МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Методические указания для студентов математико-механического факультета специализации «Механика»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2002

Методические указания подготовлены
кафедрой теоретической механики

Составитель *Н. И. Желонкина*

© Уральский государственный университет, 2002
© Н. И. Желонкина, составление, 2002

Утверждено
учебно-методической комиссией
математико-механического факультета
16 сентября 2002 г.

1. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Виртуальными (возможными) перемещениями называют всякую совокупность бесконечно малых перемещений, которые могут быть у точек механической системы в данный фиксируемый момент времени при сохранении наложенных на систему связей. Виртуальное перемещение k-й точки системы обозначается через $\delta\bar{r}_k$, а его проекции на оси координат – через δx_k, δy_k, δz_k (k = 1, ..., n). Виртуальное перемещение является воображаемым перемещением в данный момент времени, в отличие от которого действительное перемещение системы происходит в определенном направлении под действием системы приложенных сил и при непрерывном изменении времени и является дифференциалом $d\bar{r}_k$, а его проекции dx_k, dy_k, dz_k (k = 1, 2, …, n).

Принцип виртуальных перемещений доказывается для случая, когда на систему наложены стационарные (в уравнения связей время t явно не входит), идеальные связи. Идеальными связями называются связи, сумма элементарных работ сил реакций которых на всех виртуальных перемещениях равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{R}_k \delta\bar{r}_k = 0,$$

где $\bar{R}_k$ – равнодействующая реакций связей, действующих на k-ю точку; $\delta\bar{r}_k$ – виртуальное перемещение k-й точки механической системы.

Отметим, что действительное перемещение точки в случае стационарных связей является одним из числа виртуальных перемещений. Для нестационарных связей действительное перемещение уже не является частным случаем виртуального, т. к. виртуальное перемещение рассматривается при мгновенно остановленных связях, то есть при фиксированном значении момента времени.

Принцип виртуальных перемещений дает необходимое и достаточное условие равновесия механической системы и формулируется следующим образом: *для того чтобы рассматриваемое положение механической системы, подчиненной идеальным стационарным связям, являлось положением равновесия этой системы, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, действующих на систему, при любом ее виртуальном перемещении из этого положения равнялась нулю*:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta \overline{r}_k = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) в скалярной форме принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} \left(X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k \right) = 0, \qquad (2)$$

где X_k, Y_k, Z_k – проекции вектора $\overline{F}_k$ на оси координат. Это уравнение часто называют уравнением работ.

Обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_s$ механической системы называются независимые друг от друга параметры, при помощи которых можно определить в каждый момент времени положение этой системы и через которые можно выразить декартовы координаты всех ее точек.

Число независимых обобщенных координат называется числом степеней свободы данной системы.

Принцип виртуальных перемещений в обобщенных координатах выражается следующим образом:

$$Q_j = 0 \; (j = 1, 2, \ldots, s),$$

где Q_j – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j. Обобщенные силы определяют как коэффициенты при δq_j в выражении

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j$$

или по следующей формуле:

$$Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j},$$

где δA_j – элементарная работа всех активных сил, действующих на систему, на таком возможном перемещении системы, при котором изменяется только данная обобщенная координата q_j.

2. МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАТИКИ

Геометрическая статика является статикой твердого тела и не дает единого метода определения условий равновесия любой механической системы, имеющей то или иное число степеней свободы. Путем расчленения системы на отдельные твердые тела можно получить ее условия равновесия, однако этот путь требует введения в уравнения, а затем исключения из них большого числа дополнительных неизвестных (реакций внутренних связей), что существенно усложняет процесс решения, и в конечном итоге получаются не общие условия, а условия равновесия данной конкретной механической системы.

Принцип возможных перемещений дает эффективный метод определения условий равновесия любой механической системы. При этом могут быть решены и задачи, которые методами геометрической статики принципиально решить нельзя, например такие, в которых часть звеньев (тел) системы скрыта.

Можно указать общую последовательность решения задач статики посредством применения принципа виртуальных перемещений. Эта последовательность сводится к следующему:

• изобразить на рисунке все активные силы, действующие на механическую систему;

• определить количество степеней свободы механической системы и выбрать независимые виртуальные перемещения точек системы в числе равном числу степеней свободы этой системы;

• дать виртуальное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы, считая при этом виртуальные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю. Выразить возможные перемещения точек приложения сил через это виртуальное перемещение;

• вычислить сумму работ всех сил на соответствующих виртуальных перемещениях их точек приложения, и эту сумму приравнять нулю;

• произвести такие выкладки для каждого из независимых возможных перемещений, составить систему уравнений равновесия в числе равном числу степеней свободы системы;

• решив систему составленных уравнений равновесия, определить искомые величины.

Задачи, решаемые при помощи принципа виртуальных перемещений, можно разбить на следующие основные типы:

1. Нахождение зависимости между силами, действующими на систему, при заданном положении равновесия.
2. Определение параметров, определяющих положение равновесия системы, при заданных силах, действующих на систему.
3. Определение реакций связей.
4. Решение задач при безразличном равновесии.
5. Решение задач при наличии освобождающих связей.

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОСНОВНЫХ ТИПОВ

3.1. Нахождение зависимости между силами, действующими на систему, при заданном положении равновесия

Пример 1

Два груза, веса которых $\overline{P}$ и $\overline{Q}$, скользят по эллипсу, будучи привязаны к нерастяжимой нити $M_1F_1F_2M_2$, перекинутой через блоки F_1 и F_2, помещенные в фокусах эллипса. Большая ось эллипса горизонтальна (рис. 1). Найти связь между значениями сил P и Q при равновесии, если известно, что система находится

в равновесии при заданных углах φ_1 и φ_2. Эксцентриситет эллипса равен e.

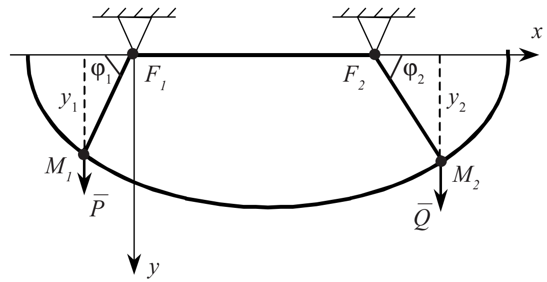

Рис. 1

Р е ш е н и е

Активные силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ приложены в точках M_1 и M_2 соответственно. Система имеет одну степень свободы. Сообщаем системе возможное перемещение. Обозначим через y_1 и y_2 длины перпендикуляров, опущенных из точек M_1 и M_2 на большую ось эллипса.

Для точки M_1 возможное перемещение $\delta\bar{r}_{M1}$ направлено по касательной к эллипсу и имеет координаты δx_1, δy_1, а возможное перемещение точки M_2 $\delta\bar{r}_{M2}$ имеет координаты δx_2, δy_2.

Далее, пользуясь основным выражением (2), на основании принципа виртуальных перемещений имеем уравнение работ:

$$P\,\delta y_1 + Q\,\delta y_2 = 0. \tag{3}$$

Теперь следует найти зависимость между вариациями δy_1 и δy_2 ординат точек M_1 и M_2.

Для этого обозначим расстояния от грузов до фокусов через r_1 и r_2, тогда

$$y_1 = r_1 \cdot \sin\varphi_1. \tag{4}$$

Варьируя это уравнение, находим

$$\delta y_1 = \sin\varphi_1\,\delta r_1 + r_1\cos\varphi_1\,\delta\varphi_1. \tag{5}$$

Связь между δr_1 и $\delta\varphi_1$ получим дифференцируя полярное уравнение эллипса:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

где r – радиус эллипса, проведенный из фокуса; p – параметр; e – эксцентриситет.

$$\delta r_1 = \frac{pe\sin\varphi_1}{(1 + e\cos\varphi_1)^2}\delta\varphi_1 = \frac{r_1 e\sin\varphi_1}{1 + e\cos\varphi_1}\delta\varphi_1.$$

Отсюда находим

$$r_1\delta\varphi_1 = \frac{1 + e\cos\varphi_1}{e\sin\varphi_1}\delta r_1,$$

подставляя это значение в уравнение (5), получим

$$\delta y_1 = \left(\sin\varphi_1 + \cos\varphi_1 \frac{1 + e\cos\varphi_1}{e\sin\varphi_1}\right)\delta r_1 = \frac{e + \cos\varphi_1}{e\sin\varphi_1}\delta r_1.$$

Аналогично получим

$$\delta y_2 = \frac{e + \cos\varphi_2}{e\sin\varphi_2}\delta r_2,$$

и уравнение работ (3) приобретает вид

$$P\frac{e + \cos\varphi_1}{e\sin\varphi_1}\delta r_1 + Q\frac{e + \cos\varphi_2}{e\sin\varphi_2}\delta r_2 = 0.$$

Вследствие того, что нить нерастяжима, $\delta r_1 = -\delta r_2$ и это условие принимает вид

$$\left(P\frac{e + \cos\varphi_1}{e\sin\varphi_1} - Q\frac{e + \cos\varphi_2}{e\sin\varphi_2}\right)\delta r_1 = 0.$$

Так как это равенство должно иметь место при любых значениях перемещения δr_1, то отсюда следует, что коэффициент при δr_1 должен тождественно равняться нулю и дает зависимость между значениями P и Q при равновесии

$$P\frac{e + \cos\varphi_1}{e\sin\varphi_1} = Q\frac{e + \cos\varphi_2}{e\sin\varphi_2}.$$

Пример 2

Система состоит из неизменяемого угла A_1AA_2, равного α, могущего вращаться около точки A, и из стержня CC_1, который жестко соединен с ползуном C и проходит через ползушку B, скользящую по звену AA_1 так, что стержень CC_1 при неподвижном угле A_1AA_2 может перемещаться параллельно самому себе. На ползушку B и ползун C действуют силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ соответственно, составляющие со сторонами углы β и γ (рис. 2). Каким условиям должны удовлетворять модули сил P и Q, для того чтобы система была в равновесии?

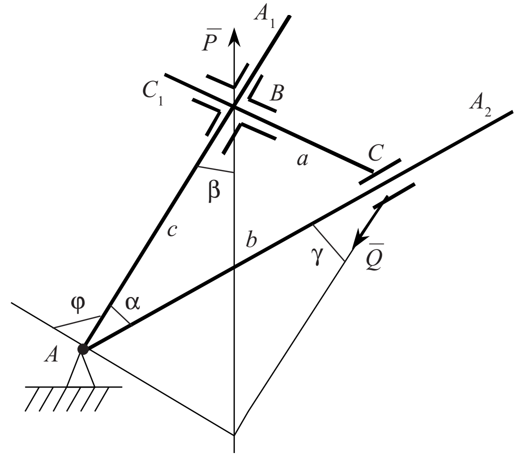

Рис. 2

Р е ш е н и е

Система обладает двумя степенями свободы. За параметры, определяющие положение системы, можно выбрать угол φ поворота угла A_1AA_2 и длину b отрезка AC (или длину c отрезка AB) определяющие положение стержня CC_1.

Сохраняя неизменными расстояния b и c, дадим углу φ приращение $\delta\varphi$, сумма элементарных работ сил P и Q будет

$$-P\sin\beta\, c\,\delta\varphi + Q\sin\gamma\, b\,\delta\varphi = 0,$$

откуда

$$cP\sin\beta = Q\, b\sin\gamma. \tag{6}$$

Далее, сохраняя φ неизменным, придадим b и c приращения δb и δc и подсчитаем сумму элементарных работ на этом возможном перемещении:

$$P \cos\beta \, \delta c - Q \cos\gamma \, \delta b = 0.$$

Из треугольника ABC по теореме синусов находим:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Так как углы B и C постоянные, получим

$$\frac{\delta b}{\delta c} = \frac{\sin B}{\sin C},$$

и второе уравнение работ принимает вид

$$\frac{P\cos\beta}{Q\cos\gamma} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$$

или

$$P\ c\ \cos\beta = Q\ b\ \cos\gamma. \qquad (7)$$

Разделив уравнение (6)на уравнение (7), находим

$$\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\gamma,\ \beta = \gamma.$$

Значит, при равновесии модули сил P и Q удовлетворяют соотношению

$$P\ c = Q\ b,$$

которое дает ответ на поставленный в задаче вопрос.

Достоинством принципа виртуальных перемещений является отсутствие в его формулировке реакций идеальных связей. Однако если не все связи, наложенные на систему, являются идеальными, например имеются негладкие опорные плоскости и поверхности, то к активным силам следует добавить силы трения и включить эти силы в число активных сил. Применяя принцип виртуальных перемещений, следует приравнять нулю сумму работ не только активных сил, но и сил трения на любых виртуальных перемещениях точек системы. Составленное уравнение определяет зависимость между активными силами и силами трения при равновесии механической системы.

Пример 3

Круговой кулак K массы m_1 и радиуса R стоит на негладкой горизонтальной плоскости. Он соприкасается с концом A стержня AB массы m_2, расположенного в вертикальных направляющих. Система находится в покое под действием силы $\overline{F}$, приложенной к кулаку по горизонтали направо. При этом $AM = h$ (рис. 3). Найти область значений модуля силы F, если коэффициент трения скольжения кулака о горизонтальную плоскость равен f.

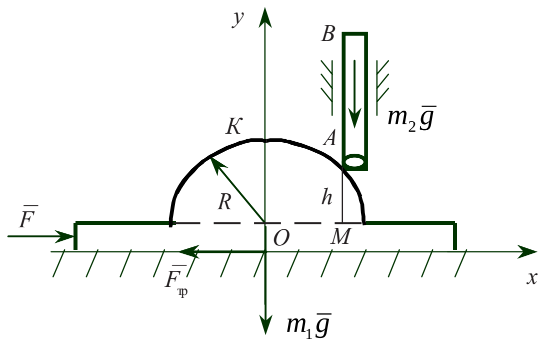

Рис. 3

Р е ш е н и е

К активным силам $m_1\overline{g}$, $m_2\overline{g}$, $\overline{F}$ добавляем силу трения $\overline{F}_{тр}$, которая при равновесии должна удовлетворять неравенству

$$|F_{тр}| \le f\,(m_1 + m_2)\,g. \qquad (8)$$

Придаем кулаку возможное перемещение δx по горизонтальной плоскости вправо, при этом стержень AB поднимается по вертикали вверх на δy, y – ордината точки A:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Варьируя, находим

$$\delta y = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\delta x = \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h}\delta x.$$

Составляем уравнение работ

$$F\delta x \pm F_{\text{тр}}\,\delta x - m_2 g\,\delta y = 0\,,$$

откуда

$$\mp F_{\text{тр}} = F - m_2 g\frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h}.$$

Учитывая неравенство (8), получаем

$$\left| F - m_2 g\frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} \right| \le f\left(m_1 + m_2\right)g.$$

Система может находиться в равновесии, если модуль силы F лежит в области

$$m_2 g\frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} - f\left(m_1 + m_2\right)g \le F \le m_2 g\frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} + f\left(m_1 + m_2\right)g.$$

3.2. Определение параметров, определяющих положение равновесия системы, при заданных силах, действующих на систему

Пример 1

Два однородных стержня: OA – длиной L, весом $\overline{P}_1 = \overline{P}$ и AC длиной $2L$, весом $\overline{P}_2 = 2\overline{P}$ соединены шарниром A. Стержень OA укреплен шарнирно концом O, а стержень AC опирается на острие B (рис. 4). Определить, при каком угле φ система находится в равновесии в вертикальной плоскости, если расстояние $OB = L$ (отрезок OB горизонтальный).

Р е ш е н и е

Система имеет одну степень свободы, положение системы определяется углом φ. Легко подсчитать, что стержень OC будет образовывать с горизонталью угол 2φ. Принцип возможных перемещений в аналитической форме дает уравнение работ в виде

$$P_1\,\delta y_1 + P_2\,\delta y_2 = 0, \tag{9}$$

где y_1, y_2 – ординаты точек приложения активных сил $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$.

Находим значения этих ординат:

$$y_1 = {}^1/_2\, L\,\sin 2\varphi, \quad y_2 = L(\sin 2\varphi - \sin\varphi).$$

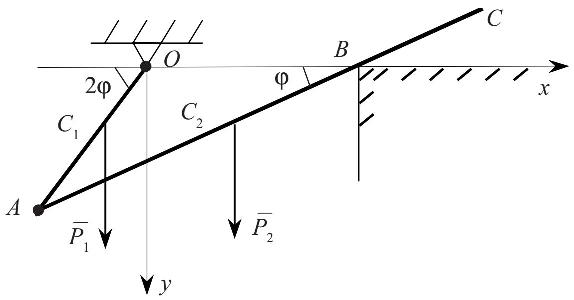

Рис. 4

Вариации ординат:

$$\delta y_1 = L\,\cos 2\varphi\,\delta\varphi\,,\ \delta y_2 = L\,(2\cos 2\varphi - \cos\varphi)\,\delta\varphi.$$

После подстановки в (9), учитывая, что $P_1 = P$, $P_2 = 2P$, получим уравнение для определения угла φ:

$$5\cos 2\varphi - 2\cos\varphi = 0$$

или после преобразований

$$\cos^2\varphi - 0{,}2\,\cos\varphi - 0{,}5 = 0,$$

откуда находим

$$\varphi = \arccos\frac{1 + \sqrt{51}}{10}.$$

Примечание

При пользовании принципом виртуальных перемещений в аналитической форме нужно иметь в виду следующее:

• При составлении уравнения работ не нужно заботиться о знаке работ действующих сил при возможных перемещениях: знаки получаются автоматически после дифференцирования координат и подстановки значений проекций сил.

• При выборе системы координатных осей надо следить за тем, чтобы при возможных перемещениях координатная система оставалась неподвижной, иначе не получатся работы сил в абсолютном движении.

Пример 2

Однородный тяжелый брусок AB опирается концом A на вертикальную стену, а за конец B удерживается нитью BC, укрепленной в точке C той же стены (рис. 5). Найти зависимость между углами φ и ψ, образуемыми при равновесии с вертикалью соответственно бруском и нитью.

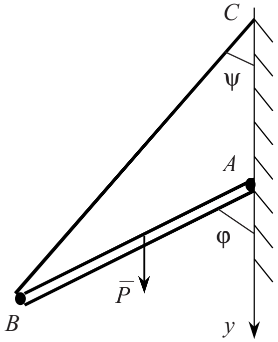

Рис. 5

Решение

Пусть $AB = 2a$, $BC = l$, вес стержня $\overline{P}$. Направим ось y по вертикали вниз из точки C. Уравнение, выражающее принцип виртуальных перемещений, имеет вид

$$P\,\delta y = 0,$$

где $y = l\cos\psi - a\cos\varphi$, и следовательно, так как $P \neq 0$,

$$\delta y = a\sin\varphi\,\delta\varphi - l\sin\psi\,\delta\psi = 0.$$

Таким образом, в положении равновесия должно иметь место равенство

$$a\sin\varphi\,\delta\varphi = l\sin\psi\,\delta\psi. \qquad (10)$$

Система имеет одну степень свободы, в качестве параметра, определяющего положение системы, можно взять один из этих углов – φ или ψ. Соотношение, связывающее эти углы, можно получить, например, применяя к треугольнику ABC теорему синусов:

$$\frac{2a}{\sin\psi} = \frac{l}{\sin(\pi-\varphi)}, \quad \text{или } 2a\sin\varphi = l\sin\psi,$$

после варьирования которого получаем

$$l\cos\psi\,\delta\psi = 2a\cos\varphi\,\delta\varphi. \qquad (11)$$

Разделив почленно (10) и (11), получим

$$\frac{a\sin\varphi\delta\varphi}{2a\cos\varphi\delta\varphi} = \frac{l\sin\psi\delta\psi}{l\cos\psi\delta\psi}, \ {}^1/_2\,\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\psi.$$

Это и есть искомое соотношение между углами φ и ψ при равновесии, сами значения углов φ и ψ можно получить решая полученное уравнение совместно с уравнением

$$l\sin\psi = 2a\sin\varphi\,,$$

устанавливающим связь между этими углами φ и ψ.

Пример 3

Три однородных бруска C длины a, CD и DB длины $2a$ каждый соединены шарнирами, и концы A и B их подвешены на шарнирах к горизонтальной прямой $AB = 3a$ (рис. 6). Определить зависимость между углами α, β, γ при равновесии, если веса брусков пропорциональны их длинам.

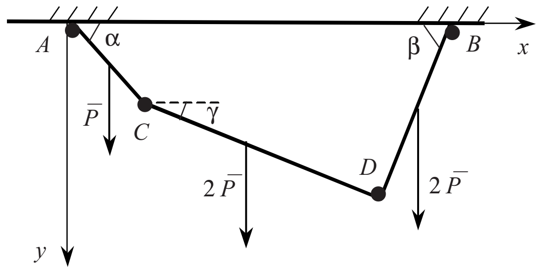

Рис. 6

Решение

Если $\overline{P}$ и $2\overline{P}$ будут соответственно веса бруска AC и каждого из брусков CD и DB, то уравнение работ будет иметь вид

$$P\,\delta y_1 + 2P\,\delta y_2 + 2P\,\delta y_3 = 0,$$

где y_1, y_2, y_3 – отсчитываемые от AB ординаты середин брусков AC, CD, DB. Иначе, сокращая P, получаем

$$\delta(0{,}5a\sin\alpha) + 2\delta(a\sin\alpha + a\sin\gamma) + 2\delta(a\sin\beta) = 0,$$

откуда

$${}^5/_2\cos\alpha\,\delta\alpha + 2\cos\beta\,\delta\beta + 2\cos\gamma\,\delta\gamma = 0. \qquad (12)$$

Параметры α, β, γ связаны соотношениями

$$a\cos\alpha + 2a\cos\gamma + 2a\cos\beta = 3a,$$
$$a\sin\alpha + 2a\sin\gamma = 2a\sin\beta.$$

Варьированием получаем соотношения, которым удовлетворяют вариации δα, δβ, δγ:

$$\sin\alpha\,\delta\alpha + 2\sin\beta\,\delta\beta + 2\sin\gamma\,\delta\gamma = 0, \quad (13)$$
$$\cos\alpha\,\delta\alpha - 2\cos\beta\,\delta\beta + 2\cos\gamma\,\delta\gamma = 0. \quad (14)$$

Итак, мы имеем три линейных однородных уравнения (12), (13), (14) относительно δα, δβ, δγ. Для совместности этих уравнений необходимо, чтобы равнялся нулю детерминант, составленный из коэффициентов при δα, δβ, δγ:

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{2}\cos\alpha, & 2\cos\beta, & 2\cos\gamma \\ \sin\alpha, & \sin\beta, & 2\sin\gamma \\ \cos\alpha, & -2\cos\beta, & 2\cos\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

В раскрытом виде получаем

$5\cos\alpha\sin(\beta + \gamma) = 2\cos\beta\sin(\alpha - \gamma) + 2\cos\alpha\sin(\alpha + \beta)$.

Это соотношение дает искомую зависимость между углами α, β, γ при равновесии.

Примечание

В задачах 2 и 3 этого раздела, система обладает одной степенью свободы, однако для решения задач целесообразно пользоваться несколькими параметрами, связывая их определенными соотношениями.

Пример 4

Однородный стержень OA весом $\overline{P}_1$ может вращаться вокруг шарнира O в вертикальной плоскости. Конец A этого стержня соединен шарнирно с другим однородным стержнем AB весом $\overline{P}_2$. К концу B второго стержня приложена сила $\overline{F}$ (рис. 7). Найти углы α и β, образуемые стержнями с горизонталью при равновесии.

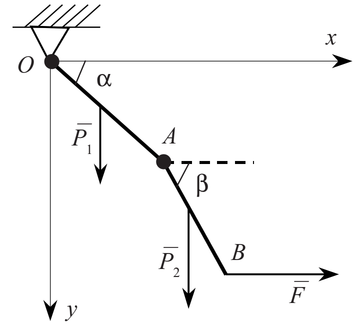

Рис. 7

Решение

Система обладает двумя степенями свободы, поскольку параметры α и β могут быть изменены независимо один от другого.

Рассмотрим сначала такое перемещение системы, при котором изменяется только параметр β и не изменяется α (то есть δα = 0, δβ ≠ 0). Если система находится в равновесии, то по принципу виртуальных перемещений работа активных сил, действующих на систему, при таком перемещении должна быть равна нулю:

$$P_2\, {}^1\!/_2\, AB\cos\beta\,\delta\beta + F\,AB\cos(90 + \beta)\,\delta\beta = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{P_2}{2F}. \quad (15)$$

Рассмотрим далее перемещение системы, при котором изменяется угол α, но не изменяется угол β (то есть δα ≠ 0, δβ = 0), подсчитаем работу сил на этом перемещении. Стержень AB при таком перемещении движется поступательно, поэтому будем иметь

$$P_1\, {}^1\!/_2\, OA\cos\alpha\,\delta\alpha + P_2\,OA\cos\alpha\,\delta\alpha + F\,OA\cos(90 + \alpha)\,\delta\alpha = 0$$

или

$${}^1\!/_2\,(P_1\cos\alpha + 2P_2\cos\alpha - 2F\sin\alpha)\,OA\,\delta\alpha = 0.$$

Откуда получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_1 + 2P_2}{2F}. \quad (16)$$

Соотношения (15), (16) определяют значения углов α и β при равновесии.

Пример 5

В полый цилиндр радиуса R, лежащий на горизонтальной плоскости, вложен массивный цилиндр радиуса r и веса $\overline{P}$; к последнему цилиндру приложена действующая в плоскости чертежа пара сил с моментом M. На полый цилиндр намотана нить, несущая на свободном конце груз веса $\overline{Q}$ (рис. 8).

Полагая поверхности цилиндров достаточно шероховатыми, для того чтобы скольжение исключалось, и пренебрегая весом полого цилиндра найти положение равновесия системы.

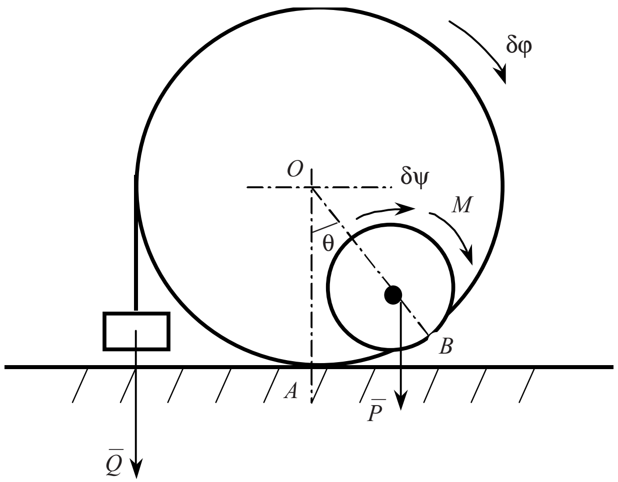

Рис. 8

Р е ш е н и е

Система обладает двумя степенями свободы, что соответствует двум независимым возможным перемещениям, именно всю систему можно вращать на бесконечно малый угол $\delta\varphi$ вокруг мгновенного центра скоростей полого цилиндра A, а также, удерживая полый цилиндр неподвижным, вращать внутренний цилиндр на угол $\delta\psi$ около мгновенного центра B.

Пусть θ – угол AOB в положении равновесия. Сначала, удерживая внутренний цилиндр неподвижным внутри полого, повернем всю систему на угол $\delta\varphi$ около точки A. Уравнение работ при этом перемещении будет

$$-Q\,R\,\delta\varphi + P\,(R - r)\sin\theta\,\delta\varphi + M\,\delta\varphi = 0,$$

откуда, приравнивая нулю коэффициент при $\delta\varphi$, находим

$$\sin\theta = \frac{QR - M}{P(R - r)}. \qquad (17)$$

Теперь, удерживая полый цилиндр неподвижным, дадим внутреннему цилиндру вращательное перемещение на угол $\delta\psi$ около мгновенного центра B; уравнение работ при этом будет

$$M\,\delta\psi - P\,r\sin\theta\,\delta\psi = 0,$$

откуда

$$\sin\theta = \frac{M}{P\cdot r}. \qquad (18)$$

Получили два значения угла θ, положение равновесия системы возможно, если оба значения $\sin\theta$ одинаковы, то есть

$$\frac{QR - M}{P(R - r)} = \frac{M}{Pr}.$$

После очевидных преобразований, получаем $M = Qr$. Подставив это значение M в формулу (17) для $\sin\theta$, находим

$$\sin\theta = \frac{Q}{P},$$

причем положение равновесия возможно, если

$$M = Qr.$$

3.3. Определение реакций связей

Принцип виртуальных перемещений можно применять для нахождения реакций связей, для этого следует, применяя закон освобождаемости от связей, отбросить соответствующую связь и заменить ее искомой реакцией. При составлении уравнения равновесия надо к активным силам добавить эту реакцию связи. Из составленного уравнения равновесия определяется искомая реакция связи.

Пример 1

Четыре одинаковых стержня веса $\overline{P}$ и длины L образуют в вертикальной плоскости шарнирный ромб $ABCD$, в котором стержень AB закреплен неподвижно в горизонтальном положении. Шарниры B и C соединены шнуром (рис. 9). Определить натяжение T этого шнура.

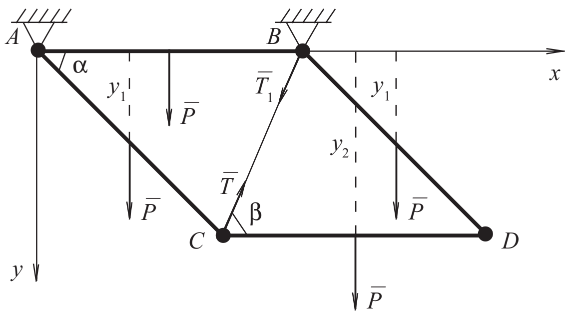

Рис. 9

Р е ш е н и е

Для определения натяжения шнура BC отбросим шнур и заменим его действие двумя силами $\overline{T}$ и $\overline{T}_1$ $\left(\overline{T} = -\overline{T}_1\right)$. Силы направлены от узла, считаем шнур растянутым. Тогда стержень AC получает возможность вращаться около точки A, при этом стержень AB своего положения не изменяет, поэтому сила $\overline{T}_1$, приложенная в точке B, работы не совершает и уравнение работ запишется в виде

$$2P\,\delta y_1 + P\,\delta y_2 + T_x\,\delta x_C + T_y\,\delta y_C = 0, \tag{19}$$

где x_C, y_C – координаты точки C; y_1, y_2 – ординаты точек приложения сил веса стержней.

Из чертежа находим:

$$y_1 = {}^1/_2\,L\sin\alpha, \qquad y_2 = L\sin\alpha,$$
$$x_C = L\cos\alpha, \qquad y_C = L\sin\alpha.$$

Варьируя эти соотношения, получаем:

$$\delta y_1 = {}^1/_2\,L\cos\alpha\,\delta\alpha, \quad \delta y_2 = L\cos\alpha\,\delta\alpha,$$
$$\delta x_C = -\,L\sin\alpha\,\delta\alpha, \quad \delta y_2 = L\cos\alpha\,\delta\alpha.$$

Находим проекции силы T на оси x, y:

$$T_x = T\cos\beta, \qquad T_y = -T\sin\beta, \qquad \beta = {}^1/_2\,(\pi - \alpha),$$
$$T_x = T\sin{}^1/_2\,\alpha, \qquad T_y = -T\cos{}^1/_2\,\alpha.$$

Подставив эти выражения в уравнение работ (19), получим

$$2P\cos\alpha - T\,(\sin\alpha\sin{}^1/_2\,\alpha + \cos\alpha\cos{}^1/_2\,\alpha) = 0,$$

откуда

$$T = \frac{2P\cos\alpha}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Пример 2

Тяжелая упругая лента в виде окружности весом $\overline{P}$ надета в горизонтальном положении на прямой гладкий конус с вертикальной осью и углом при вершине 2α (рис. 10). Радиус ленты в ненапряженном состоянии равен a. Найти положение равновесия ленты на конусе и силу упругости $\overline{T}$ ленты, считая ее пропорциональной удлинению окружности ленты (коэффициент пропорциональности равен λ).

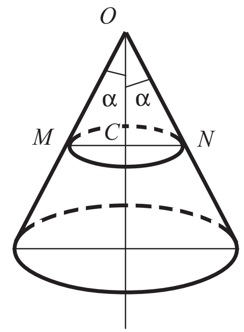

Рис. 10

Р е ш е н и е

Пусть MN – положение равновесия ленты, когда ее радиус равен x. Разрежем ленту и приложим в месте разреза две силы упругости $\overline{T}$:

$$T = 2\pi\,(x - a)\,\lambda\,.$$

Если мы опустим ленту ниже, так что радиус ее возрастет на δx, то лента при этом опустится по вертикали вниз на δz, равное

$$\delta z = \delta x\,\mathrm{ctg}\alpha\,.$$

Уравнение, выражающее принцип виртуальных перемещений, запишется в виде

$$P\,\delta z - T\,2\pi\,\delta x = 0\,,$$

после подстановки значений T и δz будем иметь

$$P\ \mathrm{ctg}\alpha - \lambda\ 2\pi\ (x - a)\ 2\pi = 0\ ,$$

откуда

$$x = a + \frac{P\mathrm{ctg}\alpha}{\lambda 4\pi^2}.$$

Зная радиус x положения равновесия, определим расстояние плоскости окружности ленты от вершины конуса

$$OC = x\mathrm{ctg}\alpha = a\mathrm{ctg}\alpha + \frac{P\mathrm{ctg}^2\alpha}{\lambda 4\pi^2}$$

и силу упругости T ленты

$$T = \frac{P\mathrm{ctg}\alpha}{2\pi}.$$

Пример 3

Две балки BC и CD шарнирно соединены в точке C, прикреплены цилиндрическим шарниром B к вертикальной стойке AB, защемленной в сечении A, и цилиндрическим шарниром D соединены с полом. К балкам приложены горизонтальные силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ (рис. 11). Определить реакцию в защемленном сечении A, $P_1 = 2kH$, $P_2 = 4kH$, $a = 4$ м, $h = 2$ м.

Р е ш е н и е

Для определения горизонтальной составляющей реакции в защемленном сечении A заменим заделку на ползун A в горизонтальных направляющих, к которому жестко прикреплена стойка AB, и приложим реакцию $\overline{X}_A$ (рис. 12).

Сообщим конструкции возможное перемещение стойки AB вместе с ползуном A на δx вправо, при этом все точки балки BC поступательно переместятся в том же направлении на δx, а балка CD повернется на угол $\delta\varphi = \delta x/2h$ вокруг точки D.

Составим уравнение работ

$$X_A\delta x + P_1\delta x + P_2 h\frac{\delta x}{2h} = 0,$$

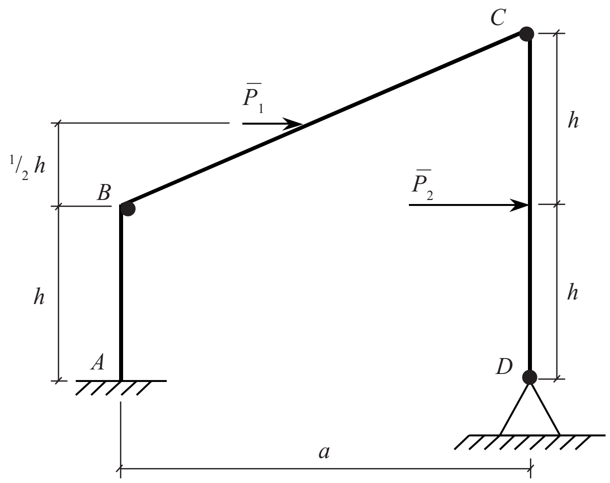

Рис. 11

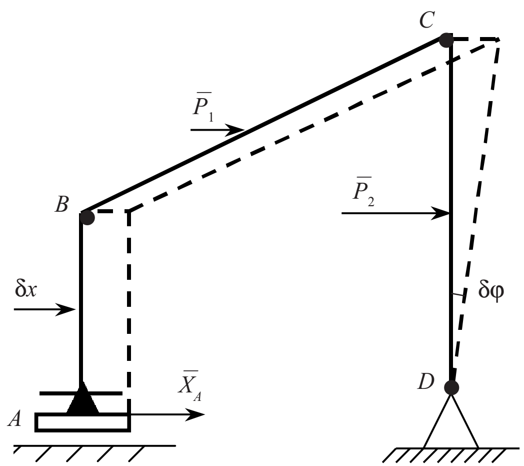

Рис. 12

отсюда

$$X_A = -(P_1 + {}^1/_2\, P_2) = -4\ kH.$$

Для определения вертикальной составляющей $\overline{Y}_A$ реакции заделки отбросим связь, препятствующую вертикальному перемещению стойки *AB*, заменив заделку ползуном *A* в вертикальных направляющих, к которому жестко прикреплена стойка *AB*, и приложим реакцию $\overline{Y}_A$ (рис. 13).

Возможное перемещение в этом случае: поступательное перемещение стойки *AB* вместе с ползуном *A* вверх на δy, балка *CD* может поворачиваться вокруг точки *D*, поэтому, зная направления возможных перемещений точек *B* и *C* балки *BC*, найдем мгновенный центр вращения балки *BC* – точку *O*. Значит, балка *BC* повернется вокруг точки *O* на угол

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta y}{a},$$

а балка *CD* повернется вокруг точки *D* на угол

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta y h}{a 2h} = \frac{\delta y}{2a}.$$

Составим уравнение работ

$$Y_A \delta y + P_1 \frac{h\delta y}{2a} + P_2 h \frac{\delta y}{2a} = 0,$$

откуда

$$Y_A = -\left(P_1 \frac{h}{2a} + P_2 \frac{h}{2a}\right) = -1{,}5 kH.$$

Для определения момента M_A реактивной пары (рис. 14), возникающей в заделке *A* стойки *AB,* отбросим связь, препятствующую повороту стойки *AB,* заменив заделку шарнирно неподвижной опорой, и приложим момент M_A.

Сообщаем конструкции возможное перемещение: стойку *AB* повернем на угол $\delta\varphi$ вокруг точки *A,* балка *BC* совершит поступательное перемещение $\delta s = h\ \delta\varphi$, а балка *CD* повернется вокруг точки *D* на угол ${}^1/_2\ \delta\varphi$.

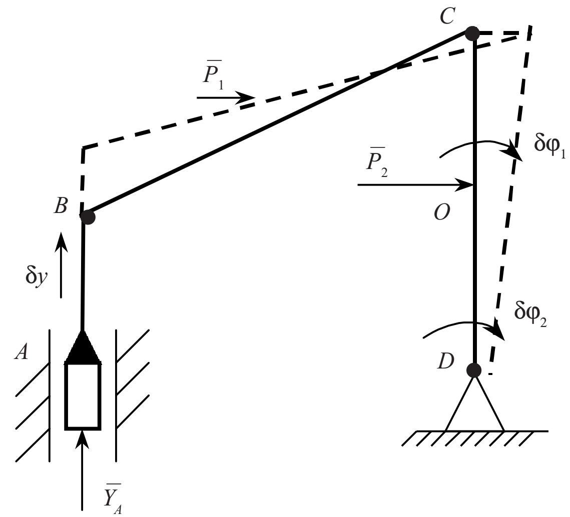

Рис. 13

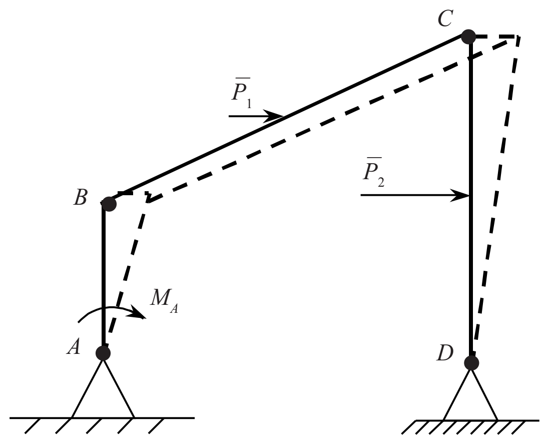

Рис. 14

Составим уравнение работ

$$M_A\ \delta\varphi + P_1\ \delta\varphi + P_2\ h\ {}^1/_2\ \delta\varphi = 0,$$

отсюда

$$M_A = -\ (P_1 + {}^1/_2P_2)\ h = -8\ kH.$$

Знак минус в этих соотношениях означает, что соответствующая реакция имеет направление, противоположное изображенному на рисунке.

3.4. Решение задач на безразличное равновесие

Пример 1

Тяжелый однородный стержень AB длины $2l$ одним концом опирается на вертикальную стену BD, а другим – на неподвижную кривую DE. Стержень остается в вертикальной плоскости (рис. 15). Какова должна быть форма кривой DE, чтобы стержень был в равновесии в любом положении?

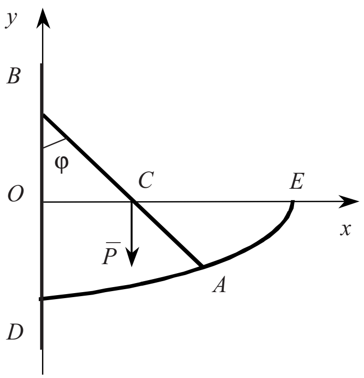

Рис. 15

Решение

Единственная активная сила, действующая на стержень, это сила веса $\overline{P}$, поэтому уравнение возможных работ имеет вид

$$mg\ \delta y_C = 0,\ \delta y_C = 0,$$

где y_C – ордината центра масс стержня.

Так как равновесие стержня безразличное, то уравнение имеет место при всех значениях y_C, откуда, интегрируя, получаем: $y_C = c$, то есть ордината центра масс должна оставаться постоянной. Проведем систему координат xOy так, чтобы ось x проходила в горизонтальном направлении через точку C, тогда координаты точки A

$$x_A = 2l\ \sin\varphi,\ y_A = -\ l\ \cos\varphi,$$

откуда, исключая φ, получим

$$\frac{x_A^2}{4l^2} + \frac{y_A^2}{l^2} = 1.$$

Итак, кривая DE есть дуга эллипса, уравнение которого в выбранной системе координат имеет указанный вид.

Пример 2

Однородный стержень AB шарнирно вращается около точки A, а другой его конец B привязан к нити, перекинутой через блок C. К концу нити прикреплен груз весом $\overline{Q}$. Блок C размещен на вертикали, проходящей через шарнир A, $AC = AB = b$ (рис. 16). Длина l нити равна $2b$, вес стержня равен $\overline{P} = 2\overline{Q}$. Найти кривую, на которой груз Q во всех положениях будет в равновесии.

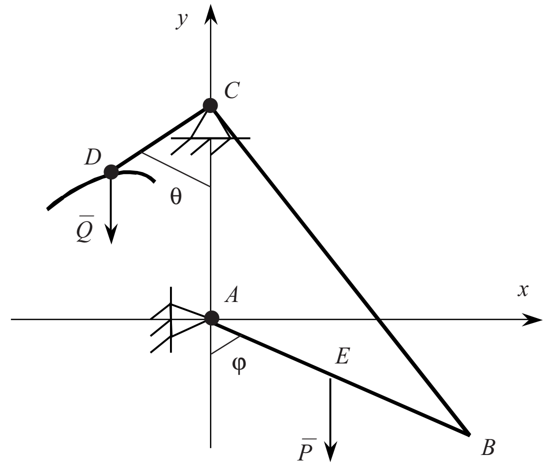

Рис. 16

Решение

Уравнение возможных работ имеет вид

$$-Q\ \delta y_1 - P\ \delta y_2 = 0,$$

где y_1 и y_2 – соответственно ординаты точек D и E приложения сил Q и P. Так как это уравнение имеет место при всех значениях

y_1 и y_2 (равновесие безразличное), то его можно интегрировать. Получим

$$Q\,y_1 + P\,y_2 = C. \qquad (20)$$

Если предположить, что в начальном положении точки D и E находятся на одной вертикали, причем груз Q находится в точке C, поскольку длина нити $l = 2b$, то в этом положении $y_1 = b$, $y_2 = -{}^1/_2\, b$, подставляя эти значения и $P = 2Q$ в уравнение (20), получим

$$Q\,b - 2Q\,{}^1/_2\,b = C,$$

откуда $C = 0$. Значит

$$Q\,y_1 + P\,y_2 = 0. \qquad (21)$$

Центр тяжести обоих грузов в выбранной системе координат имеет ординату

$$y_C = \frac{Qy_1 + Py_2}{Q + P} = 0.$$

Таким образом, центр тяжести обоих грузов будет все время оставаться на оси x.

Обозначим длину части нити CD через r и введем угол θ, между этой частью нити и вертикалью, интеграл уравнения работ (21) принимает вид

$$Q(b - r\cos\theta) = P\,{}^1/_2\,b\cos\varphi$$

или, полагая $P = 2Q$, $\cos\varphi = 2\cos^2 {}^1/_2\varphi - 1$, получим

$$b - r\cos\varphi = b\,(2\cos^2 {}^1/_2\varphi - 1). \qquad (22)$$

Из геометрических условий имеем

$$r = 2b - 2b\sin{}^1/_2\,(\pi - \varphi) = 2b\,(1 - \cos{}^1/_2\varphi),$$

откуда

$$\cos\frac{1}{2}\varphi = \frac{2b - r}{2b}.$$

Подставив это значение в интеграл уравнения работ (22) получим

$$b - r\cos\theta = \frac{1}{2b}\left[(2b - r)^2 - 2b^2\right],$$

$$2b^2 - 2b\,r\cos\theta = 4b^2 - 4b\,r + r^2 - 2b^2,$$

откуда

$$r = 4b - 2b\cos\theta$$

или

$$r = l\,(2 - \cos\theta).$$

Нашли полярное уравнение кривой, по которой должен двигаться груз Q.

3.5. Решение задач при наличии освобождающих связей

Принцип виртуальных перемещений для систем с освобождающими связями формулируют так: *при равновесии сумма элементарных работ всех активных сил на возможных перемещениях, выводящих систему из положения равновесия, должна быть равна или меньше нуля:*

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = \delta\pi,$$

где $\theta\pi$ равно или меньше нуля.

Для нахождения положений равновесия механической системы с освобождающими связями чаще всего применяют аналитический способ с применением неопределенных множителей Лагранжа.

Рассмотрим этот способ для случая одной точки, находящейся под действием активной силы F с координатами X, Y, Z, и связи, заданной в виде

$$f(x, y, z) = c, \qquad (23)$$

где c может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от того, в какую сторону от поверхности возможно освобождающее перемещение ($\delta c > 0$, если от начала координат, и $\delta c < 0$, если к началу координат). Дифференцируя уравнение связи (23), получаем зависимость между возможными перемещениями:

$$\frac{\delta f}{\delta x}\delta x + \frac{\delta f}{\delta y}\delta y + \frac{\delta f}{\delta z}\delta z = \delta c, \qquad (24)$$

где δc – некоторая неопределенная, но имеющая определенный знак, величина.

Умножаем уравнение (24) на неопределенный множитель λ и складываем его с уравнением, выражающим принцип виртуальных перемещений:

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = \delta\pi, \qquad (25)$$

где $\delta\pi$ равно или меньше нуля. Получим

$$\left(X + \lambda\frac{\delta f}{\delta x}\right)\delta x + \left(Y + \lambda\frac{\delta f}{\delta y}\right)\delta y + \left(Z + \lambda\frac{\delta f}{\delta z}\right)\delta z = \delta\pi + \lambda\delta c.$$

Выберем λ так, чтобы

$$X + \lambda\frac{\delta f}{\delta x} = 0,$$

тогда в силу произвольности δy и δz для неосвобождающих перемещений будем иметь

$$Y + \lambda\frac{\delta f}{\delta y} = 0, \quad Z + \lambda\frac{\delta f}{\delta z} = 0,$$

после чего уравнение принимает вид

$$\delta\pi + \lambda\,\delta c = 0.$$

Так как $\delta\pi \le 0$, то произведение $\lambda\delta c$ должно быть больше или равно нулю, следовательно знак множителя λ должен быть одинаков со знаком δc. При таких λ определяются искомые положения равновесия.

Пример 1

Материальная точка M веса $\overline{P}$ находится внутри конуса с вертикальной осью, заданной уравнением

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 = 0.$$

Точка отталкивается от вершины конуса силой, численно равной $F = kr$, где r – расстояние точки от вершины конуса (рис. 17). Найти положения равновесия и давление точки на поверхность.

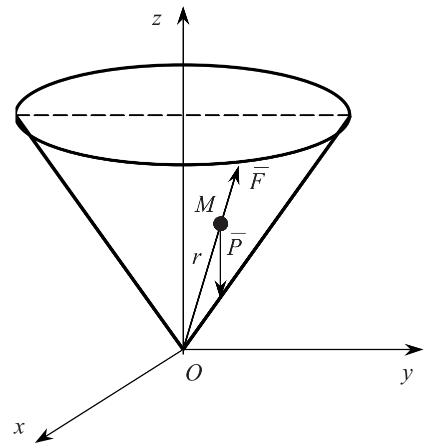

Рис. 17

Р е ш е н и е

Проекции на координатные оси силы, действующей на точку:

$$X = kx,\ Y = ky,\ Z = kz - P.$$

Уравнение работ (25) записывается в виде

$$kx\,\delta x + ky\,\delta y + (kz - P)\delta z = \delta\pi, \qquad (26)$$

где $\delta\pi \le 0$, δx, δy, δz удовлетворяют уравнению, получаемому варьированием уравнения связи:

$$2x\,\delta x + 8y\,\delta y - 8z\,\delta z = \delta c, \qquad (27)$$

где $\delta c \le 0$, так как точка может сходить с поверхности конуса внутрь.

Уравнения Лагранжа с неопределенным множителем λ будут

$$kx + \lambda\, 2x = 0,\ \ ky + \lambda\, 8y = 0,\ \ kz - P - \lambda\, 8z = 0.$$

Решая эти уравнения совместно с уравнением связи (27), находим следующие возможные системы решений:

1. $x = 0,\ \lambda = -\dfrac{k}{8},\ \ z = \dfrac{P}{2k},\ \ y = \pm\dfrac{P}{2k}.$

2. $x \neq 0,\ \lambda = -\dfrac{k}{2},\ \ z = \dfrac{P}{5k},\ y = 0,\ x = \pm\dfrac{2P}{5k}.$

3. $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ \lambda = -\infty.$

Так как λ должно быть отрицательным, то в первых двух случаях найденные четыре положения равновесия будут иметь место. Давление на поверхность найдется по формуле

$$N = \lambda\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)^2},$$

по которой для первой пары решений:

$$N_1 = \frac{k}{8}\sqrt{4x^2 + 64y^2 + 64z^2} = \frac{P}{2}\sqrt{2},$$

для второй пары решений:

$$N_2 = \frac{k}{2}\frac{2P}{5k}\sqrt{4 + 64\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}P\sqrt{5}.$$

В третьем случае давление $N_3 = P$.

Пример 2

Тело, имеющее полость в виде трехосного эллипсоида с полуосями a, b, c вращается равномерно вокруг оси z с угловой скоростью ω. Внутри полости находится тяжелая точка, масса которой равна единице (рис. 18). Найти положения относительного равновесия точки.

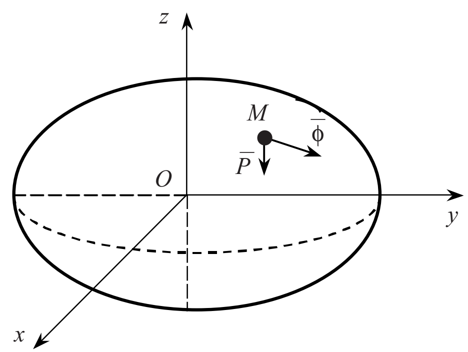

Рис. 18

Р е ш е н и е

На точку M действует сила веса $\overline{P}$, и так как ищем положения ее относительного равновесия, вводим силу инерции $\overline{\phi}$ этой точки. Эллипсоид равномерно вращается вокруг оси z поэтому ускорение точки при ее вращении вместе с эллипсоидом сводится к центростремительному ускорению.

Вектор силы инерции точки имеет проекции

$$\overline{\phi}\left(\frac{P}{g}\omega^2 x, \frac{P}{g}\omega^2 y, 0\right).$$

Уравнение работ имеет вид

$$\omega^2 x\,\delta x + \omega^2 y\,\delta y - g\,\delta z = \delta\pi,$$

где $\delta\pi \le 0$.

Уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{28}$$

и так как точка может сходить с поверхности эллипсоида внутрь, то возможные перемещения точки удовлетворяют уравнению

$$\frac{2x}{a^2}\delta x + \frac{2y}{b^2}\delta y + \frac{2z}{c^2}\delta z = \delta c,$$

где $\delta c \le 0$.

Система уравнений с неопределенным множителем λ будет иметь вид

$$\omega^2 x + \lambda \frac{2x}{a^2} = 0, \tag{29}$$

$$\omega^2 y + \lambda \frac{2y}{b^2} = 0, \tag{30}$$

$$-g + \lambda \frac{2z}{c^2} = 0. \tag{31}$$

Уравнения (29) и (30) дают две пары решений:

1) $x = 0,\ \lambda_1 = -\dfrac{\omega^2 b^2}{2}$,

2) $y = 0,\ \lambda_2 = -\dfrac{\omega^2 a^2}{2}$.

Так как значения λ отрицательны, то эти решения сохраняются и при освобождающих перемещениях. Им будут соответствовать следующие четыре положения равновесия:

$$x = 0,\ z = -\frac{gc^2}{\omega^2 b^2}, \qquad y = \pm\frac{\sqrt{\omega^4 b^4 - c^4 g^4}}{\omega^2 b},$$

$$y = 0,\ z = -\frac{gc^2}{\omega^2 a^2}, \qquad x = \pm\frac{\sqrt{\omega^4 a^4 - c^2 g^2}}{\omega^2 a}.$$

Кроме того, уравнение (31) дает

$$\lambda_3 = \frac{gc^2}{2z}. \tag{32}$$

Значение (32) может удовлетворять уравнениям (29) и (30) только при $x = y = 0$. В таком случае после подстановки этих значений в уравнение эллипсоида (28), получаем

$$z = \pm c.$$

Так как λ должно быть отрицательным, то для освобождающих перемещений мы должны взять

$$z = -c.$$

Таким образом, найдено еще одно, пятое, положение относительного равновесия $x = 0,\ y = 0,\ z = -c$.

Список использованной литературы

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. М.: Наука, 1968.

Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. М.: Наука, 1972.

Теоретическая механика во втузах / Под ред. проф. А. А. Яблонского. М.: Высш. шк., 1975.

Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1986.

Веселовский И. Н. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1955.

Айзенберг Т. Б., Воронков И. М., Осецкий В. М. Руководство к решению задач по теоретической механике. М.: Высш. шк., 1968.

У ч е б н о е   и з д а н и е

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Методические указания
для студентов математико-механического факультета
специализации «Механика»

Составитель Желонкина Нина Ивановна

Редактор и корректор М. А. Овечкина
Компьютерная верстка Н. В. Комардиной

Лицензия ИД № 05974 от 03.10.2001. Подписано в печать 30.12.2002.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 2,0. Усл. печ. л. 2,09. Тираж 75 экз. Заказ .

Издательство Уральского университета. 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

Отпечатано в ИПЦ «Издательство УрГУ». 620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.