ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 4 2020

УДК 517.977

# АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ АДАМАРА И СВЯЗАННЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

**Р. Р. Акопян**

Исследуется несколько взаимосвязанных экстремальных задач для аналитических функций в конечносвязной области $G$ с жордановой спрямляемой границей $\Gamma$. Получено точное неравенство между значением аналитической функции в области $G$ и весовыми средними ее граничных значений

$$|f(z_0)| \le \mathcal{C}\, \|f\|^{\alpha}_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} \|f\|^{\beta}_{L^p_{\varphi_0}(\gamma_0)}, \quad z_0 \in G, \quad 0 < q, p \le \infty,$$

на двух измеримых подмножествах $\gamma_1$ и $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$ границы области, являющееся аналогом теорем Адамара о трех кругах и братьев Неванлинна о двух константах. Для двусвязной области $G$ и $1 \le q, p \le \infty$ изучается, когда неравенство дает значение модуля непрерывности функционала аналитического продолжения функции в заданную точку области с части границы $\gamma_1$. В этих случаях решены соответствующие задача оптимального восстановления функции в точке области по приближенно заданным граничным значениям на $\gamma_1$ и задача наилучшего приближения функционала линейными ограниченными функционалами. Случай односвязной области $G$ ранее полностью исследован.

Ключевые слова: аналитические функции, оптимальное восстановление функционала, наилучшее приближение неограниченного функционала ограниченными, гармоническая мера.

**R. R. Akopyan. Analog of the Hadamard theorem and related extremal problems on the class of analytic functions.**

We study several related extremal problems for analytic functions in a finitely connected domain $G$ with rectifiable Jordan boundary $\Gamma$. A sharp inequality is established between values of a function analytic in $G$ and weighted means of its boundary values on two measurable subsets $\gamma_1$ and $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$ of the boundary:

$$|f(z_0)| \le \mathcal{C}\, \|f\|^{\alpha}_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} \|f\|^{\beta}_{L^p_{\varphi_0}(\gamma_0)}, \quad z_0 \in G, \quad 0 < q, p \le \infty.$$

The inequality is an analog of Hadamard's three-circle theorem and the Nevanlinna brothers' theorem on two constants. In the case of a doubly connected domain $G$ and $1 \le q, p \le \infty$, we study the cases where the inequality provides the value of the modulus of continuity for a functional of analytic extension of a function from a part of $\gamma_1$ to a given point of the domain. In these cases, the corresponding problems of optimal recovery of a function from its approximate boundary values on $\gamma_1$ and of the best approximation of a functional by linear bounded functionals are solved. The case of a simply connected domain $G$ has been completely investigated previously.

Keywords: analytic functions, optimal recovery of a functional, best approximation of an unbounded functional by bounded functionals, harmonic measure.

**MSC:** 30C85, 65E05, 30H99

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-32-47

## Введение

Целью работы является исследование аналогов утверждений работы [3] в случае многосвязной области. В дальнейшем $G$ — конечносвязная область комплексной плоскости, ограниченная кривой $\Gamma$, которая является жордановой спрямляемой кривой или объединением таких

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00336), Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013) и в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре.

непересекающихся кривых. Пусть $\gamma_1$ — измеримое подмножество $\Gamma$ положительной меры и $\gamma_0$ — дополнение $\gamma_1$ до $\Gamma$, т. е. $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$.

Напомним некоторые известные понятия и факты, которые будут использоваться. Пусть $g(z,\zeta)$ — классическая функция Грина (задачи Дирихле) области $G$ с логарифмической особенностью в точке $z=\zeta$, а $\partial g/\partial n$ — производная функции Грина по внутренней для области $G$ нормали к кривой $\Gamma$. Производную функции Грина по нормали также называют *плотностью гармонической меры относительно области $G$ в точке $z$*; в дальнейшем для нее будем использовать обозначение $P(z,\zeta)$. Соответственно гармоническая мера $w(z,\gamma,G)$ измеримого подмножества $\gamma$ спрямляемой границы $\Gamma$ относительно области $G$ в точке $z$ представима по формуле

$$w(z,\gamma,G) = \int\limits_{\gamma} P(z,\zeta)\,|d\zeta|.$$

Подробнее о гармонической мере см., например, [12, гл. VIII, § 4], а также [35].

Через $N_*(G)$ обозначают класс функций $f$ из класса Неванлинны $N(G)$ — аналитических в $G$ функций ограниченного вида (ограниченной характеристики), для которых гармоническая мажоранта функции $\ln^+|f|$ представима по формуле Грина. Класс $N_*(G)$ называют *классом Смирнова* или *универсальным классом Харди*, класс был введен В.И. Смирновым [22]. Для класса $N_*(G)$ используют несколько эквивалентных определений (см. [26, § 4, 4.2; 27; 29, § 2, 1] и приведенную там библиографию). Функции класса $N(G)$, а следовательно, и класса $N_*(G)$ имеют почти всюду на $\Gamma$ некасательные (угловые) предельные граничные значения. Удобно обозначать функцию и ее граничные значения одинаково. Обозначим через $\varphi_k$ неотрицательные измеримые функции на $\gamma_k$, $k=0,1$. Будем предполагать суммируемость функций $\ln\varphi_k$ с плотностью гармонической меры. Эти функции в дальнейшем называем *весовыми функциями* или *весами*.

Введем класс $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{p,q}(G;\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$, $0<p,q\le\infty$, аналитических в области $G$ функций из $N_*(G)$ таких, что их некасательные предельные граничные значения на $\gamma_k$, $k=0,1$, имеют конечные, соответственно, $L^p$, $L^q$-средние с весом $\varphi_k$, т. е.

$$\|f\|_{L^p_{\varphi_0}(\gamma_0)} = \Bigg(\int\limits_{\gamma_0} |f(\zeta)|^p\varphi_0(\zeta)\,|d\zeta|\Bigg)^{1/p} < +\infty, \quad \|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} = \Bigg(\int\limits_{\gamma_1} |f(\zeta)|^q\varphi_1(\zeta)\,|d\zeta|\Bigg)^{1/q} < +\infty.$$

Если показатель нормы равен бесконечности, то конечна соответствующая $L^\infty$-норма:

$$\|f\|_{L^\infty(\gamma_k)} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(\zeta)| \,:\, \zeta\in\gamma_k\}.$$

Отметим, что класс Харди $H^p(G)$ — класс аналитических в области $G$ функций $f$, обладающих следующих свойством: субгармоническая функция $|f|^p$ имеет в области $G$ гармоническую мажоранту и является частным случаем $\mathcal{H}$. Точнее, критерием принадлежности функции $f$ классу $H^p(G)$ являются условия $f\in N_*(G)$ и суммируемости предельных граничных значений функции $|f|^p$ на $\Gamma$ с плотностью гармонической меры $P(z_0,\zeta)$ ($z_0$ — произвольная фиксированная точка области $G$), т. е. $\int_\Gamma |f(\zeta)|^p\,P(z_0,\zeta)\,|d\zeta| < +\infty$. Это утверждение является аналогом теоремы Полубариновой — Кочиной о характеризации функций пространства Харди $H^p$ в круге (см. [21, § 6, 6.4; 22; 26, § 4, 4.3]). Отсюда в случае $p=q$ и весов $\varphi_k(\zeta) = \eta_k P(z_0,\zeta)$, $\zeta\in\gamma_k$, $\eta_k>0, k=0,1$, класс $\mathcal{H}$ является классом Харди $H^p(G)$.

Функции всех рассматриваемых классов ($N(G)$, $N_*(G)$, $H^p(G)$), включая класс $\mathcal{H}$, обладают свойством суммируемости логарифма модуля их предельных граничных значений по гармонической мере, т. е. $\int_\Gamma |\ln|f(\zeta)||\,P(z_0,\zeta)\,|d\zeta| < +\infty$ [26, § 4, 4.1]. Для классов $N(G)$, $N_*(G)$ и $H^p(G)$ аналитических функций в конечносвязных областях справедливы многие аналоги известных классических теорем для функций, аналитических в односвязной области. Подробную информацию см. в [26; 27; 38] и в приведенной там библиографии.

В первой части статьи получено точное неравенство между значением аналитической функции в точке области $G$ и $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$ и $L^p_{\varphi_0}(\gamma_0)$, $0 < q, p \le \infty$, весовыми средними ее граничных значений на двух измеримых подмножествах границы области. Это неравенство есть аналог (разных метрик) теорем Адамара о трех кругах и братьев Неванлинна о двух константах. В случае двусвязной области $G$ исследуется, когда экстремальные функции являются однозначными и неравенство дает значение модуля непрерывности функционала аналитического продолжения функции в заданную точку области с части границы $\gamma_1$. Для двусвязной области $G$ и $1 \le q, p \le \infty$ в случаях, когда вычислен модуль непрерывности функционала, во второй части статьи решены соответствующие задача оптимального восстановления функции в точке области по приближенно заданным граничным значениям на $\gamma_1$ и задача Стечкина наилучшего приближения функционала линейными ограниченными функционалами. В следствиях 4 и 5 для случая, когда область $G$ является кольцом и множества $\gamma_k$, $k = 0, 1$, совпадают с граничными окружностями, результаты сформулированы в более простой форме. Случай односвязной области $G$ ранее полностью исследован в [3].

## 1. Аналог теоремы Адамара о трех кругах

Рассмотрим следующую экстремальную задачу на классе $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{p,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$. Обозначим через $\Omega$ функцию двух неотрицательных переменных, определяемую соотношением

$$\Omega(\lambda_0, \lambda_1) = \sup\big\{|f(z_0)|\colon f \in \mathcal{H},\ \|f\|_{L^p_{\varphi_0}(\gamma_0)} \le \lambda_0,\ \|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \lambda_1\big\}. \tag{1.1}$$

Определение (1.1) влечет точное неравенство

$$|f(z_0)| \le \Omega\big(\|f\|_{L^p_{\varphi_0}(\gamma_0)}, \|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}\big), \quad f \in \mathcal{H}.$$

Оценки модуля значения в точке аналитической в многосвязной области функции через ее предельные граничные значения исследовали большое количество математиков, в том числе М. Хейнс и Р.М. Робинсон (круговое кольцо), Г. Грунский, Л. Альфорс, С.Я. Хавинсон, З. Нехари, П.Р. Гарабедян, Х. Уидом, Т.С. Кузина (многосвязная область) и др. (см. [28–30;37] и приведенную там библиографию). В отличие от классических постановок, рассмотрим ограничения на (вообще говоря, различные) $L^q_{\varphi_1}, L^p_{\varphi_0}$-средние на произвольных измеримых подмножествах $\gamma_k$, $k = 0, 1$.

Сформулируем здесь лишь два классических результата, относящихся к случаю, когда область $G$ есть кольцо $C_{r,R} = \{z \in \mathbb{C}\colon r < |z| < R\}$, множества $\gamma_k$, $k = 0, 1$, совпадают с граничными окружностями, точнее, $\gamma_k = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = R(r/R)^k\}$, и $q = p = \infty$. Первый из них — хорошо известная теорема Адамара о трех кругах.

**Теорема A.** *Для чисел $r, \rho$ и $R$, связанных неравенством $0 < r < \rho < R$, произвольной ограниченной аналитической в кольце $C_{r,R}$ функции $f$, необязательно однозначной, но без точек ветвления в $C_{r,R}$ и имеющей однозначный модуль, и произвольной точки $z_0$, $|z_0| = \rho$, справедливо неравенство*

$$\ln|f(z_0)| \le \frac{\ln R - \ln\rho}{\ln R - \ln r}\,\ln\|f\|_{L^\infty(\gamma_1)} + \frac{\ln\rho - \ln r}{\ln R - \ln r}\,\ln\|f\|_{L^\infty(\gamma_0)}. \tag{1.2}$$

*Неравенство* (1.2) *обращается в равенство на функциях $cz^d$, $c \in \mathbb{C}$, $d \in \mathbb{R}$, и только на них.*

Неравенство (1.2), в случае $q = p = \infty$, $G = C_{r,R}$, $\gamma_k$ — граничные окружности радиуса $R(r/R)^k$, $k = 0, 1$, дает оценку сверху решения задачи (1.1). А именно, справедливо неравенство

$$\Omega(\lambda_0, \lambda_1) \le \lambda_0^\beta\,\lambda_1^\alpha, \quad \alpha = \frac{\ln R - \ln\rho}{\ln R - \ln r}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{\ln\rho - \ln r}{\ln R - \ln r}.$$

Однако это неравенство обращается в равенство только при $\lambda_1/\lambda_0 = (r/R)^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Результат Р.М. Робинсона (1943) [41] (см. также [12, гл. 11, § 4]) уточняет неравенство (1.2) и дает решение задачи (1.1) при всех значениях параметров $\lambda_0, \lambda_1$. Для его формулировки введем обозначения. При произвольных значениях параметров $0 < \mathfrak{r} < 1$ и $\varrho > 0$ определим однозначную аналитическую в $C_{\mathfrak{r},1}$ функцию формулой

$$\mathfrak{b}[\mathfrak{r},\varrho](z) = z^{\kappa}\,\frac{\Theta\left(z\,\mathfrak{r}^{\kappa}\,\varrho^{-1},\,\mathfrak{r}\right)}{\Theta\left(z\,\mathfrak{r}^{-\kappa}\,\varrho,\,\mathfrak{r}\right)},\quad \Theta(\zeta,\mathfrak{r}) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+\mathfrak{r}^{2k-1}\zeta)(1+\mathfrak{r}^{2k-1}\zeta^{-1}),$$

в которой целый параметр $\kappa$ задается равенством $\kappa = \left\lfloor \dfrac{\ln\varrho}{\ln\mathfrak{r}}\right\rfloor + 1$, таким образом, $\mathfrak{r}^{\kappa} \le \varrho < \mathfrak{r}^{\kappa-1}$. Эта функция отображает кольцо $C_{\mathfrak{r},1}$ на единичный круг с разрезом по дуге окружности с центром в нуле и радиусом $\varrho\mathfrak{r}^{1-\kappa}$, симметричной относительно вещественной оси. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема B.** *В случае $G = C_{r,R}$, $q = p = \infty$ и $\gamma_k$, $k = 0,1$, совпадающих с граничными окружностями, для произвольных $\lambda_0, \lambda_1 > 0$ верхняя грань в задаче* (1.1) *достигается на функциях $\epsilon\lambda_0\mathfrak{b}\Big[\dfrac{r}{R},\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}\Big]\Big(\dfrac{z|z_0|}{z_0R}\Big)$, $|\epsilon| = 1$, и только на них.*

Как и в изучавшемся в [3] случае односвязной области, введем функцию $s_\delta$ равенством $s_\delta(z) = \exp\left(u_\delta(z) + iv_\delta(z)\right)$, $z \in G$, где функция $u_\delta(z) = \displaystyle\int_\Gamma P(z,\zeta)\,\ln\psi_\delta(\zeta)\,|d\zeta|$, $z \in G$, является гармонической в области $G$, $v_\delta$ — функция, гармонически сопряженная к $u_\delta$, функция $\psi_\delta$ определена на границе $\Gamma$ области $G$ формулой

$$\psi_\delta(\zeta) = \begin{cases} \Big(\dfrac{P(z_0,\zeta)}{\beta\varphi_0(\zeta)}\Big)^{1/p}, & \zeta \in \gamma_0,\\ \delta\Big(\dfrac{P(z_0,\zeta)}{\alpha\varphi_1(\zeta)}\Big)^{1/q}, & \zeta \in \gamma_1,\end{cases}$$

в которой величины $\alpha$ и $\beta$, соответственно, равны гармонической мере $\gamma_1$ и $\gamma_0$ относительно области $G$ в точке $z_0$. Здесь и в дальнейшем, если $p$ и/или $q$ равны бесконечности, то считаем, что величины $1/p$ и/или $1/q$, соответственно, равны нулю. В случае односвязной области $G$ функция $v_\delta$ однозначная и единственная с точностью до вещественной аддитивной константы, выбор значения которой нам не важен. В случае, когда $G$ не является односвязной областью, функция $v_\delta$ и как следствие $s_\delta$, вообще говоря, однозначной не является. Однако аналитическая функция $s_\delta$ имеет в области $G$ однозначный модуль, $|s_\delta(z)| = \exp(u_\delta(z))$, $z \in G$.

Также будем использовать введенную в [3] величину $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{p,q}(z_0;\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$, определяемую равенствами

$$\begin{gathered}\mathcal{C} = \varepsilon^{1/q}(\gamma_1,\varphi_1)\,\varepsilon^{1/p}(\gamma_0,\varphi_0)\,\alpha^{-\alpha/q}\beta^{-\beta/p},\\ \varepsilon(\gamma_k,\varphi_k) = \exp\int_{\gamma_k} P(z_0,\zeta)\ln\frac{P(z_0,\zeta)}{\varphi_k(\zeta)}\,|d\zeta|,\quad k = 0,1.\end{gathered} \tag{1.3}$$

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — конечносвязная область; $\gamma_1$ — измеримое подмножество $\Gamma$ и $\gamma_0 = \Gamma\setminus\gamma_1$; $\varphi_k$, $k = 0,1$, — весовые функции и $0 < p,q \le \infty$. Функция $f$, аналитическая в области $G$, без точек ветвления в $G$ и имеющая в $G$ однозначный модуль, который на $\Gamma$ имеет почти всюду некасательные предельные граничные значения, удовлетворяющие условиям*

$$\int_\Gamma |\ln|f(\zeta)||\,P(z,\zeta)\,|d\zeta| < +\infty, \tag{1.4}$$

*для некоторой (и, что то же самое, для произвольной) точки $z \in G$;*

$$\forall z \in G \quad \ln|f(z)| \le \int_\Gamma \ln|f(\zeta)|\,P(z,\zeta)\,|d\zeta|. \tag{1.5}$$

*Тогда справедливо неравенство*

$$|f(z_0)| \le \mathcal{C}\, \|f\|^{\alpha}_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}\, \|f\|^{\beta}_{L^p_{\varphi_0}(\gamma_0)}, \quad z_0 \in G, \tag{1.6}$$

$$\alpha = w(z_0, \gamma_1, G), \quad \beta = 1 - \alpha = w(z_0, \gamma_0, G).$$

*Неравенство* (1.6) *обращается в равенство на функциях вида* $cs_\delta$, $c \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$. *Других экстремальных функций нет.*

Доказательство. Из аналитичности функции $f$ следует, что $\ln|f(z)|$, $z \in G$, является функцией субгармонической. Точнее, является гармонической функцией кроме (исключительных) точек — нулей $f$, в которых стремится к минус бесконечности. Рассмотрим гармоническую в области $G$ функцию, определяемую равенством

$$u(z) = \int\limits_{\Gamma} P(z,\zeta)\, \ln|f(\zeta)|\,|d\zeta| = \sum_{k=0}^{1} \int\limits_{\gamma_k} P(z,\zeta) \ln|f(\zeta)|\,|d\zeta|. \tag{1.7}$$

Из условий теоремы для субгармонической функции $\ln|f(z)|$ справедливо неравенство (1.5), в частности, неравенство

$$\ln|f(z_0)| \le u(z_0). \tag{1.8}$$

В случае $0 < q < \infty$, используя неравенство Йенсена, получим оценку сверху слагаемого в представлении $u(z_0)$ следующим образом:

$$\int\limits_{\gamma_1} P(z_0,\zeta) \ln|f(\zeta)|\,|d\zeta| = \frac{1}{q} \int\limits_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\, \ln \frac{|f(\zeta)|^q\, P(z_0,\zeta)\, \alpha\, \varphi_1(\zeta)}{P(z_0,\zeta)\, \alpha\, \varphi_1(\zeta)}\, |d\zeta|$$

$$= \frac{\alpha}{q} \int\limits_{\gamma_1} \frac{P(z_0,\zeta)}{\alpha}\, \ln \frac{|f(\zeta)|^q\, \alpha\, \varphi_1(\zeta)}{P(z_0,\zeta)}\, |d\zeta| + \frac{1}{q} \int\limits_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\, \ln \frac{P(z_0,\zeta)}{\alpha\, \varphi_1(\zeta)}\, |d\zeta|$$

$$\le \frac{\alpha}{q} \ln \int\limits_{\gamma_1} \frac{P(z_0,\zeta)}{\alpha}\, \frac{|f(\zeta)|^q\, \alpha\, \varphi_1(\zeta)}{P(z_0,\zeta)}\, |d\zeta| + \frac{1}{q} \int\limits_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\, \ln \frac{P(z_0,\zeta)}{\alpha\, \varphi_1(\zeta)}\, |d\zeta| = \ln \mathcal{C}_1 + \ln \|f\|^{\alpha}_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)},$$

$$\ln \mathcal{C}_1 = \int\limits_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\, \ln \Big( \frac{P(z_0,\zeta)}{\alpha\, \varphi_1(\zeta)} \Big)^{1/q} |d\zeta|.$$

Получим аналогичную оценку при $q = \infty$

$$\int\limits_{\gamma_1} P(z_0,\zeta) \ln|f(\zeta)|\,|d\zeta| \le \operatorname{ess\,sup}\{\ln|f(\zeta)| \colon \zeta \in \gamma_1\} \int\limits_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\,|d\zeta| = \ln \|f\|^{\alpha}_{L^\infty(\gamma_1)};$$

в этом случае $\ln \mathcal{C}_1 = 0$. Аналогично получается оценка для $L^p_{\varphi_0}$-средней по множеству $\gamma_0$. Теперь, подставляя полученные оценки слагаемых в соотношения (1.7), (1.8) и потенциируя полученное неравенство, получим (1.6).

Из равенства (1.3) следует, что на функциях вида $cs_\delta$, $c \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, неравенство (1.6) обращается в равенство. Для завершения доказательства теоремы 1 осталось выяснить, что других таких функций нет. Заметим, что неравенство (1.8) является равенством в том и только в том случае, когда $\ln|f(z)| = u(z)$, $z \in G$. А неравенства в оценках слагаемых являются равенствами только в случае, когда функция $|f(\zeta)|(\beta\, \varphi_0(\zeta)/P(z_0,\zeta))^{1/p}$ почти всюду на $\gamma_0$ и функция $|f(\zeta)|(\alpha\, \varphi_1(\zeta)/P(z_0,\zeta))^{1/q}$ почти всюду на $\gamma_1$ являются константами. Теорема доказана. □

**Следствие 1.** *Для произвольной функции* $f$ *класса*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{p,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1), \quad 0 < p, q \le \infty,$$

*справедливо неравенство* (1.6).

Доказательство. Из теоремы 1 имеем, что достаточно показать для функций класса $N_*(G)$ справедливость условий (1.4) и (1.5). Условие (1.4) выполняется для произвольной функции класса $N(G)$, и тем более класса $N_*(G)$ [27, теорема 2.5.1]. Для доказательства выполнения (1.5) воспользуемся мультипликативным (параметрическим) представлением функций класса $N_*(G)$ (теоремой Смирнова [21; 22] для односвязной $G$, обобщением для конечносвязных областей, см. [33; 38]). Для произвольной функции $f \in N_*(G)$ справедливо равенство $f(z) = B(z)F(z)$, $z \in G$, в котором $F$ является однозначной аналитической в $G$ функцией и для которой справедливо равенство

$$\ln|F(z)| = \int\limits_{\Gamma} \ln|F(\zeta)|P(z,\zeta)|d\zeta| + \int\limits_{\Gamma} P(z,\zeta)d\nu, \quad z \in G, \tag{1.9}$$

где $\nu$ — сингулярная мера на $\Gamma$ и $d\nu \le 0$. Функция $B$ — произведение Бляшке, построенное по нулям $\{z_k\}$ функции $f$, однозначная аналитическая функция, для которой существует набор вещественных чисел $c_j$, $j = \overline{1,N}$, такой, что почти всюду на границе справедливы равенства

$$\ln|B(\zeta)| = c_j, \quad \zeta \in \Gamma_j, \quad j = \overline{1,N},$$

а в области — соотношение

$$\ln|B(z)| = \sum_{j=1}^{N} c_j w(z,\Gamma_j,G) - \sum_{k} g(z,z_k), \quad z \in G. \tag{1.10}$$

Из равенств (1.9) и (1.10) следуют оценки

$$\ln|F(z)| \le \int\limits_{\Gamma} \ln|F(\zeta)|P(z,\zeta)|d\zeta|, \quad z \in G, \tag{1.11}$$

$$\ln|B(z)| \le \sum_{j=1}^{N} c_j w(z,\Gamma_j,G) = \int\limits_{\Gamma} \ln|B(\zeta)|P(z,\zeta)|d\zeta|, \quad z \in G. \tag{1.12}$$

Складывая соотношения (1.11) и (1.12), получим условие (1.5). Следствие доказано. □

В случае односвязной области $G$, как обсуждалось выше, функция $s_\delta$ при произвольном $\delta > 0$ является однозначной в области $G$, что означает принадлежность функции $s_\delta$ классу $\mathcal{H}$. Тогда из теоремы 1 получаем утверждение.

**Следствие 2.** *Пусть $G$ — односвязная область, $0 < p,q \le \infty$, $\varphi_k$, $k = 0,1$, — весовые функции. Тогда для величины* (1.1) *справедливо равенство*

$$\Omega(\lambda_0,\lambda_1) = \mathcal{C}\,\lambda_0^{\beta}\,\lambda_1^{\alpha}, \quad \lambda_k \ge 0, \quad k = 0,1.$$

*Верхняя грань в* (1.1) *достигается на функциях вида $\epsilon\lambda_0 s_\delta$, $\delta = \lambda_1/\lambda_0$, $|\epsilon| = 1$.*

Для односвязной области $G$ новым в следствиях 1 и 2 по сравнению с результатом работы [3] являются только случаи $0 < q < 1$ и/или $0 < p < 1$. Для $1 \le q \le \infty$ и $1 \le p \le \infty$ эти утверждения были получены в [3] иным способом, а именно при решении связанных задач оптимального восстановления и наилучшего приближения функционала.

В случае многосвязной области $G$ из теоремы 1 для величины (1.1) следует лишь оценка сверху

$$\Omega(\lambda_0,\lambda_1) \le \mathcal{C}\,\lambda_0^{\beta}\,\lambda_1^{\alpha}, \quad \lambda_k \ge 0, \quad k = 0,1.$$

Ясно, что для пары чисел $\lambda_0$ и $\lambda_1$ неравенство является равенством и дает точное решение задачи (1.1) тогда и только тогда, когда $s_\delta$, $\delta = \lambda_1/\lambda_0$, является в области $G$ однозначной функцией.

Подробно исследуем случай, когда $G$ есть двусвязная область. Будем обозначать $\mathfrak{g}$ функцию, реализующую однолистное конформное отображение двусвязной области $G$ на кольцо $C_{\mathfrak{r},1} = \{z \in \mathbb{C}\colon \mathfrak{r} < |z| < 1\}$, удовлетворяющую условиям: при отображении $\Gamma_1$ переходит в окружность радиуса $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r} < \mathfrak{g}(z_0) < 1$. Функция $\mathfrak{g}$ и число $\mathfrak{r}$, *модуль двусвязной области* $G$, существуют и единственны (см. [12, гл. V, § 1]). Введем обозначения

$$e_\rho = \left\{t \in [0, 2\pi]\colon \rho e^{it} = \mathfrak{g}(\zeta), \zeta \in \gamma_1\right\}, \quad \rho = \mathfrak{r} \text{ или } \rho = 1; \quad \mu = \mu(e_{\mathfrak{r}}) - \mu(e_1),$$

где $\mu(e)$ — мера Лебега измеримого множества $e \in \mathbb{R}$. Пусть $\nu(\delta) = \nu(G, \gamma_0, \varphi_0, \gamma_1, \varphi_1, \delta)$ есть величина, задаваемая равенством

$$\nu(\delta) = \frac{1}{2\pi \ln \mathfrak{r}} \int\limits_0^{2\pi} \ln \frac{\psi_\delta\left(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}e^{it})\right)}{\psi_\delta\left(\mathfrak{g}^{-1}(e^{it})\right)}\, dt = \frac{1}{2\pi \ln \mathfrak{r}} \left(\mu \ln \delta + \int\limits_0^{2\pi} \ln \frac{\psi_1\left(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}e^{it})\right)}{\psi_1\left(\mathfrak{g}^{-1}(e^{it})\right)}\, dt\right). \tag{1.13}$$

**Следствие 3.** *Если $G$ — двусвязная область, то $s_\delta \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда число $\nu(\delta)$, определенное равенством* (1.13), *является целым. В этом случае верхняя грань в* (1.1) *достигается на функциях $\epsilon\lambda_0 s_\delta$, $\delta = \lambda_1/\lambda_0$, $|\epsilon| = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что $s_\delta \in \mathcal{H}$, т. е. $s_\delta$ — однозначная аналитическая функция тогда и только тогда, когда $\nu(\delta) \in \mathbb{Z}$.

Из определения функции $s_\delta$ следует, что функция $u_\delta(\mathfrak{g}^{-1}(\xi))$, $\xi \in C_{\mathfrak{r},1}$, является решением задачи Дирихле в кольце $C_{\mathfrak{r},1}$. Точнее, $u_\delta(\mathfrak{g}^{-1}(\xi))$ есть гармоническая функция с граничными значениями, почти всюду задаваемыми равенствами $u_\delta(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}^k e^{it})) = \ln \psi_\delta\left(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}^k e^{it})\right)$, $k = 0, 1$, $t \in [0, 2\pi]$. Известно (см., например, [11, §3]), что функция $u_\delta(\mathfrak{g}^{-1}(\xi))$, $\xi \in C_{\mathfrak{r},1}$, имеет вид

$$u_\delta(\mathfrak{g}^{-1}(\xi)) = \nu \ln |\xi| + \Re\varphi(\xi), \text{ где } \varphi(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \xi^n, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad c_n \in \mathbb{C},\, n \in \mathbb{Z}.$$

Интегрируя последнее равенство вдоль граничных окружностей, получаем соотношения

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln \psi_\delta\left(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}e^{it})\right)\, dt = \nu \ln \mathfrak{r} + \Re c_0, \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln \psi_\delta\left(\mathfrak{g}^{-1}(e^{it})\right)\, dt = \Re c_0. \tag{1.14}$$

Выражая из равенств (1.14) коэффициент $\nu$, имеем $\nu = \nu(\delta)$, где $\nu(\delta)$ определено в (1.13). Тогда для функции $s_\delta$ справедлива формула

$$s_\delta(z) = \exp\left\{u_\delta(z) + i v_\delta(z)\right\} = \mathfrak{g}(z)^{\nu(\delta)} \exp \varphi\left(\mathfrak{g}(z)\right), \quad z \in G.$$

Отсюда $s_\delta$ является однозначной в том и только том случае, если $\nu(\delta)$ является целым числом. Следствие доказано. □

Следующее утверждение — аналог теоремы Адамара о трех кругах — является частным случаем теоремы 1, точнее, случаем, когда область $G$ является кольцом $C_{r,R}$, для которого $\mathfrak{r} = r/R$, и множества $\gamma_k$, $k = 0, 1$, совпадают с граничными окружностями $\gamma_k = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\mathfrak{r}^k\}$.

**Следствие 4.** *Пусть числа $r, \rho$ и $R$ связаны неравенством $0 < r < \rho < R$. В условиях теоремы 1 для аналитической в кольце $C_{r,R}$ функции $f$ и точки $z_0$, $|z_0| = \rho$, справедливо неравенство*

$$\ln |f(z_0)| \le \ln \mathcal{C} + \frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r} \ln \|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} + \frac{\ln \rho - \ln r}{\ln R - \ln r} \ln \|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)}. \tag{1.15}$$

*Неравенство* (1.15) *обращается в равенство на функциях вида* $cs_\delta$, $c \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, *и только на них. Если параметр* $\delta = \delta_\nu$ *является элементом последовательности, определяемой равенством*

$$\ln \delta_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\psi_1(Re^{it})}{\psi_1(re^{it})}\, dt + \nu \ln \frac{r}{R}, \quad \nu \in \mathbb{Z},$$

*то функция* $s_{\delta_\nu}(z) = s_{\delta_0}(z) z^\nu R^{-\nu}$ *является однозначной и принадлежит классу* $\mathcal{H}$.

Действительно, неравенство (1.15) является аналогом (различных метрик) классического случая теоремы Адамара (1.2); при $q = r = \infty$ величина $\mathcal{C}$ равна единице и, следовательно, первое слагаемое в правой части неравенства (1.15) равно нулю. С другой стороны, из поточечного неравенства (1.15) не следуют хорошо известные обобщения теоремы Адамара для $q$–средних на трех окружностях (см. [20, отд. III, гл. 6, § 3]); связанные с этими неравенствами для $q$–средних, при $q \geq 1$, задачи оптимального восстановления и наилучшего приближения функционала изучались ранее в [1].

В качестве гипотезы приведем утверждение, аналогичное теореме B.

**Предположение 1.** *В случае* $G = C_{r,R}$, $0 < q, p \leq \infty$ *и* $\gamma_k$, $k = 0, 1$, *совпадающих с граничными окружностями, для произвольных* $\lambda_0, \lambda_1 > 0$ *верхняя грань в задаче* (1.1) *достигается на функциях*

$$\epsilon \lambda_0 s_{\delta_0}(z) z^\nu R^{-\nu} \mathfrak{b}\Big[\frac{r}{R}, \varrho\Big]\Big(\frac{z|z_0|}{z_0 R}\Big), \quad \lambda_1 = \lambda_0 \delta_\nu \varrho, \quad \frac{r}{R} < \varrho \leq 1, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad |\epsilon| = 1,$$

*и только на них.*

В общем случае $n$-связной области $G$ и произвольного измеримого множества $\gamma_1$ можно предположить, что экстремальной в (1.1) является сама функция $s_\delta$ в случае ее однозначности или функция, полученная из $s_\delta$ путем устранения многозначности, как это описано в работе [26], когда к функции подключается множитель, являющийся непрерывной в $\overline{G}$ аналитической функцией, модуль граничных значений которой равен единице и которая имеет в $G$ не более чем $n - 1$ нуль.

## 2. Оптимальное восстановление значения функции, аналитической в двусвязной области, и задача Стечкина наилучшего приближения функционала

Обозначим через $Q = Q^{p,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$ класс функций $f \in \mathcal{H}$, которые удовлетворяют неравенству $\|f\|_{L^p_{\varphi_0}(\gamma_0)} \leq 1$. Рассматриваем функционал $\Upsilon^0_{z_0}$, ставящий в соответствие граничным значениям на $\gamma_1$ функции $f$ ее значение в точке $z_0$ области $G$.

### 2.1. Постановка задачи оптимального восстановления

Наш интерес к вычислению величины (1.1) связан с эквивалентностью этой задачи нахождению модуля непрерывности функционала $\Upsilon^0_{z_0}$ на классе $Q$. Функцию переменной $\delta \geq 0$, определяемую равенством

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; \Upsilon^0_{z_0}, Q) = \sup\big\{|f(z_0)| \colon f \in Q,\ \|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} \leq \delta\big\}, \tag{2.1}$$

называют *модулем непрерывности функционала* $\Upsilon^0_{z_0}$ на классе $Q$. Из определений величин (1.1) и (2.1) сразу следуют связывающие их равенства

$$\omega(\delta) = \Omega(1, \delta), \quad \delta \geq 0, \quad \text{и} \quad \Omega(\lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \omega\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\Big), \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_0 > 0. \tag{2.2}$$

Исследуем задачу оптимального восстановления значения аналитической в области $G$ функции в точке $z_0$ (функционала $\Upsilon^0_{z_0}$) по заданным с известной погрешностью $\delta$ по норме $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$ ее граничным значениям на $\gamma_1$ и дополнительной информации принадлежности функции классу $Q$. Более точно, пусть для неизвестной функции $f$ из класса $Q$ задана функция $g \in L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$ такая, что справедливо неравенство $\|f-g\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \delta$. Мы хотим найти способ восстановить по $g$ значение функции $f(z_0)$, $z_0 \in G$, для всех таких пар функций $f$ и $g$. Эта задача является некорректной, она исследовалась М.М. Лаврентьевым в [13, гл. II, § 1, п. 4–5]. Для ее решения были предложены регуляризирующие операторы, которые имеют в качестве ядра функции, названные функциями Карлемана и являющиеся по сути аппроксимациями ядра Коши.

Наша цель — построение наилучшего (оптимального) метода восстановления. В качестве множества методов восстановления, из которых выбирается оптимальный, рассматриваем множество $\mathcal{F}$ всех возможных функционалов на $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$. Как известно (см. [5; 7; 9; 10; 14; 23; 39] и приведенную там библиографию), в задаче оптимального восстановления линейного функционала на выпуклом центрально симметричном классе с помощью множества $\mathcal{F}$ всех возможных функционалов существует наилучший линейный ограниченный функционал, и величина уклонения равна модулю непрерывности восстанавливаемого функционала.

Формальная постановка задачи такова. Для числа $\delta \ge 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{F}$ величина

$$\mathcal{U}(T,\delta) = \sup\left\{|f(z_0) - Tg|\colon f \in Q,\, g \in L^q_{\varphi_1}(\gamma_1),\, \|f-g\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \delta\right\}$$

является погрешностью восстановления значения в точке $z_0$ функций класса $Q$ по их граничным значениям на $\gamma_1$, заданным с ошибкой $\delta$ по норме $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$, методом $T$. Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \inf\left\{\mathcal{U}(T,\delta)\colon T \in \mathcal{F}\right\} \tag{2.3}$$

есть *величина оптимального восстановления* значения в точке $z_0$ (или, что то же самое, оптимального восстановления функционала $\Upsilon^0_{z_0}$) функций класса $Q$ по их $\delta$-приближенным граничным значениям на $\gamma_1$ с помощью методов восстановления $\mathcal{F}$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления — функционала, на котором в (2.3) достигается нижняя грань. Как обсуждалось выше, имеет место связывающее величины (2.1) и (2.3) равенство

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \omega(\delta), \quad \delta \ge 0. \tag{2.4}$$

Задача (2.3) — частный случай, в котором элемент задан с погрешностью, задачи оптимального восстановления операторов на классе элементов банахова пространства по неполной (в частности, неточной) информации об элементах.

Общие результаты по этой тематике и дальнейшие ссылки можно найти в [4–7; 14; 19; 39]. Задачи оптимального восстановления на классах аналитических функций исследовали К.Ю. Осипенко, Ш. Мичелли, Т. Ривлин, С.Д. Фишер, К. Уайлдероттер, Б. Боянов, М.И. Стесин, О.Г. Парфенов, М.П. Овчинцев, и др. (см. монографию [39], статьи [17; 18; 34; 36; 40] и приведенную там библиографию).

## 2.2. Постановка задачи наилучшего приближения функционала

С задачами (2.1) и (2.3) тесно связана задача наилучшего приближения функционала $\Upsilon^0_{z_0}$ линейными ограниченными функционалами.

Точная постановка задачи такова. Пусть $\mathcal{B}(N)$ — множество линейных ограниченных функционалов на $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$, норма которых не превосходит числа $N > 0$. Величина

$$U(T) = \sup\left\{|f(z_0) - Tf|\colon f \in Q\right\}$$

является уклонением функционала $T \in \mathcal{B}(N)$ от функционала $\Upsilon^0_{z_0}$ на классе функций $Q$. Соответственно, величина

$$E(N) = \inf\left\{U(T)\colon T \in \mathcal{B}(N)\right\} \tag{2.5}$$

есть *наилучшее приближение функционала* $\Upsilon^0_{z_0}$ множеством линейных ограниченных функционалов $\mathcal{B}(N)$ на классе $Q$. Задача состоит в том, чтобы вычислить величину $E(N)$ и найти экстремальный функционал, на котором в (2.5) достигается нижняя грань.

Задача (2.5) — частный случай задачи Стечкина приближения неограниченного оператора множеством линейных ограниченных операторов на классе элементов банахового пространства.

Задача появилась в работе С.Б. Стечкина [24] в 1965 г. В статье [25] 1967 г. была дана постановка задачи и получены первые принципиальные результаты. Этой тематике к настоящему времени посвящено большое число исследований С.Б. Стечкина, В.В. Арестова, В.И. Бердышева, А.П. Буслаева, В.Н. Габушина, Л.В. Тайкова, О.А. Тимошина, В.Г. Тимофеева, М.А. Филатовой и др. (см. обзорные работы [6; 7], а также [32; 31; 8], и приведенную в них библиографию). В частности, известна взаимосвязь задачи Стечкина с задачей оптимального восстановления оператора и модулем непрерывности оператора. Эта взаимосвязь будет существенно использоваться в этом исследовании и выражается следующим образом. Введем обозначения

$$\Delta(N) = \sup\left\{\omega(\delta) - N\colon \delta \geq 0\right\}, \quad N > 0;$$

$$\ell(\delta) = \inf\left\{E(N) + N\delta\colon N > 0\right\}, \quad \delta \geq 0.$$

Для задач (2.3) и (2.5) взаимосвязь (см. [6; 7; 10; 15; 16] и приведенную там библиографию) выражается в следующих соотношениях:

$$E(N) = \Delta(N), \quad \omega(\delta) = \ell(\delta). \tag{2.6}$$

### 2.3. Случаи точного решения задач (2.3) и (2.5)

Предполагаем далее, что $\mu \neq 0$. В следующей теореме для случая двусвязной области $G$, когда параметр $\delta$ — элемент последовательности

$$\delta_0 = \exp\left\{\frac{1}{\mu}\int\limits_0^{2\pi} \ln\frac{\psi_1(\mathfrak{g}^{-1}(e^{it}))}{\psi_1(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}e^{it}))}\,dt\right\}, \quad \delta_\nu = \delta_0\,\mathfrak{r}^{2\pi\nu/\mu}, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \tag{2.7}$$

т.е. если $s_\delta \in \mathcal{H}$, выписано решение задачи (2.3). Также решение задачи (2.5) получено в случае, когда параметр $N$ является элементом последовательности

$$N_\nu = \alpha\,\mathcal{C}\,\delta_\nu^{-\beta}, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Выражая из равенства (2.8) параметр $\delta_\nu$ через $N_\nu$, получим соотношение

$$\delta_\nu = \alpha^{1/\beta}\,\mathcal{C}^{1/\beta}\,N_\nu^{-1/\beta}, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \tag{2.9}$$

Пусть $\delta_\nu$ — элемент последовательности (2.7). Тогда функция $s_{\delta_\nu}$ является однозначной аналитической в области $G$. В этом случае формула

$$T_{\delta_\nu} g = \int\limits_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\frac{s_{\delta_\nu}(z_0)}{s_{\delta_\nu}(\zeta)}\,g(\zeta)\,|d\zeta|, \quad g \in L^q_{\varphi_1}(\gamma_1).$$

определяет линейный ограниченный функционал $T_{\delta_\nu}$ на пространстве $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — двусвязная область, $1 \leq q, p \leq \infty$, и $\varphi_k$, $k = 0, 1$, — весовые функции; $\alpha = w(z_0, \gamma_1, G)$ и $\beta = 1 - \alpha = w(z_0, \gamma_0, G)$ — гармонические меры, соответственно, $\gamma_1$ и $\gamma_0$ относительно области $G$ в точке $z_0$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Для произвольного элемента* $\delta_\nu$ *последовательности* (2.7) *для величин* (2.1) *и* (2.3) *имеют место равенства*

$$\omega(\delta_\nu) = \mathcal{E}_\mathcal{F}(\delta_\nu) = \mathcal{C}\,\delta_\nu^\alpha.$$

*При этом экстремальными в* (2.1) *являются функции вида* $\epsilon s_{\delta_\nu}$, $|\epsilon| = 1$; *в задаче* (2.3) *оптимальным методом восстановления является функционал* $T_{\delta_\nu}$.

2) *Для произвольного элемента* $N_\nu$ *последовательности* (2.8) *для величины* (2.5) *справедливо равенство*

$$E(N_\nu) = \beta\,\mathcal{C}^{1/\beta}\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N_\nu^{-\alpha/\beta}.$$

*При этом в задаче* (2.5) *функционалом наилучшего приближения является функционал* $T_{\delta_\nu}$.

Доказательство. При $\delta = \delta_\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$, функция $s_{\delta_\nu}$ является однозначной аналитической из класса $\mathcal{H}$, более того, принадлежит классу $Q$. При этом справедливы равенства $\|s_{\delta_\nu}\|_{L^q(\gamma_1)} = \delta_\nu$ и $|s_{\delta_\nu}(z_0)| = \mathcal{C}\,\delta_\nu^\alpha$. Отсюда, используя следствие 3, равенства (2.2) и (2.4), имеем цепочку соотношений

$$\mathcal{E}_\mathcal{F}(\delta_\nu) = \omega(\delta_\nu) = |s_{\delta_\nu}(z_0)| = \mathcal{C}\,\delta_\nu^\alpha.$$

Для величины $E(N_\nu)$, применяя определение $\Delta(N_\nu)$, равенства (2.6) и (2.9), получим оценку снизу

$$E(N_\nu) = \Delta(N_\nu) = \sup\{\omega(\delta) - N_\nu\delta \,:\, \delta \ge 0\} \ge \mathcal{C}\,\delta_\nu^\alpha - N_\nu\delta_\nu = \beta\,\mathcal{C}^{1/\beta}\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N_\nu^{-\alpha/\beta}.$$

Вычисляя аналогично [3, лемма 4] норму и уклонения для оператора $T_{\delta_\nu}$, получаем равенства

$$\|T_{\delta_\nu}\| = N_\nu, \quad U(T_{\delta_\nu}) = \beta\,\mathcal{C}^{1/\beta}\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N_\nu^{-\alpha/\beta}, \quad \mathcal{U}(T_{\delta_\nu}) = \mathcal{C}\,\delta_\nu^\alpha.$$

Наконец, соотношения

$$\mathcal{E}_\mathcal{F}(\delta_\nu) \le \mathcal{U}(T_{\delta_\nu}) \quad \text{и} \quad \Delta(N_\nu) = E(N_\nu) \le U(T_{\delta_\nu})$$

завершают доказательство теоремы 2. □

При $p = q = \infty$ утверждение теоремы содержит результаты работы автора [2].

Вернемся к случаю, когда область $G$ является кольцом $C_{r,R}$ (случаю следствия 4). Из теоремы 2 получаем утверждение.

**Следствие 5.** *Пусть область* $G$ *является кольцом* $C_{r,R}$ *и множества* $\gamma_k$, $k = 0, 1$, *совпадают с граничными окружностями*

$$\gamma_k = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = R(r/R)^k\}, \quad 1 \le q, p \le \infty, \quad \varphi_k,\ k = 0, 1, \quad \text{— весовые функции,}$$

$$\alpha = \frac{\ln R - \ln\rho}{\ln R - \ln r}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{\ln\rho - \ln r}{\ln R - \ln r}.$$

*Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Для произвольного элемента* $\delta_\nu$ *последовательности*

$$\delta_0 = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\frac{\psi_1(re^{it})}{\psi_1(Re^{it})}\,dt\right\}, \quad \delta_\nu = \delta_0\left(\frac{r}{R}\right)^\nu, \quad \nu \in \mathbb{Z},$$

*для величин* (2.1) *и* (2.3) *имеют место равенства*

$$\omega(\delta_\nu) = \mathcal{E}_\mathcal{F}(\delta_\nu) = \mathcal{C}\,\delta_0^\alpha\left(\frac{\rho}{R}\right)^\nu.$$

*При этом экстремальными в* (2.1) *являются функции вида* $\epsilon s_{\delta_\nu}$, $|\epsilon| = 1$; *в задаче* (2.3) *оптимальным методом восстановления является функционал* $T_{\delta_\nu}$.

2) *Для произвольного элемента* $N_\nu$ *последовательности*

$$N_\nu = \alpha\mathcal{C}\delta_0^{-\beta}\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu, \quad \nu \in \mathbb{Z},$$

*для величины* (2.5) *справедливо равенство*

$$E(N_\nu) = \beta\,\mathcal{C}\,\delta_0^\alpha\,\left(\frac{\rho}{R}\right)^\nu.$$

*При этом в задаче* (2.5) *функционалом наилучшего приближения является функционал* $T_{\delta_\nu}$.

*Экстремальные функция и функционал имеют вид*

$$s_{\delta_\nu}(z) = \frac{z^\nu}{R^\nu}\,s_{\delta_0}(z); \quad T_{\delta_\nu}g = \frac{z_0^\nu s_{\delta_0}(z_0)}{r^{\nu-1}}\int\limits_0^{2\pi} P(z_0, re^{it})\frac{g(re^{it})}{s_{\delta_0}(re^{it})}\,e^{-i\nu t}\,dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о Утверждение непосредственно следует из теоремы 2 при подстановке явных значений гармонических мер и вида функции $s_{\delta_\nu}$ в рассматриваемом случае. □

В следствии 5 при $q = p = \infty$, т. е. для класса функций, аналитических и ограниченных в кольце $C_{r,R}$, функция $s_{\delta_0}$ тождественно равна единице, и, следовательно, $s_{\delta_\nu}(z) = (z/R)^\nu$, $\delta_\nu = (r/R)^\nu$. Кроме того, действие функционала $T_{\delta_\nu}$ может быть записано в терминах ряда Лорана функции (см. [1]).

В завершение обсудим случай, когда число $\mu$ равно нулю. Как это следует из определения (1.13), при $\mu = 0$ величина $\nu(\delta)$ не зависит от $\delta$, и справедливо тождество

$$\nu(\delta) \equiv \frac{1}{2\pi\ln\mathfrak{r}}\int\limits_0^{2\pi}\ln\frac{\psi_1\left(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}e^{it})\right)}{\psi_1\left(\mathfrak{g}^{-1}(e^{it})\right)}\,dt.$$

Если эта величина целая, то при любых $\delta \ge 0$ функция $s_\delta$ однозначная и справедливы утверждения теоремы 2. Если величина не является целой, то при любых $\delta > 0$ функция $s_\delta$ не принадлежит классу $\mathcal{H}$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акопян Р.Р.** Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в кольце функций // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 3–13.
2. **Акопян Р.Р.** Оптимальное восстановление аналитической функции в двусвязной области по ее приближенно заданным граничным значениям // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 14–19.
3. **Акопян Р.Р.** Аналог теоремы о двух константах и оптимальное восстановление аналитических функций // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 10. С. 3–36. doi: 10.4213/sm8952 .
4. **Арестов В.В.** О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 231–244.
5. **Арестов В.В.** Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. МИАН: сб. тр. Всесоюзной школы по теории функций (Душанбе, август 1986 г.). Т. 189. С. 3–20.
6. **Арестов В.В., Габушин В.Н.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 42–68.
7. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6(312). С. 89–124.
8. **Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А.** Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наук. думка, 2003. 591 с.
9. **Бахвалов Н.С.** Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 4. С. 1014–1016.

10. **Габушин В.Н.** Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Мат. заметки. 1970. Т. 8, вып. 5. С. 551–562.
11. **Голузин Г.М.** Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Laplace'а и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функциональных уравнений) // Мат. сб. 1934. Т. 41, № 2. С. 246–276.
12. **Голузин Г.М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. М.: Наука, 1966. 628 с.
13. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
14. **Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.** Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки, 1991. Т. 50, № 6. С. 85–93.
15. **Марчук А.Г., Осипенко К.Ю.** Наилучшее приближение функций, заданных в конечном числе точек // Мат. заметки. 1975. Т. 17, № 3. С. 359–368.
16. **Марчук А.Г.** Оптимальные по точности методы решения линейных задач восстановления: препринт / ВЦ СО АН СССР Новосибирск, 1976. 29 с.
17. **Осипенко К.Ю.** Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди — Соболева // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 2. С. 67–86.
18. **Осипенко К.Ю.** Неравенство Харди — Литтлвуда — Полиа для аналитических функций из пространств Харди — Соболева // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 3. С. 15–34.
19. **Осипенко К.Ю.** Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках // Мат. сб. 2014. Т. 205, № 10. С. 77–106.
20. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. М.: Наука, 1978. Т. 1. 398 с.
21. **Привалов И.И.** Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 336 с.
22. **Смирнов В.И.** Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problemes qui s'y rattachent // Изв. АН. Сер. математическая. No. 3. 1932. С. 337–372.
23. **Смоляк С.А.** Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Моск. гос. ун-т. М., 1965. 152 с.
24. **Стечкин С.Б.** Неравенства между нормами производных произвольной функции // Acta Sci. Math. 1965. Т. 26. № 3-4. С. 225–230.
25. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 137–148.
26. **Тумаркин Г.Ц., Хавинсон С.Я.** О существовании в многосвязных областях однозначных аналитических функций с заданным модулем граничных значений // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1958. Т. 22, вып. 4. С. 543–562.
27. **Тумаркин Г.Ц., Хавинсон С.Я.** Классы аналитических функций в многосвязных областях // Исследование по современным проблемам теории функций комплексного переменного: сб. тр. М.: Физматгиз, 1960. С. 45–77.
28. **Тумаркин Г.Ц., Хавинсон С.Я.** Качественные свойства решений экстремальных задач некоторых типов // Исследование по современным проблемам теории функций комплексного переменного: сб. тр. М.: Физматгиз, 1960. С. 77–95.
29. **Хавинсон С.Я.** Аналитические функции ограниченного вида (граничные и экстремальные свойства) // Итоги науки. Мат. анализ. 1963. ВИНИТИ, М. 1965. С. 5–80.
30. **Хавинсон С.Я.** О представлении экстремальных функций в классах $E_q$ через функции Грина и Неймана // Мат. заметки. 1974. Т. 16, № 5. С. 707–716.
31. **Arestov V.V.** Best approximation of a differentiation operator on the set of smooth functions with exactly or approximately given Fourier transform // Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019) / eds. M. Khachay, Y. Kochetov, P. Pardalos. Cham: Springer, 2019. P. 434–448. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11548). doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_30.
32. **Arestov V., Filatova M.** Best approximation of the differentiation operator in the space $L_2$ on the semiaxis // J. Approx. Theory. 2014. Vol. 187, no. 1. P. 65–81. doi: 10.1016/j.jat.2014.08.001.
33. **Coifman R., Weiss G.** A kernel associated with certain multiply-connected domains and its applications to factorization theorems // Studia Math. Vol. 28. 1966. P. 31–68.
34. **Gonzalez-Vera P., Stessin M.I.** Joint spectra of Toeplitz operators and optimal recovery of analytic functions // Constr. Approx. 2012. Vol. 36, no. 1. P. 53–82. doi: 10.1007/s00365-012-9169-8.
35. **Garnett J.B., Marshall D.E.** Harmonic measure. N Y: Cambridge University Press, 2005. 571 p.

36. **DeGraw A.** Optimal recovery of holomorphic functions from inaccurate information about radial integration // Amer. J. Comput. Math. 2012. Vol. 2, no. 4. P. 258–268. doi: 10.4236/ajcm.2012.24035 .
37. **Khavinson S. Ya., Kuzina T.S.** The structural formulae for extremal functions in Hardy classes on finite Riemann surfaces // Operator Theory: Advances and Applications. 2005. Vol. 158. P. 37—57. doi: 10.1007/3-7643-7340-7_4 .
38. **Khavinson D.** Factorization theorems for different classes of analytic functions in multiply connected domains // Pacific J. Math. 1983. Vol. 108, no. 2. P. 295–318.
39. **Osipenko K.Yu.** Optimal recovery of analytic functions. Huntington: NOVA Science Publ. Inc., 2000 229 p.
40. **Osipenko K.Y., Stessin M.I.** Hadamard and Schwarz type theorems and optimal recovery in spaces of analytic functions // Constr. Approx. 2010. Vol. 31. P. 37–67. doi: 10.1007/s00365-009-9043-5 .
41. **Robinson R.M.** Analytic functions in circular rings // Duke Math. J. 1943. Vol. 10, no. 2. P. 341—354.

Поступила 13.07.2020
После доработки 5.10.2020
Принята к публикации 26.10.2020

Акопян Роман Размикович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет;
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: RRAkopyan@mephi.ru

## REFERENCES

1. Akopyan R.R. Best approximation for the analytic continuation operator on the class of analytic functions in a ring. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 3–13 (in Russian).
2. Akopyan R.R. Optimal recovery of an analytic function in a doubly connected domain from its approximately given boundary values. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 296, no. 1, pp. 13–18. doi: 10.1134/S008154381702002X .
3. Akopyan R. R. An analogue of the two-constants theorem and optimal recovery of analytic functions. *Sb. Math.*, 2019, vol. 210, no. 10, pp. 1348–1360. doi: 10.1070/SM8952 .
4. Arestov V.V. Uniform regularization of the problem of calculating the values of an operator. *Math. Notes*, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 618–626. doi: 10.1007/BF01780971 .
5. Arestov V.V. Optimal recovery of operators and related problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, no. 4, pp. 1–20.
6. Arestov V.V., Gabushin V.N. Best approximation of unbounded operators by bounded ones. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1995, vol. 39, no. 11, pp. 38–63.
7. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russian Math. Surveys*, 1996, vol. 51, no. 6, pp. 1093–1126. doi: 10.1070/RM1996v051n06ABEH003001 .
8. Babenko V.F., Korneichuk N.P., Kofanov V.A. and Pichugov S.A. *Neravenstva dlya proizvodnykh i ikh prilozheniya* [Inequalities for derivatives and their applications]. Kiev: Naukova dumka, 2003, 590 p. ISBN: 966-00-0074-4 .
9. Bakhvalov N.S. On the optimality of linear methods for operator approximation in convex classes of functions. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1971, vol. 11, no. 4, pp. 244–249. doi: 10.1016/0041-5553(71)90017-6 .
10. Gabushin V.N. Best approximations of functionals on certain sets. *Math. Notes*, 1970, vol. 8, no. 5, pp. 780–785. doi: 10.1007/BF01146932 .
11. Golusin G.M. Auflösung einiger ebenen Grundaufaben der mathematischen Physik im Fall der Laplaceschen Gleichung und mehrfachzusammenhängender Gebiete, die durch Kreise begrenzt sind, *Mat. Sb.*, 1934, Vol. 41, no. 2. P. 246–276 (in Russian).
12. Goluzin G.M. *Geometric theory of functions of a complex variable.* Ser. Transl. Math. Monogr., vol. 26, Providence, R.I.: American Math. Soc., 1969, 676 p. ISBN: 978-0-8218-1576-2 . Original Russian text published in Goluzin G.M. *Geometricheskaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo: uchebnoe posobie.* Moscow; Leningrad: Nauka GITTL Publ., 1952, 628 p.

13. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis*, Transl. Math. Monogr., vol. 64, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1986, 290 p.
14. Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu. Optimal recovery of functionals based on inaccurate data. *Math. Notes*, 1991, vol. 50, no. 6, pp. 1274–1279. doi: 10.1007/BF01158269 .
15. Marchuk A.G., Osipenko K.Yu. Best approximation of functions specified with an error at a finite number of points. *Math. Notes*, 1975, vol. 17, no. 3, pp. 207–212. doi: 10.1007/BF01149008 .
16. Marchuk A.G. *Methods optimal in accuracy for the solution of linear recovery problems*, preprint no. 10. Novosibirsk: Computing Centre of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, 1976, 29 p. (in Russian).
17. Osipenko K.Yu. On optimal recovery methods in Hardy–Sobolev spaces. *Sb. Math.*, 2001, vol. 192, no. 2, pp. 225–244. doi: 10.1070/SM2001v192n02ABEH000543 .
18. Osipenko K.Yu. The Hardy–Littlewood–Polya inequality for analytic functions in Hardy–Sobolev spaces. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 3, pp. 315–334. doi: 10.1070/SM2006v197n03ABEH003760 .
19. Osipenko K.Yu. Optimal recovery of linear operators in non-Euclidean metrics. *Sb. Math.*, 2014, vol. 205, no. 10, pp. 1442–1472. doi: 10.1070/SM2014v205n10ABEH004425 .
20. Pólya G., Szegő G. *Problems and theorems in analysis. Vol. 1.* Berlin: Springer, 1972, 392 p. doi: 10.1007/978-1-4757-1640-5 . Translated to Russian under the title *Zadachi i teoremy iz analiza. T. 1.* Moscow: Nauka Publ., 1978, 398 p.
21. Privalov I.I. *Granichnye svoistva analiticheskikh funktsii* [Boundary properties of analytic functions], 2nd ed. Moscow; Leningrad: GITTL, 1950, 336 p.
22. Smirnov V. Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent. *Izv. Akad. Nauk SSSR, VII Ser. Otdel. Mat. Estestv. Nauk*, 1932, no. 3, pp. 337–372.
23. Smolyak S.A. *Ob optimal'nom vosstanovlenii funktsii i funktsionalov ot nikh* (Optimal recovery of functions and functionals from them). Candidate Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Moscow: Moscow State University Publ., 1965. 152 p.
24. Stechkin S.B. Inequalities between norms of derivatives of arbitrary functions. *Acta Sci. Math.*, 1965, vol. 26, no. 3-4, pp. 225–230 (in Russian).
25. Stechkin S.B. Best approximation of linear operators. *Math. Notes*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 91–99. doi: 10.1007/BF01268056 .
26. Tumarkin G.Ts., Havinson S.Ya. Existence in multiply-connected regions of single-valued analytic functions with a given modulus of boundary values. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1958, vol. 22, no. 4, pp. 543–562 (in Russian).
27. Tumarkin G.Ts., Khavinson S.Ya. Classes of analytic functions in multiply connected domains. In: *Issled. Sovrem. Probl. Teor. Funkcij Kompleks. Peremen*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1960, pp. 45–77 (in Russian).
28. Tumarkin G.Ts., Khavinson S.Ya. Qualitative properties of solving extreme problems of certain types. In: *Issled. Sovrem. Probl. Teor. Funkcij Kompleks. Peremen.* Moscow: Fizmatgiz Publ., 1960, pp. 77–95 (in Russian).
29. Khavinson S.Ya. *Analytic functions of bounded type. Itogi Nauki. Mat. Anal.*, 1963, VINITI, Moscow, 1965, pp. 5–80 (in Russian).
30. Khavinson S.Ya. *Representation of extremal functions in the classes $E_q$ in terms of Green's and Neumann's functions. Math. Notes*, 1974, vol. 16, no. 5, pp. 1018–1023. doi: 10.1007/BF01149790 .
31. Arestov V.V. Best approximation of a differentiation operator on the set of smooth functions with exactly or approximately given Fourier transform // Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019), Ser. Lecture Notes in Computer Science, vol. 11548, eds. M. Khachay, Y. Kochetov, P. Pardalos, Cham: Springer, 2019, pp. 434–448. doi 10.1007/978-3-030-22629-9_30 .
32. Arestov V., Filatova M. Best approximation of the differentiation operator in the space $L_2$ on the semiaxis. *J. Approx. Theory*, 2014, vol. 187, no. 1, pp. 65–81. doi: 10.1016/j.jat.2014.08.001 .
33. Coifman R., Weiss G. A kernel associated with certain multiply-connected domains and its applications to factorization theorems. *Studia Math.*, 1966, vol. 28, pp. 31–68. doi: 10.4064/sm-28-1-31-68 .
34. Gonzalez-Vera P., Stessin M.I. Joint spectra of Toeplitz operators and optimal recovery of analytic functions. *Constr. Approx.*, 2012, vol. 36, no. 1, pp. 53–82. doi: 10.1007/s00365-012-9169-8 .
35. Garnett J.B., Marshall D. E. Harmonic measure. N Y: Cambridge University Press, 2005. 571 p.
36. DeGraw A. Optimal recovery of holomorphic functions from inaccurate information about radial integration. *Amer. J. Comput. Math.*, 2012, vol. 2, no. 4, pp. 258–268. doi: 10.4236/ajcm.2012.24035 .

37. Khavinson S.Ya., Kuzina T.S. The Structural formulae for extremal functions in Hardy classes on finite Riemann surfaces. *Operator Theory: Advances and Applications*, 2005, vol. 158, pp. 37–57. doi: 10.1007/3-7643-7340-7_4 .
38. Khavinson D. Factorization theorems for different classes of analytic functions in multiply connected domains. *Pacific J. Math.*, 1983, vol. 108, no. 2, pp. 295–318. doi: 10.2140/pjm.1983.108.295 .
39. Osipenko K.Yu. *Optimal recovery of analytic functions.* Huntington: NOVA Science Publ. Inc., 2000, 229 p. ISBN: 1-56072-821-3 .
40. Osipenko K.Y., Stessin M.I. Hadamard and Schwarz type theorems and optimal recovery in spaces of analytic functions. *Constr. Approx.*, 2010, vol. 31, pp. 37–67. doi: 10.1007/s00365-009-9043-5 .
41. Robinson R.M. Analytic functions in circular rings. *Duke Math. J.*, 1943, vol. 10, no. 2, pp. 341–354. doi: 10.1215/S0012-7094-43-01031-2 .

Received July 13, 2020
Revised October 5, 2020
Accepted October 26, 2020

**Funding Agency**: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00336) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University), and as part of research conducted in the Ural Mathematical Center.

*Roman Razmikovich Akopyan,* Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: RRAkopyan@mephi.ru .

Cite this article as: R. R. Akopyan. Analog of the Hadamard theorem and related extremal problems on the class of analytic functions, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 32–47 .