с эффектом нелинейности в операторе дифференцирования не разработаны и могут послужить предметом дальнейших исследований.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, определенных ВАК и Аттестационным советом УрФУ:

1. Gorbova T.V., Pimenov V.G., Solodushkin S.I. Difference Schemes for the Nonlinear Equations in Partial Derivatives with Heredity // Lecture Notes in Computer Science, 2019, V. 11386, P. 258-265. (0.42 п.л. / 0.14 п.л.) (Scopus)

2. Gorbova T.V., Pimenov V.G., Solodushkin S.I. Numerical solving of partial differential equations with heredity and nonlinearity in the differential operator // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2019, V.16. P. 1587-1599. (0.72 п.л. / 0.24 п.л.) (Scopus)

3. Gorbova T.V., Pimenov V.G., Solodushkin S.I. Crank-Nicolson Numerical Algorithm for Nonlinear Partial Differential Equation with Heredity and Its Program Implementation // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2020, V. 318, P. 33-43. (0.66 п.л. / 0.22 п.л.) (Scopus)

4. Tatiana Gorbova, Vladimir Pimenov, Svyatoslav Solodushkin. Difference Scheme for Partial Differential Equations of Fractional Order with a Nonlinear Differentiation Operator // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2020, V. 333, P. 689-703. (0.96 п.л. / 0.32 п.л.) (Scopus)

5. Tatiana Gorbova, Svyatoslav Solodushkin. Nonlinear difference scheme for fractional equation with functional delay // AIP Conference Proceedings, 2020, V. 2312, 050007. (0.3 п.л. / 0.15 п.л.) (Scopus)

6. Gorbova T.V. Numerical algorithm for fractional order population dynamics model with delay // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2021, V. 57. P. 91-103. (0.78 п.л.) (WoS, Scopus)

Другие публикации

7. Горбова Т.В., Солодушкин С.И. Разностная схема для нелинейных уравнениий в частных производных с запаздыванием // Тезисы Международноий (49-й Всероссиискои) конференции «Современные проблемы математики и её приложений», Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2018. С. 130.

8. Пименов В.Г., Солодушкин С.И., Горбова Т.В. Нелинейные разностные схемы с памятью // Материалы IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики», Нальчик: Эльбрус, 2018. С. 207.

Литература

9. В.Г. Бабский, А.Д. Мышкис. Математические модели в биологии, связанные с учетом последействия // Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М. Мир. 1983. С. 383–394.

10. K.Gopalsamy. Stability and oscillations in delay diffential equations of population dynamics. Kluwer Academic Pub. Dordrecht. 1992.

11. Дж. Хейл. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1984.

12. V.K. Srivastava, S. Kumar, M.K. Awasthi, B. Kumar Singh. Two-dimensional time fractional-order biological population model and its analytical solution. Egypt. J. Basic Appl. Sci., vol. 1, pp. 71–76, 2014.

13. А.В. Ким, В.Г. Пименов. i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2004.

14. A. Bellen and M. Zennaro, Numerical methods for delay differential equations. Oxford university press, 2003.

15. А.А. Самарский. Теория разностных схем. 3-е изд. М.: Наука, 1989.

16. В.Г. Пименов. Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: изд-во Урал. ун-та, 2014.

17. М.Х. Шхануков. О сходимости разностных схем для дифференциальных уравнений с дробной производной // Доклады АН, 1996, т. 348, № 6, с. 746–748.

18. A.A. Alikhanov, A new difference scheme for the time fractional diffusion equation, J. Comput. Phys., vol. 280, pp. 424–438, 2015.

19. A.S. Hendy, V.G. Pimenov, J.E. Macias-Dias. Convergence and stability estimates in difference setting for time-fractional parabolic equations with functional delay, Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 36, no. 1, pp. 118–132, 2020.

20. D. Li, H. Liao, W. Sun, J. Wang and J. Zhang. Analysis of L1-Galerkin FEMs for Time-Fractional Nonlinear Parabolic Problems, Commun. Comput. Phys., vol. 24, no. 1, pp. 86–103, 2018.

21. L. Li, B. Zhou, X. Chen, Z. Wang. Convergence and stability of compact finite difference method for nonlinear time fractional reaction-diffusion equations with delay, Appl. Math. and Comput., vol. 337, pp. 144–152, 2018.

22. M.M. Meerschaert and C. Tadjeran, Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations, Appl. Numer. Math., vol. 56, no. 1, pp. 80-90, 2006.

23. V.G. Pimenov, A.S. Hendy. A fractional analog of Crank-Nicholson method for the two sided space fractional partial equation with functional delay, Ural Mathematical Journal, vol 2, No 1, pp. 48–57, 2016.

24. C.P. Li, F.H. Zeng. Numerical Methods for Fractional Calculus. Boca Raton, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015.