ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 4 2020

УДК 517.952

МИНИМАКСНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ С КОИНВАРИАНТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА[1]

М. И. Гомоюнов

Рассмотрена задача Коши для однородного уравнения Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными дробного порядка, возникающая в задачах динамической оптимизации систем, описываемых дифференциальными уравнениями с дробными производными Капуто. Дано определение обобщенного решения задачи в минимаксном смысле. Доказано, что такое решение существует, единственно, непрерывно зависит от параметров задачи и согласуется с классическим решением. Получен инфинитезимальный критерий минимаксного решения в виде пары дифференциальных неравенств для подходящих производных по направлениям. Приведен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: уравнения Гамильтона — Якоби, обобщенные решения, коинвариантные производные, дробные производные.

M. I. Gomoyunov. Minimax solutions of homogeneous Hamilton–Jacobi equations with fractional-order coinvariant derivatives.

The Cauchy problem is considered for a homogeneous Hamilton–Jacobi equation with fractional-order coinvariant derivatives, which arises in problems of dynamical optimization of systems described by differential equations with Caputo fractional derivatives. A generalized solution of the problem in the minimax sense is defined. It is proved that such a solution exists, is unique, depends continuously on the parameters of the problem, and is consistent with the classical solution. An infinitesimal criterion of the minimax solution is obtained in the form of a pair of differential inequalities for suitable directional derivatives. An illustrative example is given.

Keywords: Hamilton–Jacobi equations, generalized solutions, coinvariant derivatives, fractional-order derivatives.

MSC: 35F21, 34A08, 26A33

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-106-125

Введение

Статья находится в русле работ, где исследуются обобщенные в минимаксном смысле решения уравнений Гамильтона — Якоби с частными производными первого порядка [1; 2] и с коинвариантными (ci-) производными [3] (см. также, например, [4; 5]). Такие уравнения играют важную роль, в частности, для построения решений задач динамической оптимизации обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных систем соответственно.

Рассматривается задача Коши для однородного уравнения Гамильтона — Якоби с ci-производными дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$, возникающая [6; 7] при анализе свойств функционала цены в задачах оптимального управления и дифференциальных играх для динамических систем, движение которых описывается дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто порядка α (см., например, [8–10]). А именно, в [6; 7] показано, что в тех случаях, когда функционал цены удовлетворяет определенным условиям ci-гладкости порядка α, он является решением рассматриваемой задачи Коши в классическом смысле. Однако, как правило, функционал цены не обладает требуемыми свойствами гладкости, что приводит к необходимости введения понятия решения этой задачи в обобщенном смысле.

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 19-71-00073).

Следуя [1] (см. также [3] и [5]), мы даем определение минимаксного решения рассматриваемой задачи Коши. При этом используется пара нелокальных свойств стабильности этого решения относительно специальным образом построенных дифференциальных включений с дробными производными Капуто порядка α. Доказывается, что при достаточно общих предположениях минимаксное решение существует, единственно и непрерывно меняется с изменением порядка дифференцирования α, гамильтониана и краевого функционала. Далее, по аналогии с [3] (см. также [11]) определяющие свойства стабильности выражаются в инфинитезимальной форме в виде дифференциальных неравенств для подходящим образом введенных производных порядка α по многозначным направлениям. Отметим, что при анализе конкретных функционалов такие неравенства зачастую более удобны для проверки. Кроме того, полученный критерий позволяет установить согласованность минимаксного и классического решений изучаемой задачи Коши, а также показать, что минимаксное решение удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби в каждой точке, в которой оно ci-дифференцируемо порядка α.

Доказательства основных результатов статьи проводятся в целом по схемам обоснования аналогичных утверждений для уравнений Гамильтона — Якоби с частными производными первого порядка и с ci-производными (первого порядка), но с учетом изменений, вызванных в первую очередь спецификой операций дробного интегро-дифференцирования. При этом используются установленные в [12] свойства множеств решений дифференциальных включений с дробными производными Капуто порядка α.

Статья устроена следующим образом. В разд. 1 вводятся основные обозначения, формулируется ряд свойств интегралов Римана — Лиувилля и производных Капуто, определяются некоторые специальные функциональные пространства. Дифференциальные включения с дробными производными Капуто рассматриваются в разд. 2. В разд. 3 приводится определение ci-производных порядка α, обсуждаются примеры. Изучаемая в статье задача Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с ci-производными порядка α формулируется в разд. 4. Минимаксное решение этой задачи определяется в разд. 5. Доказательству корректности минимаксного решения посвящен разд. 6. В разд. 7 дается инфинитезимальный критерий минимаксного решения, устанавливается согласованность минимаксного и классического решений. В заключение статьи в разд. 8 рассматривается иллюстрирующий пример.

1. Обозначения и предварительные построения

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и $T > 0$. Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство n-мерных векторов со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\| \cdot \|$. Для $t \in [0, T]$ через $\mathrm{C}([0, t], \mathbb{R}^n)$ обозначим банахово пространство непрерывных функций $x : [0, t] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x(\cdot)\|_{[0,t]} = \max_{t \in [0,t]} \|x(\tau)\|$. Рассмотрим линейное пространство $\mathrm{L}^\infty([0, t], \mathbb{R}^n)$ измеримых (по Лебегу) и существенно ограниченных функций $f : [0, t] \to \mathbb{R}^n$.

Пусть $\alpha \in (0, 1]$ и $t \in [0, T]$. Для функции $f : [0, t] \to \mathbb{R}^n$ левосторонним дробным интегралом Римана — Лиувилля порядка α на отрезке $[0, t]$ называется следующая величина (см., например, [8, определение 2.1]):

$$(I^\alpha f)(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\tau \frac{f(\xi)}{(\tau - \xi)^{1-\alpha}} \,\mathrm{d}\xi, \quad \tau \in [0, t].$$

Здесь и далее Γ — гамма-функция (см., например, [13, App. A.1]). Согласно, например, [8, следствие 2 из теоремы 3.1] для любой функции $f(\cdot) \in \mathrm{L}^\infty([0, t], \mathbb{R}^n)$ величина $(I^\alpha f)(\tau)$ определена при всех $\tau \in [0, t]$, и выполняется включение $(I^\alpha f)(\cdot) \in \mathrm{C}([0, t], \mathbb{R}^n)$.

Следуя, например, [8, определение 2.3], рассмотрим множество $\mathrm{AC}^\alpha([0, t], \mathbb{R}^n)$, состоящее из функций $x : [0, t] \to \mathbb{R}^n$, каждая из которых представима в виде

$$x(\tau) = x(0) + (I^\alpha f)(\tau), \quad \tau \in [0, t], \tag{1.1}$$

для некоторой своей функции $f(\cdot) \in \mathrm{L}^\infty([0,t],\mathbb{R}^n)$. Множество $\mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)$ является линейным пространством, и справедливо включение $\mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{C}([0,t],\mathbb{R}^n)$.

Следующий критерий доказывается по аналогии с [8, теорема 2.3].

Утверждение 1. *Пусть $\alpha \in (0,1)$ и $t \in [0,T]$. Функция $x : [0,t] \to \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству $\mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)$ в том и только том случае, когда $x(\cdot) \in \mathrm{C}([0,t],\mathbb{R}^n)$, и функция $z(\tau) = \big(I^{1-\alpha}(x(\cdot) - x(0))\big)(\tau)$, $\tau \in [0,t]$, является липшицевой.*

Из этого утверждения и [8, теорема 3.3] (см. также, например, [10, Theorem 2.5]) вытекает, что множество $\mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)$ содержит все липшицевы функции $x : [0,t] \to \mathbb{R}^n$. Следовательно, множество $\mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)$ плотно в $\mathrm{C}([0,t],\mathbb{R}^n)$.

Отметим, что для любых α, $\alpha' \in (0,1]$ при $\alpha' > \alpha$ справедливо включение

$$\mathrm{AC}^{\alpha'}([0,t],\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n). \tag{1.2}$$

Действительно, взяв $x(\cdot) \in \mathrm{AC}^{\alpha'}([0,t],\mathbb{R}^n)$, в согласии с равенством (1.1) и полугрупповым свойством интегралов дробного порядка (см., например, [8, теорема 2.5]) для некоторой функции $f(\cdot) \in \mathrm{L}^\infty([0,t],\mathbb{R}^n)$ имеем

$$x(\tau) = x(0) + (I^{\alpha'} f)(\tau) = x(0) + \big(I^\alpha(I^{\alpha'-\alpha} f)\big)(\tau), \quad \tau \in [0,t], \tag{1.3}$$

откуда, поскольку $(I^{\alpha'-\alpha} f)(\cdot) \in \mathrm{C}([0,t],\mathbb{R}^n)$, выводим $x(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)$.

Для функции $x : [0,t] \to \mathbb{R}^n$ левосторонней дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$ на отрезке $[0,t]$ называется следующая величина (см., например, [9, Sect. 2.4]):

$$({}^C D^\alpha x)(\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\big(I^{1-\alpha}(x(\cdot) - x(0))\big)(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int\limits_0^\tau \frac{x(\xi) - x(0)}{(\tau - \xi)^\alpha}\,\mathrm{d}\xi, \quad \tau \in [0,t]. \tag{1.4}$$

В случае $\alpha = 1$ полагаем $({}^C D^\alpha x)(\tau) = \mathrm{d}x(\tau)/\mathrm{d}\tau$. Согласно, например, [8, теорема 2.4] (см. также [9, Lemmas 2.21, 2.22]) для любой функции $x(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)$ величина $({}^C D^\alpha x)(\tau)$ определена при почти всех (п. в.) $\tau \in [0,t]$, и, если равенство (1.1) выполнено для некоторой функции $f(\cdot) \in \mathrm{L}^\infty([0,t],\mathbb{R}^n)$, то $({}^C D^\alpha x)(\tau) = f(\tau)$ при п. в. $\tau \in [0,t]$. Учитывая этот факт, функцию $({}^C D^\alpha x)(\cdot)$ рассматриваем как элемент пространства $\mathrm{L}^\infty([0,t],\mathbb{R}^n)$, при необходимости доопределяя ее на множестве нулевой меры произвольным образом. Тогда в соответствии с (1.1) справедливо равенство

$$x(\tau) = x(0) + \big(I^\alpha({}^C D^\alpha x)\big)(\tau), \quad \tau \in [0,t]. \tag{1.5}$$

Кроме того, из (1.3) следует, что если $x(\cdot) \in \mathrm{AC}^{\alpha'}([0,t],\mathbb{R}^n)$ при некотором $\alpha' \in (\alpha,1]$, то производная $({}^C D^\alpha x)(\tau)$ порядка α существует при всех $\tau \in [0,t]$, и имеет место включение $({}^C D^\alpha x)(\cdot) \in \mathrm{C}([0,t],\mathbb{R}^n)$.

Обозначим через G множество пар $(t, w(\cdot))$ таких, что $t \in [0,T]$ и $w(\cdot) \in \mathrm{C}([0,t],\mathbb{R}^n)$. Отметим, что для любых $x(\cdot) \in \mathrm{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$ и $t \in [0,T]$ справедливо включение $(t, x_t(\cdot)) \in G$, где $x_t(\cdot) \in \mathrm{C}([0,t],\mathbb{R}^n)$ — сужение функции $x(\cdot)$ на отрезок $[0,t]$:

$$x_t(\tau) = x(\tau), \quad \tau \in [0,t]. \tag{1.6}$$

Следуя [3, § 1], на множестве G введем метрику

$$\operatorname{dist}\big((t,w(\cdot)),(t',w'(\cdot))\big) = \max\big\{\operatorname{dist}^*\big((t,w(\cdot)),(t',w'(\cdot))\big), \operatorname{dist}^*\big((t',w'(\cdot)),(t,w(\cdot))\big)\big\}, \tag{1.7}$$

где $(t,w(\cdot))$, $(t',w'(\cdot)) \in G$ и

$$\operatorname{dist}^*\big((t,w(\cdot)),(t',w'(\cdot))\big) = \max_{\tau\in[0,t]}\min_{\tau'\in[0,t']}\sqrt{|\tau-\tau'|^2 + \|w(\tau) - w'(\tau')\|^2}.$$

Другими словами, метрика dist является расстоянием по Хаусдорфу между графиками функций $w : [0,t] \to \mathbb{R}^n$ и $w' : [0,t'] \to \mathbb{R}^n$, имеющих, вообще говоря, разные области определения.

Для каждого $\alpha \in (0,1]$ определим множество

$$G^\alpha = \big\{(t, w(\cdot)) \in G \;\big|\; w(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)\big\}.$$

Так как для всякого $t \in [0,T]$ множество $\mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)$ плотно в $\mathrm{C}([0,t],\mathbb{R}^n)$, то в силу свойств метрики dist (см., например, [6, Proposition 8.2]) множество G^α плотно в G. Кроме того, для любого $\alpha' \in (\alpha, 1]$ в соответствии с (1.2) выполняется включение

$$G^{\alpha'} \subset G^\alpha. \tag{1.8}$$

2. Дифференциальные включения с производными Капуто

Приведем необходимые для дальнейшего изложения свойства множеств решений дифференциальных включений с дробными производными Капуто.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$({}^C D^\alpha x)(t) \in F(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [t_0, T], \tag{2.1}$$

при начальном условии

$$x(t) = w_0(t), \quad t \in [0, t_0]. \tag{2.2}$$

Здесь $\alpha \in (0,1)$, $(t_0, w_0(\cdot)) \in G^\alpha$, и многозначное отображение $[0,T] \times \mathbb{R}^n \ni (t,x) \mapsto F(t,x) \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующим требованиям:

$(F.1)$ Для любых $t \in [0,T]$ и $x \in \mathbb{R}^n$ множество $F(t,x)$ непусто, выпукло и компактно в $\mathbb{R}^n$.

$(F.2)$ Многозначное отображение F полунепрерывно сверху (по Хаусдорфу), т. е. для любых $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что, каковы бы ни были $t' \in [0,T]$ и $x' \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие неравенствам $|t-t'| \leqslant \delta$ и $\|x-x'\| \leqslant \delta$, имеет место включение $F(t',x') \subset [F(t,x)]^\varepsilon$. Здесь и далее $[F]^\varepsilon$ — замкнутая ε-окрестность множества $F \subset \mathbb{R}^n$:

$$[F]^\varepsilon = \big\{f \in \mathbb{R}^n \;\big|\; \inf_{f' \in F} \|f - f'\| \leqslant \varepsilon\big\}.$$

$(F.3)$ Существует $c_F > 0$ такое, что для любых $t \in [0,T]$ и $x \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка (условие подлинейного роста по переменной x)

$$\sup\big\{\|f\| \;\big|\; f \in F(t,x)\big\} \leqslant c_F(1 + \|x\|).$$

Положим

$$X^\alpha(t_0, w_0(\cdot)) = \big\{x(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n) \;\big|\; x_{t_0}(\cdot) = w_0(\cdot)\big\}. \tag{2.3}$$

Решением задачи (2.1), (2.2) назовем функцию $x(\cdot) \in X^\alpha(t_0, w_0(\cdot))$, которая при п. в. $t \in [t_0, T]$ удовлетворяет дифференциальному включению (2.1). Множество всех решений обозначим через $X_0^\alpha(t_0, w_0(\cdot))$.

При условиях $(F.1)$–$(F.3)$ справедливы [12, теоремы 1–3] следующие утверждения.

Утверждение 2. *Каковы бы ни были $\alpha \in (0,1)$ и $(t_0, w_0(\cdot)) \in G^\alpha$, множество $X_0^\alpha(t_0, w_0(\cdot))$ непусто и компактно в $\mathrm{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$.*

Утверждение 3. *Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ заданы $\alpha_k \in (0,1)$, $(t_k, w_k(\cdot)) \in G^{\alpha_k}$ и $\varepsilon_k \geqslant 0$, причем $\alpha_k \to \alpha_0 \in (0,1)$, $(t_k, w_k(\cdot)) \to (t_0, w_0(\cdot)) \in G^{\alpha_0}$ и $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Пусть для каждого $k \in \mathbb{N}$ выбрана функция $x^{(k)}(\cdot) \in X^{\alpha_k}(t_k, w_k(\cdot))$, которая при п. в. $t \in [t_k, T]$ удовлетворяет включению $({}^C D^{\alpha_k} x^{(k)})(t) \in [F(t, x^{(k)}(t))]^{\varepsilon_k}$. Тогда из последовательности $\{x^{(k)}(\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $x^{(0)}(\cdot) \in X_0^{\alpha_0}(t_0, w_0(\cdot))$.*

Утверждение 4. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $(t_0, w_0(\cdot)) \in G^\alpha$ и $x(\cdot) \in X_0^\alpha(t_0, w_0(\cdot))$. Тогда для любого $t \in [t_0, T]$ справедливо включение $X_0^\alpha(t, x_t(\cdot)) \subset X_0^\alpha(t_0, w_0(\cdot))$.*

3. Коинвариантные производные дробного порядка

Пусть $\alpha \in (0,1]$ и $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$. В соответствии с (2.3) рассмотрим множество допустимых продолжений функции $w(\cdot)$ вправо до T:

$$X^\alpha(t, w(\cdot)) = \big\{x(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n) \bigm| x_t(\cdot) = w(\cdot)\big\}. \tag{3.1}$$

Согласно [6, Sect. 9] (см. также [14, § 2.4; 3, § 2]) функционал $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$ коинвариантно (ci-) дифференцируем порядка α в точке $(t, w(\cdot))$, если существуют такие $\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$ и $\nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$, что для любого продолжения $x(\cdot) \in X^\alpha(t, w(\cdot))$ справедливо соотношение

$$\varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) = \partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot))(\tau - t)$$
$$+ \left\langle \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), \int\limits_t^\tau ({}^C D^\alpha x)(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right\rangle + o(\tau - t), \quad \tau \in (t, T), \tag{3.2}$$

где функция $x_\tau(\cdot)$ обозначает (см. (1.6)) сужение функции $x(\cdot)$ на отрезок $[0, \tau]$, величина $o(\cdot)$ может зависеть от продолжения $x(\cdot)$ и $o(\tau - t)/(\tau - t) \to 0$ при $\tau \downarrow t$. При этом $\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot))$ и $\nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))$ называются ci-производными порядка α функционала φ в точке $(t, w(\cdot))$.

Для иллюстрации понятия ci-дифференцируемости дробного порядка приведем примеры дифференцируемых и недифференцируемых в указанном смысле функционалов.

Возьмем $\alpha \in (0,1)$. Для каждой точки $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$ обозначим

$$r_{(t,w(\cdot))}(\tau) = \big(I^{1-\alpha}(w(\cdot) - w(0))\big)(\tau), \quad \tau \in [0, t].$$

Предположим, что функционал $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$ представим в виде

$$\varphi(t, w(\cdot)) = \psi(t, r_{(t,w(\cdot))}(\cdot)), \quad (t, w(\cdot)) \in G^\alpha, \tag{3.3}$$

для некоторого функционала $\psi : G^1 \to \mathbb{R}$. Тогда из определения (1.4) дробной производной Капуто, утверждения 1 и соотношения (1.5) вытекает, что φ будет ci-дифференцируемым порядка α в точке $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$, тогда и только тогда, когда ψ является ci-дифференцируемым первого порядка в точке $(t, r_{(t,w(\cdot))}(\cdot)) \in G^1$. При этом будут выполняться равенства

$$\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) = \partial_t^1 \psi(t, r_{(t,w(\cdot))}(\cdot)), \quad \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) = \nabla^1 \psi(t, r_{(t,w(\cdot))}(\cdot)).$$

В частности, на основе всякого ci-дифференцируемого первого порядка функционала ψ можно определить ci-дифференцируемый порядка α функционал φ согласно равенству (3.3). Подчеркнем, что класс ci-дифференцируемых первого порядка функционалов достаточно широк. Некоторые типичные примеры таких функционалов и формулы для вычисления соответствующих ci-производных могут быть найдены, например, в [14, § 2; 3, § 2].

В качестве другого примера приведем интегральный функционал

$$\varphi(t, w(\cdot)) = \int\limits_0^t L(t, \xi, w(\xi))\, \mathrm{d}\xi, \quad (t, w(\cdot)) \in G^\alpha.$$

Предположим, что функция $L : [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна вместе со своей частной производной по первой переменной. Тогда, применяя теорему о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра (см., например, [15, гл. 17, § 1, утверждение $2'$]), получаем, что функционал φ является ci-дифференцируемым порядка α в каждой точке $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$, и его ci-производные порядка α вычисляются по правилу

$$\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) = L(t, t, w(t)) + \int\limits_0^t \frac{\partial L}{\partial t}(t, \xi, w(\xi))\, \mathrm{d}\xi, \quad \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) = 0.$$

С другой стороны, в случае $n = 1$ рассмотрим функционал

$$\varphi(t, w(\cdot)) = w(t), \quad (t, w(\cdot)) \in G^1.$$

Отметим, что этот функционал является ci-дифференцируемым первого порядка во всех точках $(t, w(\cdot)) \in G^1$, $t < T$, причем $\partial_t^1 \varphi(t, w(\cdot)) = 0$ и $\nabla^1 \varphi(t, w(\cdot)) = 1$ (см., например, [3, § 2]). Покажем, что φ не ci-дифференцируем порядка $\alpha \in (0, 1)$ ни в одной точке $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$. Рассуждая от противного, возьмем точку $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$, в которой этот функционал ci-дифференцируем порядка α. Пусть f_1, $f_2 \in \mathbb{R}$ таковы, что $f_1 \neq f_2$. Для $i \in \{1, 2\}$ выберем функцию $x^{(f_i)}(\cdot) \in X^\alpha(t, w(\cdot))$ из условия $({}^C D^\alpha x^{(f_i)})(\tau) = f_i$ при п. в. $\tau \in [t, T]$. В согласии с (1.5) имеем

$$x^{(f_i)}(\tau) = w(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{({}^C D^\alpha w)(\xi)}{(\tau - \xi)^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}\xi + \frac{(\tau - t)^\alpha f_i}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad \tau \in [t, T], \quad i \in \{1, 2\},$$

и, следовательно,

$$\varphi(\tau, x_\tau^{(f_1)}(\cdot)) - \varphi(\tau, x_\tau^{(f_2)}(\cdot)) = \frac{(\tau - t)^\alpha (f_1 - f_2)}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad \tau \in [t, T].$$

В то же время в силу предположения о ci-дифференцируемости порядка α найдется число $\nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))$, для которого выполняется соотношение

$$\varphi(\tau, x_\tau^{(f_1)}(\cdot)) - \varphi(\tau, x_\tau^{(f_2)}(\cdot)) = (\tau - t)\langle \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), f_1 - f_2 \rangle + o(\tau - t), \quad \tau \in (t, T).$$

Таким образом, получаем

$$\frac{(\tau - t)^\alpha (f_1 - f_2)}{\Gamma(\alpha + 1)} = (\tau - t)\langle \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), f_1 - f_2 \rangle + o(\tau - t), \quad \tau \in (t, T).$$

Разделив обе части этого равенства на $(\tau - t)^\alpha$ и перейдя к пределу при $\tau \downarrow t$, выводим $f_1 - f_2 = 0$, что противоречит выбору f_1 и f_2.

Коснемся теперь вопроса о ci-дифференцируемости одного и того же функционала разных порядков α и α'. Последний приведенный пример показывает, что ci-дифференцируемый порядка $\alpha' = 1$ функционал может не быть ci-дифференцируемым никакого меньшего порядка $\alpha \in (0, 1)$. Оказывается справедливым в некотором смысле обратное утверждение.

Утверждение 5. *Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha' \in (\alpha, 1]$ и $(t, w(\cdot)) \in G^{\alpha'}$, $t < T$. Тогда, если функционал $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$ является ci-дифференцируемым порядка α в точке $(t, w(\cdot))$, то он ci-дифференцируем порядка α' в этой точке. При этом имеют место равенства*

$$\partial_t^{\alpha'} \varphi(t, w(\cdot)) = \partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + \langle \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), ({}^C D^\alpha w)(t) \rangle, \quad \nabla^{\alpha'} \varphi(t, w(\cdot)) = 0. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в соответствии с (1.8) функционал φ действительно определен на множестве $G^{\alpha'}$ и выполняется включение $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$. Возьмем любое продолжение $x(\cdot) \in X^{\alpha'}(t, w(\cdot))$. Учитывая (1.2), получаем $x(\cdot) \in X^\alpha(t, w(\cdot))$, а значит, в силу ci-дифференцируемости порядка α функционала φ в точке $(t, w(\cdot))$ справедливо соотношение (3.2). Принимая во внимание непрерывность функции $({}^C D^\alpha x)(\cdot)$, для $\tau \in (t, T)$ выводим

$$\int\limits_t^\tau ({}^C D^\alpha x)(\xi) \, \mathrm{d}\xi = ({}^C D^\alpha x)(t)(t - \tau) + o(\tau - t) = ({}^C D^\alpha w)(t)(t - \tau) + o(\tau - t),$$

и, стало быть,

$$\varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) = \big(\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + \langle \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), ({}^C D^\alpha w)(t) \rangle\big)(\tau - t) + o(\tau - t).$$

Так как это соотношение выполняется для каждого продолжения $x(\cdot) \in X^{\alpha'}(t, w(\cdot))$, то функционал φ является ci-дифференцируемым порядка α' в точке $(t, w(\cdot))$ и справедливы равенства (3.4). Утверждение доказано. $\square$

4. Уравнение Гамильтона — Якоби

Зафиксируем $\alpha \in (0,1)$ и рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с ci-производными порядка α

$$\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + H\bigl(t, w(t), \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))\bigr) = 0, \quad (t, w(\cdot)) \in G^\alpha, \quad t < T, \tag{4.1}$$

при краевом условии

$$\varphi(T, w(\cdot)) = \sigma(w(\cdot)), \quad w(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n). \tag{4.2}$$

Искомым в задаче (4.1), (4.2) является функционал $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$. Предположим, что функция $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (t,x,s) \mapsto H(t,x,s) \in \mathbb{R}$, называемая гамильтонианом, и краевой функционал $\mathrm{AC}^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n) \ni w(\cdot) \mapsto \sigma(w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ обладают следующими свойствами (см., например, [1, § 2.1], а также [3, § 7]):

$(H.1)$ Функция H непрерывна.

$(H.2)$ Для любого ограниченного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ существует такое $\lambda_H > 0$, что для любых $t \in [0,T]$, x, $x' \in K$ и $s \in \mathbb{R}^n$, $\|s\| = 1$, справедливо неравенство (условие Липшица по переменной x)
$$|H(t,x,s) - H(t,x',s)| \leqslant \lambda_H \|x - x'\|.$$

$(H.3)$ Существует такое $c_H > 0$, что для любых $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ и s, $s' \in \mathbb{R}^n$ имеет место оценка (условие Липшица по переменной s)
$$|H(t,x,s) - H(t,x,s')| \leqslant c_H(1 + \|x\|)\|s - s'\|.$$

$(H.4)$ Для любых $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^n$ и $\gamma \geqslant 0$ выполняется равенство (условие положительной однородности по переменной s)
$$H(t,x,\gamma s) = \gamma H(t,x,s).$$

(σ) Функционал σ непрерывен, т. е. для любых $w(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что какова бы ни была функция $w'(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n)$, если $\|w(\cdot) - w'(\cdot)\|_{[0,T]} \leqslant \delta$, то $|\sigma(w(\cdot)) - \sigma(w'(\cdot))| \leqslant \varepsilon$.

Задачи вида (4.1), (4.2) возникают [6; 7] при изучении свойств функционала цены в задачах оптимального управления и дифференциальных играх для динамических систем, движение которых описывается дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто порядка α. При этом предположения $(H.1)$–$(H.4)$ и (σ) являются естественными для достаточно широкого круга таких задач. В тех случаях, когда функционал цены непрерывен, а его ci-производные порядка α существуют и непрерывны во всех точках $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$, он удовлетворяет [6, Theorem 10.1] уравнению Гамильтона — Якоби (4.1), и, значит, является решением задачи (4.1), (4.2) в классическом смысле. Однако, как правило, функционал цены не обладает указанными свойствами гладкости (см., например, разд. 8 ниже), что приводит к необходимости рассмотрения обобщенных решений этой задачи.

Далее будет дано определение минимаксного решения задачи (4.1), (4.2). Будет доказано, что такое решение существует, единственно и непрерывно меняется с изменением порядка дифференцирования α, гамильтониана H и краевого функционала σ. Будет получен инфинитезимальный критерий минимаксного решения в терминах подходящих производных порядка α по многозначным направлениям, при помощи которого будет показана согласованность минимаксного и классического решений задачи (4.1), (4.2).

Доказательства этих фактов будут проводиться в целом по схемам обоснования аналогичных утверждений для уравнений Гамильтона — Якоби с частными производными первого порядка [1] и с ci-производными первого порядка [3] (см. также [5;11]) с опорой на приведенные в разд. 2 свойства множеств решений дифференциальных включений с дробными производными Капуто (см. утверждения 2–4). Поэтому в рассуждениях ниже основное внимание уделяется изменениям, связанным со спецификой операций дробного интегро-дифференцирования.

5. Минимаксное решение

Введем понятия верхнего и нижнего характеристических комплексов уравнения Гамильтона — Якоби (4.1) и дадим определения верхнего, нижнего и минимаксного решений задачи Коши для этого уравнения при краевом условии (4.2).

5.1. Характеристические комплексы

Пусть Q и P — некоторые непустые множества. Рассмотрим многозначные отображения

$$[0,T]\times\mathbb{R}^n\times Q\ni(t,x,q)\mapsto F_+(t,x,q)\subset\mathbb{R}^n,\quad [0,T]\times\mathbb{R}^n\times P\ni(t,x,p)\mapsto F_-(t,x,p)\subset\mathbb{R}^n,$$

обладающие следующими свойствами (см., например, [1, § 2.4]):

($F_\pm$.1) Для любых $q\in Q$ и $p\in P$ многозначные отображения

$$[0,T]\times\mathbb{R}^n\ni(t,x)\mapsto F_+(t,x,q)\subset\mathbb{R}^n,\quad [0,T]\times\mathbb{R}^n\ni(t,x)\mapsto F_-(t,x,p)\subset\mathbb{R}^n \tag{5.1}$$

удовлетворяют условиям (F.1)–(F.3), указанным в разд. 2, причем константа c_F в (F.3) не зависит от выбора $q\in Q$ и $p\in P$.

($F_\pm$.2) Для любых $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$ и $s\in\mathbb{R}^n$ справедливы равенства

$$\sup_{q\in Q}\min_{f\in F_+(t,x,q)}\langle s,f\rangle=H(t,x,s),\quad \inf_{p\in P}\max_{f\in F_-(t,x,p)}\langle s,f\rangle=H(t,x,s).$$

Пары (Q,F_+) и (P,F_-) назовем соответственно верхним и нижним характеристическими комплексами уравнения (4.1). Совокупность всех верхних характеристических комплексов обозначим через $\mathcal{F}_+(H)$, а нижних — через $\mathcal{F}_-(H)$. Отметим, что если гамильтониан H удовлетворяет условиям (H.1)–(H.4), то совокупности $\mathcal{F}_+(H)$ и $\mathcal{F}_-(H)$ непусты. В частности, требования ($F_\pm$.1) и ($F_\pm$.2) выполнены (см., например, [1, §§ 2.1, 2.2]) для

$$\begin{aligned} P=Q&=\bigl\{s\in\mathbb{R}^n \bigm| \|s\|=1\bigr\},\\ F_+(t,x,q)&=\bigl\{f\in F(x)\bigm|\langle f,q\rangle\geqslant H(t,x,q)\bigr\},\\ F_-(t,x,p)&=\bigl\{f\in F(x)\bigm|\langle f,p\rangle\leqslant H(t,x,p)\bigr\},\end{aligned} \tag{5.2}$$

где $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$, $q\in Q$, $p\in P$ и

$$F(x)=\bigl\{f\in\mathbb{R}^n\bigm|\|f\|\leqslant\sqrt{2}c_H(1+\|x\|)\bigr\}.$$

5.2. Верхнее, нижнее и минимаксное решения

Пусть $(Q,F_+)\in\mathcal{F}_+(H)$ и $(P,F_-)\in\mathcal{F}_-(H)$. Для $(t_0,w_0(\cdot))\in G^\alpha$ и $q\in Q$ рассмотрим дифференциальное включение с дробной производной Капуто

$$({}^CD^\alpha x)(t)\in F_+(t,x(t),q),\quad x(t)\in\mathbb{R}^n,\quad t\in[t_0,T], \tag{5.3}$$

при начальном условии

$$x(t) = w_0(t), \quad t \in [0, t_0]. \tag{5.4}$$

В согласии с разд. 2 определим множество $X_+^\alpha(t_0, w_0(\cdot), q)$ решений задачи (5.3), (5.4). Соответственно для $p \in P$ через $X_-^\alpha(t_0, w_0(\cdot), p)$ обозначим множество удовлетворяющих условию (5.4) решений дифференциального включения

$$({}^C D^\alpha x)(t) \in F_-(t, x(t), p), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [t_0, T].$$

В силу условия $(F_\pm.1)$ по утверждению 2 множества $X_+^\alpha(t_0, w_0(\cdot), q)$ и $X_-^\alpha(t_0, w_0(\cdot), p)$ непусты и компактны в $\mathrm{C}([0,T], \mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим множество $\mathrm{Sol}_+(Q, F_+)$ функционалов $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$ таких, что:

$(\varphi_+.1)$ Функционал φ полунепрерывен снизу.

$(\varphi_+.2)$ Справедливо неравенство $\varphi(T, w(\cdot)) \geqslant \sigma(w(\cdot))$, $w(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n)$.

$(\varphi_+.3)$ Для любых $\varepsilon > 0$, $(t_0, w_0(\cdot)) \in G^\alpha$, $t_0 < T$, $t \in (t_0, T]$ и $q \in Q$ существует функция $x(\cdot) \in X_+^\alpha(t_0, w_0(\cdot), q)$ такая, что $\varphi(t, x_t(\cdot)) \leqslant \varphi(t_0, w_0(\cdot)) + \varepsilon$.

Аналогично, пусть $\mathrm{Sol}_-(P, F_-)$ — множество функционалов $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим требованиям:

$(\varphi_-.1)$ Функционал φ полунепрерывен сверху.

$(\varphi_-.2)$ Справедливо неравенство $\varphi(T, w(\cdot)) \leqslant \sigma(w(\cdot))$, $w(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n)$.

$(\varphi_-.3)$ Для любых $\varepsilon > 0$, $(t_0, w_0(\cdot)) \in G^\alpha$, $t_0 < T$, $t \in (t_0, T]$ и $p \in P$ существует функция $x(\cdot) \in X_-^\alpha(t_0, w_0(\cdot), p)$ такая, что $\varphi(t, x_t(\cdot)) \geqslant \varphi(t_0, w_0(\cdot)) - \varepsilon$.

В согласии с включением $G^\alpha \subset G$ свойства полунепрерывности в условиях $(\varphi_+.1)$ и $(\varphi_-.1)$ понимаются относительно метрики dist из (1.7). В условиях $(\varphi_+.3)$ и $(\varphi_-.3)$ функция $x_t(\cdot)$ обозначает (см. (1.6)) сужение функции $x(\cdot)$ на отрезок $[0, t]$. Подчеркнем, что от выбора (Q, F_+) и (P, F_-) зависят только требования $(\varphi_+.3)$ и $(\varphi_-.3)$. Элементы множеств $\mathrm{Sol}_+(Q, F_+)$ и $\mathrm{Sol}_-(P, F_-)$ назовем соответственно верхними и нижними решениями задачи (4.1), (4.2).

Минимаксным решением задачи (4.1), (4.2) назовем функционал $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$, который одновременно является верхним и нижним решением этой задачи, т. е. удовлетворяет включению $\varphi \in \mathrm{Sol}_+(Q, F_+) \cap \mathrm{Sol}_-(P, F_-)$ для некоторых верхнего $(Q, F_+) \in \mathcal{F}_+(H)$ и нижнего $(P, F_-) \in \mathcal{F}_-(H)$ характеристических комплексов. Отметим, что в разд. 6.1 будет показано, что в действительности требования $(\varphi_+.3)$ и $(\varphi_-.3)$ выполняются для минимаксного решения при всех $(Q, F_+) \in \mathcal{F}_+(H)$ и $(P, F_-) \in \mathcal{F}_-(H)$ соответственно.

6. Корректность минимаксного решения

Докажем, что определенное выше минимаксное решение задачи (4.1), (4.2) существует, единственно и непрерывно меняется с изменением порядка дифференцирования α, гамильтониана H и краевого функционала σ.

6.1. Существование и единственность

Имеет место

Теорема 1. *Пусть в задаче* (4.1), (4.2) *гамильтониан H и краевой функционал σ удовлетворяют условиям* $(H.1)$–$(H.4)$ *и* (σ). *Тогда минимаксное решение этой задачи существует и единственно. Это решение удовлетворяет условиям* $(\varphi_+.3)$ *и* $(\varphi_-.3)$ *при любых характеристических комплексах* $(Q, F_+) \in \mathcal{F}_+(H)$ *и* $(P, F_-) \in \mathcal{F}_-(H)$ *соответственно.*

Теорема 1 вытекает (см., например, [1, § 3]) из приведенных ниже лемм 1 и 2, которые справедливы при сделанных в этой теореме предположениях.

Лемма 1. *Каковы бы ни были $(Q, F_+) \in \mathcal{F}_+(H)$ и $(P, F_-) \in \mathcal{F}_-(H)$, найдутся функционалы $\varphi_+ \in \mathrm{Sol}_+(Q, F_+)$ и $\varphi_- \in \mathrm{Sol}_-(P, F_-)$ такие, что выполнено неравенство*

$$\varphi_+(t, w(\cdot)) \leqslant \varphi_-(t, w(\cdot)), \quad (t, w(\cdot)) \in G^\alpha.$$

Доказательство леммы 1 с понятными изменениями повторяет рассуждения из [1, § 3.1] (см. также [3, теорема 7.1; 5, теорема 1]). При этом искомые функционалы φ_+ и φ_- строятся соответственно как нижнее и верхнее замыкания поточечной нижней грани всех функционалов $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$, обладающих свойствами $(\varphi_+.2)$ и $(\varphi_+.3)$.

Лемма 2. *Каковы бы ни были $(Q, F_+) \in \mathcal{F}_+(H)$ и $(P, F_-) \in \mathcal{F}_-(H)$, для любых функционалов $\varphi_+ \in \mathrm{Sol}_+(Q, F_+)$ и $\varphi_- \in \mathrm{Sol}_-(P, F_-)$ справедливо неравенство*

$$\varphi_+(t, w(\cdot)) \geqslant \varphi_-(t, w(\cdot)), \quad (t, w(\cdot)) \in G^\alpha. \tag{6.1}$$

При доказательстве леммы 2 используется следующее утверждение, проверка которого проводится по аналогии с [3, утверждение 5.1].

Утверждение 6. *Пусть $(Q, F_+) \in \mathcal{F}_+(H)$, $(P, F_-) \in \mathcal{F}_-(H)$ и $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$. Тогда, если φ удовлетворяет условиям $(\varphi_+.1)$ и $(\varphi_+.3)$, то каковы бы ни были $(t_0, w_0(\cdot)) \in G^\alpha$, $t_0 < T$, и $q \in Q$, найдется функция $x(\cdot) \in X^\alpha_+(t_0, w_0(\cdot), q)$ такая, что*

$$\varphi(t, x_t(\cdot)) \leqslant \varphi(t_0, w_0(\cdot)), \quad t \in [t_0, T].$$

Аналогично, если φ удовлетворяет условиям $(\varphi_-.1)$ и $(\varphi_-.3)$, то для любых $(t_0, w_0(\cdot)) \in G^\alpha$, $t_0 < T$, и $p \in P$ существует функция $x(\cdot) \in X^\alpha_-(t_0, w_0(\cdot), p)$ такая, что

$$\varphi(t, x_t(\cdot)) \geqslant \varphi(t_0, w_0(\cdot)), \quad t \in [t_0, T].$$

Доказательство леммы 2. Будем следовать в основном схеме рассуждений из [1, § 3.2] (см. также [3, теорема 7.1; 5, теорема 1]). Зафиксируем $(t_0, w_0(\cdot)) \in G^\alpha$. Если $t_0 = T$, то неравенство (6.1) для $(t_0, w_0(\cdot))$ выполняется в силу условий $(\varphi_+.2)$ для φ_+ и $(\varphi_-.2)$ для φ_-. Далее считаем, что $t_0 < T$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto F^*(x) = \big\{ f \in \mathbb{R}^n \;\big|\; \|f\| \leqslant c_F(1 + \|x\|) \big\},$$

где c_F — константа, с которой характеристические комплексы (Q, F_+) и (P, F_-) удовлетворяют условию $(F.3)$. Обозначим через X^* множество решений дифференциального включения

$$({}^C D^\alpha x)(t) \in F^*(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [t_0, T],$$

при начальном условии

$$x(t) = w_0(t), \quad t \in [0, t_0].$$

По утверждению 2 множество X^* является непустым компактом в $\mathrm{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$, поэтому найдется $R^*_x > 0$ такое, что $\|x(\cdot)\|_{[0,T]} \leqslant R^*_x$, $x(\cdot) \in X^*$. Тогда, полагая $R^*_f = c_F(1 + R^*_x)$, для любой функции $x(\cdot) \in X^*$ имеем $\|({}^C D^\alpha x)(t)\| \leqslant R^*_f$ при п. в. $t \in [t_0, T]$. Далее, определим λ_H в согласии с условием $(H.2)$, где в качестве множества K выбираем шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и радиусом R^*_x. Отметим, что в силу утверждения 4 для любых $x(\cdot) \in X^*$ и $t \in [t_0, T]$ при всех $q \in Q$ и $p \in P$ справедливо включение

$$X^\alpha_+(t, x_t(\cdot), q) \cup X^\alpha_-(t, x_t(\cdot), p) \subset X^*. \tag{6.2}$$

Для $\beta > 0$ рассмотрим многозначное отображение

$$\mathbb{R}^n \ni s \mapsto F_\beta(s) = \big\{ f \in \mathbb{R}^n \ \big| \ \langle s, f \rangle \leqslant \lambda_H \|s\|^2 + \beta, \ \|f\| \leqslant 2R_f^* \big\}. \tag{6.3}$$

Пусть S_β — множество решений дифференциального включения

$$({}^C D^\alpha s)(t) \in F_\beta(s(t)), \quad s(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [t_0, T], \tag{6.4}$$

при начальном условии

$$s(t) = 0, \quad t \in [0, t_0]. \tag{6.5}$$

Обозначим $s^{(0)}(t) = 0$, $t \in [0, T]$. Так как $(t_0, s^{(0)}_{t_0}(\cdot)) \in G^\alpha$, а многозначное отображение F_β из (6.3) удовлетворяет условиям $(F.1)$–$(F.3)$, то в силу утверждения 2 множество S_β непусто и компактно в $\mathrm{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$. Заметим, что $s^{(0)}(\cdot) \in S_\beta$.

Докажем, что для любой функции $s(\cdot) \in S_\beta$ справедлива оценка

$$\|s(t)\|^2 \leqslant \frac{2\beta T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} E_\alpha(2\lambda_H T^\alpha), \quad t \in [0, T]. \tag{6.6}$$

Здесь и далее E_α — функция Миттаг-Леффлера (см., например, [13, Ch. 3]). Рассмотрим функцию $V(t) = \|s(t)\|^2$, $t \in [0, T]$. В согласии с (6.5) имеем

$$V(t) = 0, \quad t \in [0, t_0]. \tag{6.7}$$

Применяя [16, Corollary 4.2], получаем $V(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$ и

$$({}^C D^\alpha V)(t) \leqslant 2\langle s(t), ({}^C D^\alpha s)(t) \rangle \text{ при п. в. } t \in [0, T].$$

Тогда в силу (6.3) и (6.4) при п. в. $t \in [t_0, T]$ выполняется неравенство

$$({}^C D^\alpha V)(t) \leqslant 2(\lambda_H \|s(t)\|^2 + \beta) = 2\lambda_H V(t) + 2\beta.$$

Так как в соответствии с (6.7) это неравенство верно также и для всех $t \in [0, t_0)$, то, опираясь на (1.5), выводим

$$V(t) \leqslant \frac{2\lambda_H}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{V(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau + \frac{2\beta T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad t \in [0, T],$$

откуда следует доказываемая оценка (6.6), если принять во внимание аналог леммы Беллмана—Гронуолла для интегралов дробного порядка (см., например, [10, Lemma 6.19]) и определение функции $V(\cdot)$.

Рассмотрим множество

$$W_\beta = \big\{ (x(\cdot), y(\cdot)) \in X^* \times X^* \ \big| \ s(\cdot) = y(\cdot) - x(\cdot) \in S_\beta \big\}.$$

Поскольку для любой функции $x(\cdot) \in X^*$ имеем $x(\cdot) - x(\cdot) = s^{(0)}(\cdot) \in S_\beta$, то $(x(\cdot), x(\cdot)) \in W_\beta$, а значит, $W_\beta \neq \varnothing$. Кроме того, множество W_β компактно в $\mathrm{C}([0, T], \mathbb{R}^n) \times \mathrm{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$ в силу компактности множеств X^* и S_β. Далее, для $t \in [t_0, T]$ обозначим через $M_\beta(t)$ множество пар $(x(\cdot), y(\cdot)) \in W_\beta$ таких, что

$$\varphi_+(t_0, w_0(\cdot)) \geqslant \varphi_+(t, x_t(\cdot)), \quad \varphi_-(t_0, w_0(\cdot)) \leqslant \varphi_-(t, y_t(\cdot)). \tag{6.8}$$

Отметим, что $M_\beta(t_0) \neq \varnothing$. Положим

$$t_\beta = \max \big\{ t \in [t_0, T] \ \big| \ M_\beta(t) \neq \varnothing \big\}. \tag{6.9}$$

Максимум в этом выражении достигается благодаря компактности множества W_β и свойств $(\varphi_+.1)$ и $(\varphi_-.1)$ функционалов φ_+ и φ_- соответственно.

Предположим, что для любого $\beta > 0$ справедливо равенство

$$t_\beta = T. \tag{6.10}$$

Тогда выберем $\beta_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, так, чтобы $\beta_k \to 0$ при $k \to \infty$, и для каждого $k \in \mathbb{N}$ возьмем $(x^{(k)}(\cdot), y^{(k)}(\cdot)) \in M_{\beta_k}(T)$. Учитывая неравенства (6.8), а также условия $(\varphi_+.2)$ для φ_+ и $(\varphi_-.2)$ для φ_-, при всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\varphi_+(t_0, w_0(\cdot)) \geqslant \varphi_+(T, x^{(k)}(\cdot)) \geqslant \sigma(x^{(k)}(\cdot)), \quad \varphi_-(t_0, w_0(\cdot)) \leqslant \varphi_-(T, y^{(k)}(\cdot)) \leqslant \sigma(y^{(k)}(\cdot)). \tag{6.11}$$

Принимая во внимание, что $x^{(k)}(\cdot)$, $y^{(k)}(\cdot) \in X^*$, $k \in \mathbb{N}$, и множество X^* компактно, можно считать, что $x^{(k)}(\cdot) \to x^{(0)}(\cdot) \in X^*$ и $y^{(k)}(\cdot) \to y^{(0)}(\cdot) \in X^*$ при $k \to \infty$. Кроме того, в силу (6.6) для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется оценка

$$\|y^{(k)}(t) - x^{(k)}(t)\|^2 \leqslant \frac{2\beta_k T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_\alpha(2\lambda_H T^\alpha), \quad t \in [0, T],$$

из которой, поскольку $\beta_k \to 0$ при $k \to \infty$, выводим $y^{(0)}(\cdot) = x^{(0)}(\cdot)$. Переходя в (6.11) к пределу при $k \to \infty$ и учитывая условие (σ), получаем доказываемое неравенство (6.1) для $(t_0, w_0(\cdot))$.

Таким образом, остается показать, что для любого $\beta > 0$ справедливо равенство (6.10). Предположим от противного, что $t_\beta < T$ для некоторого $\beta > 0$. Пусть $(x^{(\beta)}(\cdot), y^{(\beta)}(\cdot)) \in M_\beta(t_\beta)$. Согласно (6.8) имеем

$$\varphi_+(t_0, w_0(\cdot)) \geqslant \varphi_+(t_\beta, x^{(\beta)}_{t_\beta}(\cdot)), \quad \varphi_-(t_0, w_0(\cdot)) \leqslant \varphi_-(t_\beta, y^{(\beta)}_{t_\beta}(\cdot)).$$

Положим $s^{(\beta)}(\cdot) = y^{(\beta)}(\cdot) - x^{(\beta)}(\cdot)$. В соответствии со свойством $(F_\pm.2)$ выберем $q_\beta \in Q$ и $p_\beta \in P$ исходя из условий

$$\begin{aligned} &\min_{f \in F_+(t_\beta, x^{(\beta)}(t_\beta), q_\beta)} \langle s^{(\beta)}(t_\beta), f\rangle \geqslant H(t_\beta, x^{(\beta)}(t_\beta), s^{(\beta)}(t_\beta)) - \beta/4, \\ &\max_{f \in F_-(t_\beta, y^{(\beta)}(t_\beta), p_\beta)} \langle s^{(\beta)}(t_\beta), f\rangle \leqslant H(t_\beta, y^{(\beta)}(t_\beta), s^{(\beta)}(t_\beta)) + \beta/4. \end{aligned} \tag{6.12}$$

В силу утверждения 6 найдутся функции $x^*(\cdot) \in X^\alpha_+(t_\beta, x^{(\beta)}_{t_\beta}(\cdot), q_\beta)$ и $y^*(\cdot) \in X^\alpha_-(t_\beta, y^{(\beta)}_{t_\beta}(\cdot), p_\beta)$, для которых выполняются оценки

$$\varphi_+(t, x^*_t(\cdot)) \leqslant \varphi_+(t_\beta, x^{(\beta)}_{t_\beta}(\cdot)), \quad \varphi_-(t, y^*_t(\cdot)) \geqslant \varphi_-(t_\beta, y^{(\beta)}_{t_\beta}(\cdot)), \quad t \in [t_\beta, T]. \tag{6.13}$$

Пусть $s^*(\cdot) = y^*(\cdot) - x^*(\cdot)$. Опираясь на неравенства (6.12) и свойства $(H.1)$, $(F_\pm.1)$, возьмем $\delta \in (0, T - t_\beta]$ такое, что при п. в. $t \in [t_\beta, t_\beta + \delta]$ справедливы неравенства

$$\langle s^*(t), ({}^C D^\alpha x^*)(t)\rangle \geqslant H(t, x^*(t), s^*(t)) - \beta/2, \quad \langle s^*(t), ({}^C D^\alpha y^*)(t)\rangle \leqslant H(t, y^*(t), s^*(t)) + \beta/2.$$

Тогда с учетом условия $(H.4)$, включения (6.2) и выбора λ_H при п. в. $t \in [t_\beta, t_\beta + \delta]$ получаем

$$\begin{aligned} \langle s^*(t), ({}^C D^\alpha s^*)(t)\rangle &\leqslant H(t, y^*(t), s^*(t)) - H(t^*, x^*(t), s^*(t)) + \beta \\ &\leqslant \|s^*(t)\|\lambda_H \|y^*(t) - x^*(t)\| + \beta = \lambda_H \|s^*(t)\|^2 + \beta. \end{aligned}$$

Рассмотрим функции $\overline{x}(\cdot) \in X^\alpha(t_\beta + \delta, x^*_{t_\beta+\delta}(\cdot))$ и $\overline{y}(\cdot) \in X^\alpha(t_\beta + \delta, y^*_{t_\beta+\delta}(\cdot))$ такие, что $({}^C D^\alpha \overline{x})(t) = 0$ и $({}^C D^\alpha \overline{y})(t) = 0$ при п. в. $t \in [t_\beta + \delta, T]$. Из проведенных построений следует, что $\overline{x}(\cdot)$, $\overline{y}(\cdot) \in X^*$ и $\overline{s}(\cdot) = \overline{y}(\cdot) - \overline{x}(\cdot) \in S_\beta$, а значит, $(\overline{x}(\cdot), \overline{y}(\cdot)) \in W_\beta$. Поскольку при этом в силу (6.13) имеют место оценки

$$\varphi_+(t_\beta + \delta, \overline{x}_{t_\beta+\delta}(\cdot)) \leqslant \varphi_+(t_0, w_0(\cdot)), \quad \varphi_-(t_\beta + \delta, \overline{y}_{t_\beta+\delta}(\cdot)) \geqslant \varphi_-(t_0, w_0(\cdot)),$$

то $(\overline{x}(\cdot), \overline{y}(\cdot)) \in M_\beta(t_\beta + \delta)$. Стало быть, $M_\beta(t_\beta + \delta) \neq \varnothing$, что противоречит определению (6.9) числа t_β. Лемма доказана. $\square$

6.2. Непрерывная зависимость от параметров

Пусть для каждого $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ заданы число $\alpha_k \in (0,1)$ и отображения

$$H_k : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \sigma_k : \mathrm{AC}^{\alpha_k}([0,T], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},$$

которые удовлетворяют условиям $(H.1)$–$(H.4)$ и (σ), причем константа c_H в $(H.2)$ не зависит от выбора $k \in \mathbb{N}_0$. Предположим, что выполнены следующие требования:

1) При $k \to \infty$ имеет место сходимость $\alpha_k \to \alpha_0$.

2) Каковы бы ни были ограниченное множество $K \subset \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$, найдется $k_* \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $k \geqslant k_*$, $x \in K$ и $t \in [0,T]$ верно неравенство

$$|H_0(t,x,s) - H_k(t,x,s)| \leqslant \varepsilon.$$

3) Если $x^{(k)}(\cdot) \in \mathrm{AC}^{\alpha_k}([0,T], \mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}_0$, и $x^{(k)}(\cdot) \to x^{(0)}(\cdot)$ при $k \to \infty$, то $\sigma_k(x^{(k)}(\cdot)) \to \sigma_0(x^{(0)}(\cdot))$ при $k \to \infty$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ рассмотрим минимаксное решение $\varphi_k : G^{\alpha_k} \to \mathbb{R}$ задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби

$$\partial_t^{\alpha_k} \varphi(t, w(\cdot)) + H_k\big(t, w(t), \nabla^{\alpha_k} \varphi(t, w(\cdot))\big) = 0, \quad (t, w(\cdot)) \in G^{\alpha_k}, \quad t < T, \tag{6.14}$$

при краевом условии

$$\varphi(T, w(\cdot)) = \sigma_k(w(\cdot)), \quad w(\cdot) \in \mathrm{AC}^{\alpha_k}([0,T], \mathbb{R}^n). \tag{6.15}$$

Подчеркнем, что при разных $k \in \mathbb{N}_0$ функционалы φ_k определены, вообще говоря, на разных множествах G^{α_k}.

При сделанных предположениях справедлива

Теорема 2. *Пусть $(t_k, w_k(\cdot)) \in G^{\alpha_k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, и $(t_k, w_k(\cdot)) \to (t_0, w_0(\cdot))$ при $k \to \infty$. Тогда $\varphi_k(t_k, w_k(\cdot)) \to \varphi_0(t_0, w_0(\cdot))$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим функционалы

$$\begin{aligned} \varphi_*(t, w(\cdot)) &= \lim_{\delta \downarrow 0} \inf \big\{ \varphi_k(t', w'(\cdot)) \;\big|\; k \geqslant 1/\delta,\ (t', w'(\cdot)) \in O_\delta^{\alpha_k}(t, w(\cdot)) \big\}, \\ \varphi^*(t, w(\cdot)) &= \lim_{\delta \downarrow 0} \sup \big\{ \varphi_k(t', w'(\cdot)) \;\big|\; k \geqslant 1/\delta,\ (t', w'(\cdot)) \in O_\delta^{\alpha_k}(t, w(\cdot)) \big\}, \end{aligned} \tag{6.16}$$

где $(t, w(\cdot)) \in G^{\alpha_0}$ и

$$O_\delta^{\alpha_k}(t, w(\cdot)) = \big\{ (t', w'(\cdot)) \in G^{\alpha_k} \;\big|\; \mathrm{dist}\big((t, w(\cdot)), (t', w'(\cdot))\big) \leqslant \delta \big\}.$$

Отметим, что для любых $(t, w(\cdot)) \in G^{\alpha_0}$, $\delta > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ множество $O_\delta^{\alpha_k}(t, w(\cdot))$ непусто, поскольку каждое из множеств G^{α_0} и G^{α_k} плотно в G. Повторяя с понятными изменениями рассуждения из [1, теорема 4.3] (см. также [3, теорема 9.1; 5, теорема 2]), можно показать, что φ_* — верхнее, а φ^* — нижнее решение задачи (6.14), (6.15) при $k = 0$. Так как в силу (6.16) выполняется неравенство $\varphi_*(t, w(\cdot)) \leqslant \varphi^*(t, w(\cdot))$, $(t, w(\cdot)) \in G^{\alpha_0}$, то согласно теореме 1 и лемме 2 имеем

$$\varphi_0(t, w(\cdot)) = \varphi_*(t, w(\cdot)) = \varphi^*(t, w(\cdot)), \quad (t, w(\cdot)) \in G^{\alpha_0}.$$

Отсюда, если учесть определения (6.16) функционалов φ_* и φ^*, следует справедливость доказываемого утверждения. □

7. Дифференциальные неравенства для минимаксных решений

В разд. 5 определение минимаксного решения задачи (4.1), (4.2) было дано с использованием нелокальных свойств этого решения ($\varphi_+.3$) и ($\varphi_-.3$). Такой способ определения удобен для обоснования корректности минимаксного решения, однако проверить выполнение требований ($\varphi_+.3$) и ($\varphi_-.3$) для конкретного функционала весьма затруднительно. В этом разделе, следуя [3, § 11] (см. также [11]), введем подходящие понятия верхних и нижних производных порядка α по многозначным направлениям и докажем инфинитезимальный критерий минимаксного решения в виде пары дифференциальных неравенств, которые зачастую более удобны для проверки. Опираясь на этот критерий, установим следующие свойства минимаксного решения: если в задаче (4.1), (4.2) существует решение в классическом смысле, то оно совпадает с минимаксным решением; минимаксное решение удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби (4.1) в каждой точке, в которой оно ci-дифференцируемо порядка α.

7.1. Производные дробного порядка по многозначным направлениям

Пусть $\alpha \in (0,1)$, $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$ и $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$. Нижней и верхней (правыми) производными функционала φ вдоль продолжения $x(\cdot) \in X^\alpha(t, w(\cdot))$ (см. (3.1)) называются следующие величины:

$$\partial_-\{\varphi(t, w(\cdot)) \mid x(\cdot)\} = \liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{\varphi(t+\delta, x_{t+\delta}(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot))}{\delta},$$
$$\partial_+\{\varphi(t, w(\cdot)) \mid x(\cdot)\} = \limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{\varphi(t+\delta, x_{t+\delta}(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot))}{\delta}.$$

Далее, пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — непустой выпуклый компакт. Для $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\Omega^\alpha(t, w(\cdot), F, \varepsilon) = \big\{x(\cdot) \in X^\alpha(t, w(\cdot)) \;\big|\; ({}^C D^\alpha x)(\tau) \in [F]^\varepsilon \text{ при п. в. } \tau \in [t, T]\big\}.$$

Нижнюю и верхнюю (правые) производные порядка α функционала φ по многозначному направлению F определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_-^\alpha\{\varphi(t, w(\cdot)) \mid F\} &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{x(\cdot) \in \Omega^\alpha(t, w(\cdot), F, \varepsilon)} \partial_-\{\varphi(t, w(\cdot)) \mid x(\cdot)\}, \\ \mathrm{d}_+^\alpha\{\varphi(t, w(\cdot)) \mid F\} &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x(\cdot) \in \Omega^\alpha(t, w(\cdot), F, \varepsilon)} \partial_+\{\varphi(t, w(\cdot)) \mid x(\cdot)\}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

По аналогии с [3, утверждение 11.1] установим связь между производными порядка α по многозначным направлениям и ci-производными порядка α.

Утверждение 7. *Пусть $\alpha \in (0,1)$ и функционал $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$ является ci-дифференцируемым порядка α в точке $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$. Тогда для любого непустого выпуклого компакта $F \subset \mathbb{R}^n$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_-^\alpha\{\varphi(t, w(\cdot)) \mid F\} &= \partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + \min_{f \in F} \langle \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), f\rangle, \\ \mathrm{d}_+^\alpha\{\varphi(t, w(\cdot)) \mid F\} &= \partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + \max_{f \in F} \langle \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), f\rangle. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку для любых $\varepsilon > 0$ и $x(\cdot) \in \Omega^\alpha(t, w(\cdot), F, \varepsilon)$ при п. в. $\tau \in [t, T]$ имеем $({}^C D^\alpha x)(\tau) \in [F]^\varepsilon$, то выполняется (см., например, [17, § 5, лемма 12], а также [18, предложение 2.8.1]) включение

$$\frac{1}{\delta} \int\limits_t^{t+\delta} ({}^C D^\alpha x)(\tau)\, \mathrm{d}\tau \in [F]^\varepsilon, \quad \delta \in (0, T-t].$$

Тогда, учитывая ci-дифференцируемость порядка α функционала φ в точке $(t, w(\cdot))$, выводим

$$\partial_-\{\varphi(t,w(\cdot)) \mid x(\cdot)\} = \liminf_{\delta\downarrow 0}\left(\partial_t^\alpha\varphi(t,w(\cdot)) + \left\langle \nabla^\alpha\varphi(t,w(\cdot)), \frac{1}{\delta}\int\limits_t^{t+\delta}({}^C D^\alpha x)(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\rangle + \frac{o(\delta)}{\delta}\right)$$

$$\geqslant \partial_t^\alpha\varphi(t,w(\cdot)) + \min_{f\in[F]^\varepsilon}\langle\nabla^\alpha\varphi(t,w(\cdot)), f\rangle = \partial_t^\alpha\varphi(t,w(\cdot)) + \min_{f\in F}\langle\nabla^\alpha\varphi(t,w(\cdot)), f\rangle - \|\nabla^\alpha\varphi(t,w(\cdot))\|\varepsilon.$$

Поэтому в согласии с (7.1) справедливо неравенство

$$\mathrm{d}_-^\alpha\{\varphi(t,w(\cdot)) \mid F\} \geqslant \partial_t^\alpha\varphi(t,w(\cdot)) + \min_{f\in F}\langle\nabla^\alpha\varphi(t,w(\cdot)), f\rangle. \tag{7.3}$$

С другой стороны, для каждого $f \in F$ возьмем функцию $x^{(f)}(\cdot) \in X^\alpha(t, w(\cdot))$ такую, что $({}^C D^\alpha x^{(f)})(\tau) = f$ при п. в. $\tau \in [t, T]$. Имеем

$$\partial_-\{\varphi(t,w(\cdot)) \mid x^{(f)}(\cdot)\} = \liminf_{\delta\downarrow 0}\left(\partial_t^\alpha\varphi(t,w(\cdot)) + \left\langle \nabla^\alpha\varphi(t,w(\cdot)), \frac{1}{\delta}\int\limits_t^{t+\delta}({}^C D^\alpha x^{(f)})(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\rangle + \frac{o(\delta)}{\delta}\right)$$

$$= \liminf_{\delta\downarrow 0}\left(\partial_t^\alpha\varphi(t,w(\cdot)) + \langle\nabla^\alpha\varphi(t,w(\cdot)), f\rangle + \frac{o(\delta)}{\delta}\right) = \partial_t^\alpha\varphi(t,w(\cdot)) + \langle\nabla^\alpha\varphi(t,w(\cdot)), f\rangle.$$

Стало быть, учитывая, что $x^{(f)}(\cdot) \in \Omega^\alpha(t, w(\cdot), F, \varepsilon)$ для любых $f \in F$ и $\varepsilon > 0$, получаем

$$\mathrm{d}_-^\alpha\{\varphi(t,w(\cdot)) \mid F\} \leqslant \inf_{f\in F}\partial_-\{\varphi(t,w(\cdot)) \mid x^{(f)}(\cdot)\} \leqslant \partial_t^\alpha\varphi(t,w(\cdot)) + \min_{f\in F}\langle\nabla^\alpha\varphi(t,w(\cdot)), f\rangle. \tag{7.4}$$

Неравенства (7.3) и (7.4) доказывают первое из равенств в (7.2). Второе из равенств проверяется аналогично. Утверждение доказано. □

7.2. Инфинитезимальные критерии условий стабильности

Обозначим через $\mathcal{F}_+^{\mathrm{C}}(H)$ и $\mathcal{F}_-^{\mathrm{C}}(H)$ соответственно совокупности характеристических комплексов $(Q, F_+) \in \mathcal{F}_+(H)$ и $(P, F_-) \in \mathcal{F}_-(H)$ таких, что для любых $q \in Q$ и $p \in P$ многозначные отображения (5.1) не только полунепрерывны сверху (см. требование $(F_\pm.1)$), но и непрерывны. Отметим, что если гамильтониан H удовлетворяет условиям $(H.1)$–$(H.4)$, то определенные в (5.2) характеристические комплексы обладают (см., например, [1, § 2.1]) этим дополнительным свойством, так что совокупности $\mathcal{F}_+^{\mathrm{C}}(H)$ и $\mathcal{F}_-^{\mathrm{C}}(H)$ непусты.

Выразим условия $(\varphi_+.3)$ и $(\varphi_-.3)$ в инфинитезимальной форме.

Теорема 3. *Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$, для гамильтониана H выполнены требования $(H.1)$–$(H.4)$ и выбраны $(Q, F_+) \in \mathcal{F}_+^{\mathrm{C}}(H)$, $(P, F_-) \in \mathcal{F}_-^{\mathrm{C}}(H)$. Тогда, если функционал φ обладает свойством $(\varphi_+.1)$, то он удовлетворяет условию $(\varphi_+.3)$ в том и только том случае, когда*

$$\sup_{q\in Q}\mathrm{d}_-^\alpha\{\varphi(t,w(\cdot)) \mid F_+(t,w(t),q)\} \leqslant 0, \quad (t,w(\cdot)) \in G^\alpha, \quad t < T. \tag{7.5}$$

Аналогично, если φ обладает свойством $(\varphi_-.1)$, то он удовлетворяет условию $(\varphi_-.3)$ тогда и только тогда, когда

$$\inf_{p\in P}\mathrm{d}_+^\alpha\{\varphi(t,w(\cdot)) \mid F_-(t,w(t),p)\} \geqslant 0, \quad (t,w(\cdot)) \in G^\alpha, \quad t < T. \tag{7.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3 повторяет с понятными изменениями рассуждения из [1, теорема 7.1] (см. также [3, теорема 13.1; 11, теорема 1]), при этом используются утверждение 6 и свойства множеств решений дифференциальных включений с дробными производными Капуто, приведенные в разд. 2 (см. утверждения 2–4).

Из теоремы 3, если учесть определение минимаксного решения, вытекает

Следствие 1. *При условиях* $(H.1)$–$(H.4)$ *и* (σ) *непрерывный функционал* $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$ *является минимаксным решением задачи* (4.1), (4.2) *в том и только том случае, когда он удовлетворяет краевому условию* (4.2) *и при некоторых* $(Q, F_+) \in \mathcal{F}_+^{\mathrm{C}}(H)$ *и* $(P, F_-) \in \mathcal{F}_-^{\mathrm{C}}(H)$ *удовлетворяет паре дифференциальных неравенств* (7.5) *и* (7.6).

Подчеркнем, что в согласии с теоремами 1 и 3 для минимаксного решения задачи (4.1), (4.2) неравенства (7.5) и (7.6) выполнены при всех $(Q, F_+) \in \mathcal{F}_+^{\mathrm{C}}(H)$ и $(P, F_-) \in \mathcal{F}_-^{\mathrm{C}}(H)$.

7.3. Согласованность минимаксного и классического решений

Функционал $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$ назовем классическим решением задачи (4.1), (4.2), если он непрерывен, ci-дифференцируем порядка α при $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$, удовлетворяет уравнению (4.1) и краевому условию (4.2).

Справедлива

Теорема 4. *Пусть в задаче* (4.1), (4.2) *выполнены условия* $(H.1)$–$(H.4)$ *и* (σ). *Тогда имеют место следующие утверждения*:

i) *Если у этой задачи существует классическое решение, то оно совпадает с минимаксным решением.*

ii) *Минимаксное решение удовлетворяет уравнению* (4.1) *в каждой точке* $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$, *в которой оно* ci-*дифференцируемо порядка* α.

Согласно следствию 1 для доказательства обоих утверждений теоремы 4 достаточно заметить, что если функционал $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$ является ci-дифференцируемым порядка α в некоторой точке $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$, то в этой точке в силу утверждения 7 и условия $(F_\pm.2)$ равенство (4.1) эквивалентно паре дифференциальных неравенств (7.5) и (7.6) для произвольных $(Q, F_+) \in \mathcal{F}_+^{\mathrm{C}}(H)$ и $(P, F_-) \in \mathcal{F}_-^{\mathrm{C}}(H)$.

8. Пример

Проиллюстрируем полученные в статье результаты на примере. Пусть $n = 1$, $T > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона — Якоби

$$\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) - \Gamma(\alpha + 1)|\nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))| = 0, \quad (t, w(\cdot)) \in G^\alpha, \quad t < T, \tag{8.1}$$

при краевом условии

$$\varphi(T, w(\cdot)) = |w(T)|, \quad w(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0, T], \mathbb{R}). \tag{8.2}$$

Отметим, что в этой задаче гамильтониан $H(s) = -\Gamma(\alpha + 1)|s|$, $s \in \mathbb{R}$, и краевой функционал $\sigma(w(\cdot)) = |w(T)|$, $w(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, удовлетворяют требованиям $(H.1)$–$(H.4)$ и (σ). Множитель $\Gamma(\alpha + 1)$ в (8.1) добавлен для упрощения формул ниже.

Определим вспомогательный функционал

$$\psi(t, w(\cdot)) = w(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{({}^C D^\alpha w)(\tau)}{(T - \tau)^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}\tau, \quad (t, w(\cdot)) \in G^\alpha.$$

В согласии с [6, Sect. 12] функционал $\psi : G^\alpha \to \mathbb{R}$ непрерывен, ci-дифференцируем порядка α во всех точках $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$, причем

$$\partial_t^\alpha \psi(t, w(\cdot)) = 0, \quad \nabla^\alpha \psi(t, w(\cdot)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(T - t)^{1-\alpha}},$$

и выполнено равенство $\psi(T, w(\cdot)) = w(T)$, $w(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,T],\mathbb{R})$.

Докажем, что функционал

$$\varphi(t, w(\cdot)) = \max\bigl\{0, |\psi(t, w(\cdot))| - (T-t)^\alpha\bigr\}, \quad (t, w(\cdot)) \in G^\alpha, \tag{8.3}$$

является минимаксным решением задачи (8.1), (8.2). Из перечисленных выше свойств функционала ψ вытекает, что функционал φ удовлетворяет краевому условию (8.2), непрерывен, ci-дифференцируем порядка α во всех точках $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$, в которых $|\psi(t, w(\cdot))| \neq (T-t)^\alpha$. При этом в случае $\psi(t, w(\cdot)) > (T-t)^\alpha$ имеем

$$\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) = \frac{\alpha}{(T-t)^{1-\alpha}}, \quad \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(T-t)^{1-\alpha}}, \tag{8.4}$$

а в случае $\psi(t, w(\cdot)) < -(T-t)^\alpha$ получаем

$$\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) = \frac{\alpha}{(T-t)^{1-\alpha}}, \quad \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)(T-t)^{1-\alpha}}.$$

Следовательно, во всех таких точках φ удовлетворяет уравнению (8.1).

Рассмотрим теперь точку $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$, для которой $|\psi(t, w(\cdot))| = (T-t)^\alpha$. Пусть для определенности $\psi(t, w(\cdot)) = (T-t)^\alpha$.

Покажем, что φ не является ci-дифференцируемым порядка α в точке $(t, w(\cdot))$. Рассуждая от противного, возьмем такие $\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot))$, $\nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$, что соотношение (3.2) выполняется для любого продолжения $x(\cdot) \in X^\alpha(t, w(\cdot))$. Для $f \in \mathbb{R}$ выберем функцию $x^{(f)}(\cdot) \in X^\alpha(t, w(\cdot))$ из условия $({}^C D^\alpha x^{(f)})(\tau) = \Gamma(\alpha+1) f$ при п. в. $\tau \in [t, T]$. Тогда для любого $\tau \in (t, T)$ имеем

$$\psi(\tau, x_\tau^{(f)}(\cdot)) = w(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{({}^C D^\alpha w)(\xi)}{(T-\xi)^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_t^\tau \frac{\Gamma(\alpha+1) f}{(T-\xi)^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}\xi$$

$$= \psi(t, w(\cdot)) + \bigl((T-t)^\alpha - (T-\tau)^\alpha\bigr) f = (T-t)^\alpha (1+f) - (T-\tau)^\alpha f. \tag{8.5}$$

В случае $f \geqslant 0$ выводим $\psi(\tau, x_\tau^{(f)}(\cdot)) > (T-\tau)^\alpha$, а значит,

$$\varphi(\tau, x_\tau^{(f)}(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) = \psi(\tau, x_\tau^{(f)}(\cdot)) - (T-\tau)^\alpha$$

$$= \bigl((T-t)^\alpha - (T-\tau)^\alpha\bigr)(1+f) = \frac{\alpha(1+f)}{(T-t)^{1-\alpha}} (\tau - t) + o(\tau - t).$$

Следовательно, согласно (3.2) получаем

$$\frac{\alpha(1+f)}{(T-t)^{1-\alpha}} = \partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \Gamma(1+\alpha) f.$$

Так как это равенство верно для каждого $f \geqslant 0$, то $\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot))$ и $\nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))$ имеют вид (8.4). С другой стороны, в силу (8.5) в случае $f \leqslant -1$ для любого $\tau \in (t, T)$, удовлетворяющего оценке $(T-\tau)^\alpha > (1 + 1/f)(T-t)^\alpha$, справедливы неравенства

$$0 < \psi(\tau, x_\tau^{(f)}(\cdot)) \leqslant (T-\tau)^\alpha,$$

а стало быть,

$$\varphi(\tau, x_\tau^{(f)}(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) = 0. \tag{8.6}$$

Тогда, учитывая (3.2), выводим

$$0 = \partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \Gamma(1+\alpha) f.$$

Поскольку это равенство выполняется для всякого $f \leqslant -1$, то $\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) = \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) = 0$, что противоречит (8.4).

Далее, положим

$$Q = \{0\} \subset \mathbb{R}, \quad P = \{p \in \mathbb{R} \mid |p| \leqslant \Gamma(\alpha+1)\},$$

$$F_+ = \{f \in \mathbb{R} \mid |f| \leqslant \Gamma(\alpha+1)\}, \quad F_-(p) = \{p\}, \quad p \in P.$$

Отметим, что справедливы включения $(Q, F_+) \in \mathcal{F}_+^{\mathrm{C}}(H)$ и $(P, F_-) \in \mathcal{F}_-^{\mathrm{C}}(H)$. Проверим, что при таком выборе характеристических комплексов функционал φ в рассматриваемой точке $(t, w(\cdot))$ удовлетворяет дифференциальным неравенствам (7.5) и (7.6). Возьмем функцию $x(\cdot) \in X^\alpha(t, w(\cdot))$ такую, что $({}^C D^\alpha x)(\tau) = -\Gamma(\alpha+1)$ при п. в. $\tau \in [t, T]$. Тогда с учетом (8.6) и в согласии с обозначениями из разд. 7.1 имеем $\partial_-\{\varphi(t, w(\cdot)) \mid x(\cdot)\} = 0$. Отсюда, так как $x(\cdot) \in \Omega^\alpha(t, w(\cdot), F_+, \varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$, выводим $\mathrm{d}_-^\alpha\{\varphi(t, w(\cdot)) \mid F_+\} \leqslant 0$, т. е. неравенство (7.5) доказано. Для доказательства неравенства (7.6) достаточно заметить, что функционал φ неотрицателен, а в точке $(t, w(\cdot))$ обращается в ноль.

Аналогичным образом с понятными изменениями устанавливается, что в каждой точке $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$, в которой $\psi(t, w(\cdot)) = -(T-t)^\alpha$, функционал φ, во-первых, не является ci-дифференцируемым порядка α, а во-вторых, удовлетворяет дифференциальным неравенствам (7.5) и (7.6) при выбранных (Q, F_+) и (P, F_-).

Проведенные рассуждения в согласии со следствием 1 (см. также комментарий после теоремы 4) позволяют заключить, что определенный в (8.3) функционал φ — минимаксное решение задачи (8.1), (8.2). Кроме того, так как это решение не во всех точках $(t, w(\cdot)) \in G^\alpha$, $t < T$, является ci-дифференцируемым порядка α, то по утверждению i) теоремы 4 задача (8.1), (8.2) не имеет классического решения.

В заключение отметим, что с содержательной точки зрения функционал φ будет функционалом цены [6] в задаче оптимального управления для динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$({}^C D^\alpha x)(t) = \Gamma(1+\alpha) u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in [0, T],$$

на минимум показателя качества $J = |x(T)|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
2. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective. Basel: Birkhäuser, 1995. 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 .
3. **Лукоянов Н.Ю.** Функциональные уравнения Гамильтона — Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во Урал. федерал. ун-та, 2011. 243 с.
4. **Bayraktar E., Keller C.** Path-dependent Hamilton–Jacobi equations in infinite dimensions // J. Funct. Anal. 2018. Vol. 275, iss. 8. P. 2096–2161. doi: 10.1016/j.jfa.2018.07.010 .
5. **Плаксин А.Р.** О минимаксном решении функциональных уравнений Гамильтона — Якоби для систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 11. С. 1519–1527. doi: 10.1134/S0374064119110086 .
6. **Gomoyunov M.I.** Dynamic programming principle and Hamilton–Jacobi–Bellman equations for fractional-order systems // SIAM J. Control Optim. 2020. Vol. 58, no. 6. P. 3185–3211. doi: 10.1137/19M1279368 .
7. **Гомоюнов М.И.** Об уравнении Гамильтона — Якоби для дифференциальных игр в системах с дробными производными Капуто // Междунар. конф. “Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019)”, посвящен. 95-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского (Екатеринбург, 16–20 сентября 2019 г.): материалы. С. 95–99.
8. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

9. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Theory and applications of fractional differential equations. N Y: Elsevier, 2006. 540 p. ISBN: 0444518320.
10. **Diethelm K.** The analysis of fractional differential equations. Berlin: Springer, 2010. 247 p. doi: 10.1007/978-3-642-14574-2.
11. **Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.** Стабильные функционалы динамических систем нейтрального типа // Тр. МИАН. 2019. Т. 304. С. 221–234. doi: 10.4213/tm3968.
12. **Гомоюнов М.И.** К теории дифференциальных включений с дробными производными Капуто // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 11. С. 1419–1432. doi: 10.1134/S0374064120110011.
13. **Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V.** Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer, 2014. 443 p. doi: 10.1007/978-3-662-43930-2.
14. **Kim A.V.** Functional differential equations. Application of i-smooth calculus. Dordrecht: Kluwer, 1999. 165 p.
15. **Зорич В.А.** Математический анализ: Учебник. Ч. II. М.: Наука, 1984. 640 с.
16. **Gomoyunov M.I.** Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems // Frac. Calc. Appl. Anal. 2018. Vol. 21, no. 5. P. 1238–1261. doi: 10.1515/fca-2018-0066.
17. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.
18. **Арутюнов А.В.** Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М.: Физматлит, 2014. 184 с.

Поступила 17.08.2020
После доработки 15.10.2020
Принята к публикации 26.10.2020

Гомоюнов Михаил Игоревич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

REFERENCES

1. Subbotin A.I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona–Yakobi* [Minimax Inequalities and Hamilton–Jacobi Equations]. Moscow: Nauka Publ., 1991, 216 p.
2. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective.* Basel: Birkhäuser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1.
3. Lukoyanov N.Yu. *Funktsional'nye uravneniya Gamil'tona–Yakobi i zadachi upravleniya s nasledstvennoi informatsiei* [Functional Hamilton–Jacobi equations and control problems with hereditary information]. Yekaterinburg: Ural Federal University Publ., 2011, 243 p.
4. Bayraktar E., Keller C. Path-dependent Hamilton–Jacobi equations in infinite dimensions. *J. Funct. Anal.*, 2018, vol. 275, no. 8, pp. 2096–2161. doi: 10.1016/j.jfa.2018.07.010.
5. Plaksin A.R. Minimax solution of functional Hamilton–Jacobi equations for neutral type systems. *Diff. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 11, pp. 1475–1484. doi: 10.1134/S0012266119110077.
6. Gomoyunov M.I. Dynamic programming principle and Hamilton–Jacobi–Bellman equations for fractional-order systems. *SIAM J. Control Optim.*, 2020, vol. 58, no. 6, pp. 3185–3211. doi: 10.1137/19M1279368.
7. Gomoyunov M.I. On a Hamilton–Jacobi equation for differential games in systems with fractional Caputo derivatives. In: *Proc. Int. Conf. "Stability, Control, Differential Games"* (SCDG2019) devoted to the 95th anniversary of Academician N.N. Krasovskii (Yekaterinburg, Russia, 16–20 September 2019). Yekaterinburg: IMM UB RAS Publ., 2019, pp. 95–99 (in Russian). ISBN: 978-5-8295-0652-0.
8. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications.* Yverdon: Gordon and Breach Science Publ., 1993, 976 p. ISBN: 9782881248641. Original Russian text published in Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya*, Minsk: Nauka i Tekhnika Publ., 1987, 688 p.

9. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations.* N Y: Elsevier, 2006, 540 p. ISBN: 0444518320 .
10. Diethelm K. *The analysis of fractional differential equations.* Berlin: Springer, 2010, 247 p. doi: 10.1007/978-3-642-14574-2 .
11. Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Stable functionals of neutral-type dynamical systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2019, vol. 304, pp. 205–218. doi: 10.1134/S0081543819010140 .
12. Gomoyunov M.I. To the theory of differential inclusions with Caputo fractional derivatives. *Diff. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 11, pp. 1387–1401. doi: 10.1134/S0012266120110014 .
13. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications.* Berlin: Springer, 2014, 443 p. doi: 10.1007/978-3-662-43930-2 .
14. Kim A.V. *Functional differential equations. Application of i-smooth calculus.* Dordrecht: Springer, 1999, 165 p. ISBN: 10.1007/978-94-017-1630-7 .
15. Zorich V.A. *Mathematical analysis. II.* Berlin: Springer, 2009, 681 p. ISBN: 978-3-540-87453-9 . Original Russian text published in Zorich V.A. *Matematicheskii analiz: Uchebnik. Ch. II.* Moscow: Nauka Publ., 1984, 640 p.
16. Gomoyunov M.I. Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems. *Frac. Calc. Appl. Anal.*, 2018, vol. 21, no. 5, pp. 1238–1261. doi: 10.1515/fca-2018-0066 .
17. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous right-hand sides.* Mathematics and Its Applications: Soviet Series, vol. 18, Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Pub., 1988, 304 p. doi: 10.1007/978-94-015-7793-9 . Original Russian text published in Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu*, Moscow: Nauka Publ., 1985, 225 p.
18. Arutyunov A.V. *Lektsii po vypuklomu i mnogoznachnomu analizu* (Lectures on convex and set-valued analysis). Moscow: Fizmatlit Publ., 2014, 184 p. ISBN: 978-5-9221-1558-2 .

Received August 17, 2020
Revised October 15, 2020
Accepted October 26, 2020

Funding Agency: This work was supported by RSF (project no. 19-71-00073).

Mikhail Igorevich Gomoyunov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com .

Cite this article as: M. I. Gomoyunov. Minimax solutions of homogeneous Hamilton–Jacobi equations with fractional-order coinvariant derivative, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 106–125 .