

ТРАЕКТОРИИ МАССИВНЫХ ТЕЛ В МОДЕЛЯХ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ И СТРУКТУРА СПИРАЛЬНЫХ ГАЛАКТИК

Р. С. Накибов, А. В. Урсулов
Уральский федеральный университет

В работе в рамках общей теории относительности рассмотрены особенности траекторий массивных тел, обусловленные отрицательной космологической постоянной: $\Lambda < 0$. Получены формулы, определяющие параметры орбиты тел в метрике Кеттлера. Показано, что существует стабильная круговая орбита с радиусом $R_\Lambda \sim \sqrt{\frac{1}{|\Lambda|}}$. На расстояниях $r < R_\Lambda$ траекториями частиц являются прецессирующие эллипсы, а при $r > R_\Lambda$ — спирали. В рамках рассматриваемого подхода предложена простая модель спиральных галактик и сделана попытка качественно объяснить их кривые вращения.

ORBITS OF MASSIVE PARTICLES IN NEGATIVE COSMOLOGICAL CONSTANT MODELS AND STRUCTURE OF SPIRAL GALAXIES

R. S. Nakibov, A. V. Ursulov
Ural Federal University

This paper explores features of massive particle orbits caused by the considering of negative cosmological constant ($\Lambda < 0$) in GR. Trajectory formulas are obtained for different cases of non-circular motion in Kottler metric. It is also shown that a stable circular orbit R_Λ exists with $R_\Lambda \sim \sqrt{\frac{1}{|\Lambda|}}$. Within that orbit ($r < R_\Lambda$) the trajectories are precessing ellipses and the spiral structure emerges beyond ($r > R_\Lambda$). Within the framework of this approach, a simple model of a spiral galaxy has been obtained. In addition, an attempt is made to qualitatively explain the shape of the rotational curves of spiral galaxies.

Введение

Уравнения гравитационного поля с положительной космологической постоянной позволяют в рамках модели Λ CDM объяснить ускоренное расширение Вселенной [1]. Данная модель хорошо работает на расстояниях порядка размеров наблюдаемой Вселенной, однако на меньших расстояниях (например, галактических) она предполагает наличие гипотетической темной материи. Одной из альтернатив Λ CDM модели на галактических расстояниях является модель, в которой космологическая постоянная отрицательна. Такая модель позволяет, например, объяснить кривые вращения галактик, не прибегая к гипотезе темной материи [2].

В данной работе показывается, что модель с отрицательной космологической постоянной объясняет не только кривые вращения галактик, но и позволяет выдвинуть некоторые гипотезы относительно структуры спиральных галактик.

Основная часть

Рассмотрим сферически симметричную метрику достаточно общего вида $g_{ij}(r, t) = \text{diag}(a(r, t), b(r, t), f(r, t), f(r, t) \sin^2 \theta)$, где $a(r, t) > 0$, $b(r, t) < 0$, $f(r, t) < 0$. Без

ограничения общности можно считать, что движение осуществляется в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$. Тогда из уравнений Эйнштейна с космологической постоянной $\Lambda < 0$ в статическом случае получим

$$\begin{aligned} a(r) &= 4Q - Af(r) + B \frac{1}{\sqrt{-f(r)}}, \\ b(r) &= \frac{Q(f'(r))^2}{f(r) \left[4Q - Af(r) + B \frac{1}{\sqrt{-f(r)}} \right]}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$4Q|\Lambda|/3 = A$$

где A, B, Q — произвольные постоянные.

Используя данные соотношения из уравнений геодезической линии, находим формулу для траектории:

$$(\phi(r)')^2 = \frac{(f(r)')^2}{-\frac{Ac^2}{QJ^2}f(r)^4 + \left(4\frac{c^2}{J^2} + \frac{A-K^2/J^2}{Q}\right)f(r)^3 - 4f(r)^2 + \frac{f(r)^2}{\sqrt{-f(r)}}\left(\frac{Bc^2f(r)}{J^2Q} - \frac{B}{Q}\right)}, \quad (2)$$

где K — постоянная, характеризующая отношение энергии частицы к ее энергии покоя; J — момент импульса, приходящийся на единицу массы.

Отметим, что уравнение (2) может быть записано в форме уравнения Бине:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{L^2u^2} \frac{d\mathcal{U}(r)}{dr}, \quad (3)$$

где $u = 1/r$; $\mathcal{U}(r)$ — потенциальная энергия частицы; $L = mJ$ — момент импульса.

Для рассматриваемой метрики

$$\mathcal{U}(r) = \frac{mc^2}{2} \left(\frac{1}{r^4} \frac{f(r)^2}{b(r)} \left(\frac{1}{a(r)} \frac{K^2}{c^2} + \frac{1}{f(r)} \frac{J^2}{c^2} - 1 \right) - \frac{1}{r^2} \frac{J^2}{c^2} + const \right). \quad (4)$$

Метрика сферически-симметричного гравитационного поля с $\Lambda \neq 0$ впервые рассматривалась в работе [3]. В этом случае $f(r) = -r^2$ и $A = \frac{|\Lambda|}{3}$; $Q = \frac{1}{4}$, $B = -r_g$ (r_g — гравитационный радиус центрального тела). Круговые орбиты можно получить двумя эквивалентными способами: либо из непосредственного анализа уравнений геодезической, либо путем нахождения минимума эффективного гравитационного потенциала, полученного на основе уравнения Бине. В результате получаем следующее уравнение для круговой орбиты:

$$\frac{|\Lambda|}{3}r^5 + \frac{r_g}{2}r^2 - j^2r - \frac{3}{2}j^2r_g = 0, \quad (5)$$

где $|\Lambda|$ — модуль космологической постоянной; r_g — гравитационный радиус центрального тела; $j = J/c$.

Решение уравнения (5) найдено разложением соответствующей алгебраической кривой в ряд Пуизе:

$$R_\Lambda = \frac{v}{c} \sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}}, \quad (6)$$

где v — линейная орбитальная скорость.

Отметим, что данная стабильная круговая орбита возникает только в модели с отрицательной космологической постоянной. Вблизи круговой орбиты уравнение траектории (2) принимает вид

$$(\phi')^2 = \frac{j^2}{r^4} \frac{1}{-\frac{1}{3}|\Lambda|R^2 \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{r_g}{R} \left(1 + \frac{R}{r}\right) - \left(\frac{j_R^2}{R^2} + \frac{j^2}{r^2}\right)}, \quad (7)$$

где R — радиус круговой орбиты, а j_R есть значение j на круговой орбите.

Для внутренней ($r < R$) и внешней ($r > R$) областей уравнение (7) допускает упрощения и может быть проинтегрировано.

Во внутренней области траектория при соответствующем выборе начальной фазы принимает вид прецессирующих эллипсов:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos((1 - \varepsilon)\varphi)}, \quad (8)$$

где ε есть параметр прецессии ($\varepsilon \ll 1$), а параметр p и эксцентриситет e орбиты задаются выражениями

$$p = \frac{2j^2}{r_g}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{4|\Lambda|R^2j^2}{3r_g^2}}. \quad (9)$$

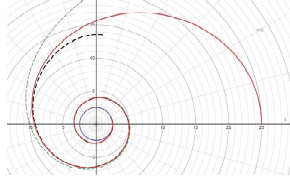
За один период траектория поворачивается на угол $\delta = 2\pi\varepsilon$.

Во внешней области решение принимает следующий вид (см. рисунок):

$$r = R \sqrt{\frac{\frac{r_g}{R} - \frac{v_R^2}{c^2}}{\frac{1}{3}|\Lambda|R^2 + \frac{R^2}{j^2} \left(\frac{r_g}{R} - \frac{v_R^2}{c^2} \right)^2 \varphi^2}}. \quad (10)$$

Траектория вблизи круговой орбиты — гиперболическая спираль, размер которой ограничен максимальным расстоянием:

$$r_{\max}(r_g, \Lambda) = \sqrt{\frac{3}{|\Lambda|} \left(\frac{r_g}{R} - \frac{v_R^2}{c^2} \right)}. \quad (11)$$



Фиолетовая линия — переходная круговая орбита; красная — спираль (10); черная — ее разложение в ряд Тейлора: $r = \frac{C_1}{\varphi} - \frac{C_2}{\varphi^3}$; зеленая — гиперболическая спираль $r = \frac{C_1}{\varphi}$

Наличие решений в виде спиралей наводит на мысль применить данную модель для объяснения структуры спиральных галактик. Тогда формулу (11) можно использовать для грубой оценки радиуса галактики, где еще прослеживается спиральная структура.

В рамках рассматриваемой модели также могут быть получены кривые вращения галактик:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{|\Lambda|r^2 + \frac{1}{2}\frac{r_g}{r}}{1 - \frac{3}{2}\frac{r_g}{r}}}. \quad (12)$$

Данная формула обобщает результат, полученный в работе [2]. Отметим, что формула имеет смысл только при $r > \frac{3}{2}r_g$. На малых расстояниях имеет место падение скорости $\sim \sqrt{r_g/r}$, однако на достаточном удалении наблюдается слабый рост: $\sim \sqrt{|\Lambda|r}$. Приведенная скорость принимает минимум на расстоянии

$$r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{r_g}{|\Lambda|}} + \frac{3}{4}r_g, \quad (13)$$

а ее минимальное значение

$$\frac{v_{min}}{c} = \sqrt[6]{\frac{9}{16}|\Lambda|r_g^2}. \quad (14)$$

Обсуждение результатов и заключение

В работе рассматриваются сферически-симметричные решения уравнений Эйнштейна с космологической постоянной. Показано, что в общем случае траектории удовлетворяют уравнению Бине с гравитационным потенциалом, зависящим от компонент метрического тензора.

Особо анализировался случай, когда входящий в уравнение Эйнштейна Λ -член отрицателен: $\Lambda < 0$. Для данного случая получены и проанализированы круговые траектории. Эти траектории разделяют пространство на две области с различным характером движения материальных тел: во внутренней области естественной траекторией являются прецессирующие эллипсы, во внешней — модифицированные гиперболические спирали.

Такой характер движения позволяет выдвинуть гипотезу, что исследуемая модель может быть применена к объяснению некоторых особенностей спиральных галактик с массивным балджем. Данная гипотеза предполагает наличие ряда закономерностей между характером движения галактик и величиной постоянной Λ . В частности, предполагается существование переходной круговой орбиты, радиус которой определяется формулой (6), что, в свою очередь, предполагает наличие закономерности: $R_\Lambda \sim \sqrt{\frac{1}{|\Lambda|}}$. Кроме того, характерные размеры галактик должны удовлетворять выражению (11), а кривые вращения галактик соответствовать формуле (12).

Полученные закономерности должны быть согласованы с наблюдательными данными. Дальнейшее развитие данной гипотезы предполагает изучение динамики галактических пыли и газа на фоне рассматриваемой метрики, а полученные таким образом результаты должны быть соотнесены с принятым на настоящий момент объяснением спиральной структуры галактик — теорией волны плотности [4]. Все исследования, подтверждающие или опровергающие рассматриваемую гипотезу, предполагается произвести в дальнейшем.

Библиографические ссылки

- [1] *Henke Christian*. Standard cosmology on the Anti-de Sitter boundary // *Classical and Quantum Gravity*. — 2021. — Vol. 38, № 22. — P. 225001.
- [2] *Farnes J. S.* A unifying theory of dark energy and dark matter: Negative masses and matter creation within a modified framework // *A&A*. — 2018. — Vol. 620. — P. A92.
- [3] *Kottler Friedrich*. Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie // *Annalen der Physik*. — 1918. — Vol. 361, № 14. — P. 401–462.
- [4] *Lin C. C., Shu Frank H.* On the Spiral Structure of Disk Galaxies. // *Astrophys. J.* — 1964. — Vol. 140. — P. 646.