Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов, К решению неоднородных уравнений в частных производных с правой частью, заданной на сетке, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2021, том 31, выпуск 3, 443–457

DOI: https://doi.org/10.35634/vm210307

МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 443–457.

УДК 517.977

© *Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов*

К РЕШЕНИЮ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ, ЗАДАННОЙ НА СЕТКЕ

Предлагается алгоритм получения решения уравнений в частных производных с правой частью, заданной на сетке $\{(x_1)_\mu, (x_2)_\mu, \ldots, (x_n)_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots, N)$: $f_\mu = f((x_1)_\mu, (x_2)_\mu, \ldots, (x_n)_\mu)$. Здесь n — число независимых переменных в исходном уравнении в частных производных, N — число строк в сетке для правой части, $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — правая часть исходного уравнения. Алгоритм реализует редукцию исходного уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (системе ОДУ) с начальными условиями в каждой точке сетки и включает следующую последовательность действий. Ищется решение исходного уравнения, зависящее от одной независимой переменной. Исходному уравнению ставится в соответствие некоторая система соотношений, содержащая произвольные функции и включающая уравнение в частных производных первого порядка. Для уравнения первого порядка выписывается расширенная система уравнений характеристик. Присоединяя к ней остальные соотношения, содержащие произвольные функции, и требуя, чтобы эти соотношения были первыми интегралами расширенной системы уравнений характеристик, приходим к искомой системе ОДУ, завершая редукцию. Предлагаемый алгоритм позволяет в каждой точке сетки находить решение исходного уравнения в частных производных, удовлетворяющее заданным начальным и краевым условиям. Алгоритм применяется для получения решений уравнения Пуассона и уравнения нестационарной осесимметричной фильтрации в точках сетки, на которой заданы правые части соответствующих уравнений.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, решение начальных и краевых задач, расширенная система уравнений характеристик, редукция уравнений в частных производных к системам ОДУ.

DOI: 10.35634/vm210307

Введение

Авторы статьи развивают метод редукции нелинейных уравнений в частных производных к системам ОДУ, который позволяет получать точные решения исходных уравнений и решать некоторые начальные, краевые задачи, задачи о примыкании течений разного типа (см., например, [1]). В ряде статей авторов этот метод применялся для решения различных задач, когда исходное уравнение в частных производных — однородное. В статье [2] предложены некоторые подходы к применению этого метода для случая неоднородных уравнений в частных производных, когда правая часть в уравнении — известная функция. Оказалось, что в некоторых задачах (см., например, [3]) представляет интерес применение таких подходов в случае, когда правая часть уравнения в частных производных (линейного или нелинейного) задана на сетке. В предлагаемой работе эти возможности обсуждаются, проводится некоторое сопоставление предлагаемых подходов с известными широко используемыми сеточными методами.

Наиболее распространенными методами решения задач для дифференциальных уравнений в частных производных, использующих величины, заданные на сетке, являются:

— метод конечных объемов (см., например, [4]),

— метод конечных элементов (см., например, [5]),

— метод конечных разностей (см., например, [6]),

в которых дискретизация производится по всем независимым переменным, дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений сводится к системе алгебраических уравнений, а решение находится на множестве точек.

Другую группу методов образуют методы, в которых дифференциальное уравнение в частных производных сводится к семейству обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). К ним можно отнести

— различные варианты метода прямых (см., например, [7]), в которых дискретизируются все измерения, кроме одного;

— методы характеристик (см. [8]), когда приближенное решение дифференциального уравнения в частных производных ищется вдоль семейства характеристик, а соответствующее семейство ОДУ интегрируется численно или аналитически из некоторых исходных данных, заданных на подходящей гиперповерхности.

Предлагаемый в данной статье подход к решению неоднородных уравнений в частных производных с правой частью, заданной на сетке, наиболее тесно примыкает к методам прямых и характеристик. В нем решение так же, как и в методе прямых, сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). ОДУ рассматриваются вдоль характеристик. Но, в отличие от известного метода характеристик (см., например, [8]), в котором решение строится вдоль характеристик исходного уравнения или системы исходных уравнений, рассматриваются характеристики не исходного уравнения, а некоторого другого уравнения. При этом предполагается сначала, что решение исходного уравнения зависит от одной переменной, которая задает поверхность уровня решения. Затем выделяется уравнение в частных производных первого порядка, которому удовлетворяют функции, задающие поверхности уровня решений исходного уравнения. Это уравнение в частных производных первого порядка служит базовым уравнением для решения задачи сведения исходного уравнения к ОДУ. Рассматриваются характеристики именно базового уравнения. Если исходное уравнение не является однородным или не является неоднородным с известной правой частью, а правая часть известна только в точках некоторой сетки, то эти характеристики проводятся через точки сетки, на которой заданы правые части исходного уравнения. Такой подход применим к линейным и нелинейным уравнениям в частных производных, он не зависит от типа уравнения: смешанного, гиперболического, эллиптического или параболического. Кроме того, в полученных ОДУ имеется возможность задавать правую часть так, чтобы решение исходного уравнения в точках сетки, на которой известны правые части, выписывалось точно, без применения дополнительной дискретизации для решения ОДУ, к которому сводится исходное уравнение в частных производных. Нельзя, конечно, утверждать, что для любого исходного уравнения в частных производных можно получить ОДУ, решение которого не потребует дискретизации, но, как показано на приведенном примере, иногда это возможно.

Изложим алгоритм сведения уравнения в частных производных к системам ОДУ, начальные данные для которых выбираются в точках заданной сетки.

Пусть рассматриваемое нелинейное уравнение в частных производных имеет вид

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}, \ldots, u_{i_1 \ldots i_m}^{(m)}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{0.1}$$

где $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — независимые переменные, $u \in C^m$ — неизвестная функция (решение уравнения), $u_{i_1 i_2, \ldots, i_l}^{(l)}$ — частные производные функции u (верхний индекс указывает порядок производной, нижние индексы — номера независимых переменных, по которым берется производная), m — порядок уравнения.

В точках некоторой сетки $\{(x_1)_\mu, (x_2)_\mu, \dots, (x_n)_\mu\}$, $\mu = 1, \dots, N$, где N — число строк в сетке, задана функция $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$: $f_\mu = f((x_1)_\mu, (x_2)_\mu, \dots, (x_n)_\mu)$.

Полагаем, что $u = u(\psi)$, тогда $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathrm{const}$ — поверхность уровня функции u. Выписав производные сложной функции $u = u(\psi(x_1, x_2, \dots, x_n))$ и подставив полученные выражения частных производных в уравнение (0.1), получаем

$$\sum_{k=1}^{K} A_k(u, u', u'', \dots, u_\psi^{(m)}) B_k(x_i, \psi_i, \psi_{ij}, \dots, \psi_{i_1 i_2 \dots i_m}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$K \neq \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{0.2}$$

Здесь штрихом обозначены производные от u по ψ, нижние индексы указывают на номера независимых переменных, по которым вычисляются производные функции ψ, $u_\psi^{(m)} = \partial^m u / \partial \psi^m$, $B_{k_1} \not\equiv B_{k_2}$, если $k_1 \neq k_2$.

Поставим в соответствие (0.2) систему соотношений

$$\sum_{k=1}^{K} A_k(u, u', u'', \dots, u_\psi^{(m)}) g_k(\psi) = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$B_k(x_i, \psi_i, \psi_{ij}, \dots, \psi_{i_1 i_2 \dots i_m}) = g_k(\psi), \tag{0.3}$$

где $g_k(\psi)$ — пока произвольные функции.

В данной статье рассматривается случай, когда в системе (0.3) есть хотя бы одно соотношение B_k, которое зависит только от первых производных функции $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Не умаляя общности, можно считать, что $B_1 = B_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$. В первом соотношении системы (0.3) заменим правую часть функцией ψ или некоторой функцией $F(\psi)$, которые в точках сетки равны f_μ. Положим, что $g_1(\psi) = C$, $C = \mathrm{const} \neq 0$, и получим уравнение для определения $u = u(\psi)$

$$A_1(u, u', u'', \dots, u_\psi^{(m)}) C + \sum_{k=2}^{K} A_k(u, u', u'', \dots, u_\psi^{(m)}) g_k(\psi) = F(\psi). \tag{0.4}$$

Перейдем к определению функций $g_k(\psi)$, $k = 2, 3, \dots, K$. Выпишем систему уравнений характеристик для уравнения $B_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = C$. В [8] для произвольного уравнения в частных производных первого порядка приведены условия, при выполнении которых такая система уравнений позволяет получать решения исходного уравнения в частных производных первого порядка. В нашем случае исходное уравнение — уравнение $B_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = C$, и условий, когда система уравнений характеристик имеет решение (см. [8]) для наших целей достаточно. Дополним эту систему уравнениями, описывающими изменение вдоль характеристик производных порядка выше первого. Следует заметить, что эти уравнения являются дифференциальными следствиями системы уравнений характеристик для уравнения первого порядка в частных производных. Получим расширенную систему уравнений характеристик [1]. Потребуем, чтобы соотношения $B_k(x_i, \psi_i, \psi_{ij}, \dots, \psi_{i_1 i_2 \dots i_m}) = g_k(\psi)$, $k = 2, 3, \dots, K$, были первыми интегралами такой системы. Такое требование также не сужает класс решений системы уравнений характеристик. Эти решения используются для получения вида первоначально произвольных функций. Таким образом, выписана систему ОДУ для определения функций x_i, ψ, ψ_i, ψ_{ij}, $\dots$, $\psi_{i_1 i_2 \dots i_m}$, g_k, и, следовательно, вида левой части уравнения (0.4), который не зависит от того, является ли исходное уравнение в частных производных однородным или неоднородным. Здесь $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 2, 3, \ldots, K$. Через каждую точку $\{f_\mu, (x_1)_\mu, (x_2)_\mu, \ldots, (x_n)_\mu\}$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, проведем характеристику (решение расширенной системы уравнений характеристик) и будем рассматривать решение уравнения (0.4) вдоль характеристик. Определив из уравнения (0.4) $u = u(\psi)$ и задав ψ так, чтобы в точках сетки $F(\psi) = f_\mu$ или $\psi = f_\mu$, найдем $u = u_\mu$, где $u_\mu = u((x_1)_\mu, (x_2)_\mu, \ldots, (x_n)_\mu)$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$.

В статье описанный подход демонстрируется на уравнении Пуассона и неоднородном уравнении осесимметричной нестационарной фильтрации.

§ 1. Решение уравнения Пуассона в точках сетки

Рассмотрим уравнение Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z), \tag{1.1}$$

когда правая часть задана на сетке $\{x_\mu, y_\mu, z_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots, N)$: $f_\mu = f(x_\mu, y_\mu, z_\mu)$.

Полагая, что $u = u(\psi)$, $\psi = \psi(x, y, z)$, имеем $u_x = u'\psi_x$, $u_y = u'\psi_y$, $u_z = u'\psi_z$, $u_{xx} = u''\psi_x^2 + u'\psi_{xx}$, $u_{yy} = u''\psi_y^2 + u'\psi_{yy}$, $u_{zz} = u''\psi_z^2 + u'\psi_{zz}$. Здесь нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующим независимым переменным, штрих — дифференцирование по ψ. Подставив выписанные выражения в уравнение (1.1), получим

$$\begin{aligned} &u''B_1 + u'B_2 = f(x, y, z), \quad B_1 = \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 = C, \\ &B_2 = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} = g_2(\psi), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $C = \mathrm{const} \neq 0$, $g_2(\psi)$ — пока произвольная функция.

Рассмотрим два последних уравнения из (1.2).

Утверждение 1. *Существует такая функция $g_2(\psi)$, при которой система*

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 = C, \quad \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} = g_2(\psi) \quad \textit{имеет решение.}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для уравнения $\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 = C$ выпишем дифференциальные следствия

$$2\psi_x\psi_{xx} + 2\psi_y\psi_{yx} + 2\psi_z\psi_{zx} = 0, \quad 2\psi_x\psi_{xz} + 2\psi_y\psi_{yz} + 2\psi_z\psi_{zz} = 0,$$

$$2\psi_x\psi_{xy} + 2\psi_y\psi_{yy} + 2\psi_z\psi_{zy} = 0,$$

и из этой системы уравнений, рассматривая ее как алгебраическую относительно вторых производных функции ψ, найдем, что

$$\begin{aligned} &\psi_{xy} = \frac{\psi_z^2\psi_{zz} - \psi_x^2\psi_{xx} - \psi_y^2\psi_{yy}}{2\psi_x\psi_y}, \quad \psi_{xz} = \frac{\psi_y^2\psi_{yy} - \psi_x^2\psi_{xx} - \psi_z^2\psi_{zz}}{2\psi_x\psi_z}, \\ &\psi_{zy} = \frac{\psi_x^2\psi_{xx} - \psi_z^2\psi_{zz} - \psi_y^2\psi_{yy}}{2\psi_z\psi_y}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Выпишем систему уравнений характеристик [8] для уравнения $\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 = C$:

$$\frac{dx}{ds} = 2\psi_x, \quad \frac{dy}{ds} = 2\psi_y, \quad \frac{dz}{ds} = 2\psi_z, \quad \frac{d\psi}{ds} = 2C, \quad \frac{d\psi_x}{ds} = 0, \quad \frac{d\psi_y}{ds} = 0, \frac{d\psi_z}{ds} = 0. \tag{1.4}$$

Решение этой системы приводит к решению исходного уравнения первого порядка $\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 = C$ (см. [8] и Введение). Дополним систему уравнений (1.4) уравнениями, описывающими изменение вторых производных вдоль характеристик [1], которые являются следствиями уравнений системы (1.4)

$$\begin{gathered}\frac{d\psi_{xx}}{ds} = -2\psi_{xx}^2 - 2\psi_{xy}^2 - 2\psi_{xz}^2, \quad \frac{d\psi_{yy}}{ds} = -2\psi_{xy}^2 - 2\psi_{yy}^2 - 2\psi_{yz}^2, \\ \frac{d\psi_{zz}}{ds} = -2\psi_{xz}^2 - 2\psi_{zy}^2 - 2\psi_{zz}^2,\end{gathered} \tag{1.5}$$

где смешанные производные заменяются выражениями (1.3).

Потребуем, чтобы выражение $\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} = g_2(\psi)$ было первым интегралом системы (1.4)–(1.5). Получим уравнение для определения $g_2(\psi)$ вдоль характеристики

$$\frac{dg_2}{d\psi}\frac{d\psi}{ds} = \frac{d\psi_{xx}}{ds} + \frac{d\psi_{yy}}{ds} + \frac{d\psi_{zz}}{ds}. \tag{1.6}$$

Таким образом, получена система ОДУ, описывающая изменение всех интересующих нас величин: x, y, z, ψ, ψ_x, ψ_y, ψ_z, g_2, ψ_{xx}, ψ_{yy}, ψ_{zz} вдоль характеристики. Описанное здесь построение этой системы не сужает множество решений системы уравнений характеристик (1.4), рассмотренное в [8], но позволяет определить вид функции $g_2(\psi)$, при котором вторые производные системы уравнений характеристик удовлетворяют уравнению $\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} = g_2(\psi)$.

Итак, решив ОДУ (1.4)–(1.6), получаем решение системы уравнений $\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 = C$, $\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} = g_2(\psi)$, что и требовалось доказать. □

Еще раз подчеркнем, что предложенное доказательство показывает, что функция $g_2(\psi)$ может быть определена, как только будет известен вид функции $\psi = \psi(x, y, z)$ — решения системы уравнения характеристик (1.4) для уравнения $\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 = C$.

Далее будем рассматривать уравнение Пуассона (1.1) вдоль фиксированной характеристики.

Решение системы (1.4) вдоль характеристики, проходящей через фиксированную точку сетки, имеет вид

$$\begin{gathered}x = 2\psi_x s + x_\mu, \quad y = 2\psi_y s + y_\mu, \quad z = 2\psi_z s + z_\mu, \quad \psi = 2Cs + f_\mu, \\ \psi_x = \mathrm{const}, \quad \psi_{\mathrm{y}} = \mathrm{const}, \quad \psi_{\mathrm{z}} = \mathrm{const}.\end{gathered}$$

Перепишем первое уравнение из (1.2), выбрав в качестве правой части функцию $\psi = 2Cs + f_\mu$ ($\psi = f_\mu$, если $s = 0$):

$$Cu'' + g_2 u' = \psi. \tag{1.7}$$

Решив уравнение (1.7), вдоль каждой характеристики при $s = 0$ будем иметь в каждой точке заданной сетки значения $u_\mu = u(x_\mu, y_\mu, z_\mu)$.

Переходим к определению вида функции $\psi = \psi(x, y, z)$. Обратимся к системе (1.4). Переписав ее, выбрав за независимую переменную ψ, получим

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{\psi_x}{C}, \quad \frac{dy}{d\psi} = \frac{\psi_y}{C}, \quad \frac{dz}{d\psi} = \frac{\psi_z}{C}, \quad \frac{d\psi_x}{d\psi} = 0, \quad \frac{d\psi_y}{d\psi} = 0, \quad \frac{d\psi_z}{d\psi} = 0. \tag{1.8}$$

Из (1.8) имеем

$$x = \frac{\psi_x(\alpha,\beta)}{C}\psi + C_1(\alpha,\beta), \quad y = \frac{\psi_y(\alpha,\beta)}{C}\psi + C_2(\alpha,\beta), \quad z = \frac{\psi_z(\alpha,\beta)}{C}\psi + C_3(\alpha,\beta). \tag{1.9}$$

Из системы (1.8) ясно, что первые производные функции ψ не зависят от переменной ψ, но они могут зависеть от других переменных. Назовем эти переменные α и β. Величины $C_i = \mathrm{const}$, $i = 1, 2, 3$, вдоль характеристик, но они также могут зависеть от α

и β. Можно считать [1, 8], что (1.9) задает преобразование координат $x = x(\psi,\alpha,\beta)$, $y = y(\psi,\alpha,\beta)$, $z = z(\psi,\alpha,\beta)$, если для x, y, z из (1.9) тождественно выполняется зависимость $\psi = \psi(x(\psi,\alpha,\beta), y(\psi,\alpha,\beta), z(\psi,\alpha,\beta))$. Это соотношение обращается в тождество, когда

$$\begin{aligned}
&1 = \psi_x\frac{dx}{d\psi} + \psi_y\frac{dy}{d\psi} + \psi_z\frac{dz}{d\psi}, \quad \psi_z = \sqrt{C - \psi_x^2 - \psi_y^2},\\
&0 = \psi_x\frac{dx}{d\alpha} + \psi_y\frac{dy}{d\alpha} + \psi_z\frac{dz}{d\alpha} = \psi_x\left(\frac{\psi}{C}\frac{d\psi_x}{d\alpha} + \frac{dC_1}{d\alpha}\right) +\\
&+ \psi_y\left(\frac{\psi}{C}\frac{d\psi_y}{d\alpha} + \frac{dC_2}{d\alpha}\right) + \psi_z\left(\frac{\psi}{C}\frac{d\psi_z}{d\alpha} + \frac{dC_3}{d\alpha}\right) = \psi_x\frac{dC_1}{d\alpha} + \psi_y\frac{dC_2}{d\alpha} + \psi_z\frac{dC_3}{d\alpha},\\
&0 = \psi_x\frac{dx}{d\beta} + \psi_y\frac{dy}{d\beta} + \psi_z\frac{dz}{d\beta} = \psi_x\left(\frac{\psi}{C}\frac{d\psi_x}{d\beta} + \frac{dC_1}{d\beta}\right) +\\
&+ \psi_y\left(\frac{\psi}{C}\frac{d\psi_y}{d\beta} + \frac{dC_2}{d\beta}\right) + \psi_z\left(\frac{\psi}{C}\frac{d\psi_z}{d\beta} + \frac{dC_3}{d\beta}\right) = \psi_x\frac{dC_1}{d\beta} + \psi_y\frac{dC_2}{d\beta} + \psi_z\frac{dC_3}{d\beta}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь первое соотношение выполняется тождественно, если подставить в него данные из (1.9) и учесть, что должно выполняться второе соотношение (1.10). Остальные переменные должны выбираться так, чтобы обращались в тождество третье и четвертое соотношения (1.10). Для функций $x = x(\psi,\alpha,\beta)$, $y = y(\psi,\alpha,\beta)$, $z = z(\psi,\alpha,\beta)$, удовлетворяющих всем условиям (1.10), исключив из (1.9) α и β, получим вид $\psi = \psi(x, y, z)$. Таким образом, задание преобразования координат имеет произвол (только ограничения (1.10)), что позволяет выбирать разные зависимости первоначальных независимых переменных от α и β, получать функции $\psi = \psi(x, y, z)$ разного вида и удовлетворять некоторым дополнительным условиям для исходного уравнения в частных производных (см. [1]).

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Как было отмечено выше, при выборе зависимостей от переменных α и β есть только ограничения (1.10). Если в (1.9) положить $\psi_x(\alpha,\beta) = a = \text{const}$, $\psi_y(\alpha,\beta) = b = \text{const}$, $\psi_z(\alpha,\beta) = c = \text{const}$, $C_1(\alpha,\beta) = -ad/C$, $C_2(\alpha,\beta) = -bd/C$, $C_3(\alpha,\beta) = -cd/C$, $d = \text{const}$, тогда $C = a^2 + b^2 + c^2$,

$$\frac{dx}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dy}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dz}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dx}{d\beta} = 0, \quad \frac{dy}{d\beta} = 0, \quad \frac{dz}{d\beta} = 0,$$

и (1.10) выполняется. Из (1.9), умножив первое соотношение на a, второе на b, третье на c, и сложив их, получаем, что $\psi = ax + by + cz + d$. В этом случае $g_2 = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} = 0$. Тогда уравнение (1.7) имеет вид $Cu'' = \psi$. Выпишем решение этого уравнения

$$u = (1/6C)\psi^3 + M\psi + M_1, \quad M = \text{const}, \quad \mathrm{M}_1 = \text{const}.$$

На характеристике (см. решение системы (1.4)) $\psi = 2Cs + f_\mu$, причем постоянные a, b, c, d должны удовлетворять зависимости $ax_\mu + by_\mu + cz_\mu + d = f_\mu$, так как при $s = 0$ имеем $x = x_\mu$, $y = y_\mu$, $z = z_\mu$. Тогда $\psi = a(x - x_\mu) + b(y - y_\mu) + c(z - z_\mu) + f_\mu$. В точке сетки (при $s = 0$) получаем, что $u_\mu = (1/6C)f_\mu^3 + Mf_\mu + M_1$.

Пример 2. Другое частное решение системы (1.8) имеет вид $\psi = a_1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где $a_1 = \text{const}$ — произвольная постоянная. Выбор такой функции ψ связан с решением краевой задачи, которая рассмотрена ниже.

Функцию $\psi = a_1 + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ получим, если положим, что

$$C_1(\alpha,\beta) = -a_1\psi_x(\alpha,\beta)/C, \quad C_2(\alpha,\beta) = -a_1\psi_y(\alpha,\beta)/C, \quad C_3(\alpha,\beta) = -a_1\psi_z(\alpha,\beta)/C.$$

Пусть при этом

$$\psi_x(\alpha,\beta) = x/\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \alpha, \quad \psi_y(\alpha,\beta) = y/\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \beta,$$
$$\psi_z(\alpha,\beta) = z/\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \nu.$$

причем $\psi_x^2(\alpha,\beta)+\psi_y^2(\alpha,\beta)+\psi_z^2(\alpha,\beta) = C$, следовательно, $\nu = \sqrt{C-\alpha^2-\beta^2}$. В уравнении для определения $u = u(\psi)$ для такого ψ будем иметь

$$C = \psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2 = 1, \quad \psi_{xx}+\psi_{yy}+\psi_{zz} = g_2(\psi) = 2/\psi,$$

тогда уравнение Пуассона сводится к виду $u''+(2/\psi)u' = \psi$, отсюда

$$u(\psi) = -M/\psi + (3/4)\psi^3 + M_1, \quad M = \mathrm{const}, \quad \mathrm{M}_1 = \mathrm{const}.$$

В точках сетки имеем $u_\mu = -M/f_\mu + (3/4)f_\mu^3 + M_1$. Для $\psi = a_1 + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ при $s = 0$, будем иметь $\psi(x_\mu,y_\mu,z_\mu) = f_\mu$, если $a_1 = f_\mu - \sqrt{x_\mu^2+y_\mu^2+z_\mu^2}$. Так как вдоль характеристики $\psi_x = x/\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \alpha$, $\alpha = \mathrm{const}$, то на характеристиках, проходящих через точки сетки, $\alpha = x_\mu/\sqrt{x_\mu^2+y_\mu^2+z_\mu^2}$. Аналогично, так как вдоль характеристики $\psi_y = y/\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \beta$, $\beta = \mathrm{const}$, то на характеристиках, проходящих через точки сетки, $\beta = y_\mu/\sqrt{x_\mu^2+y_\mu^2+z_\mu^2}$ и вдоль характеристики $\psi_z = z/\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \nu$, $\nu = \mathrm{const}$, то на характеристиках, проходящих через точки сетки, $\nu = z_\mu/\sqrt{x_\mu^2+y_\mu^2+z_\mu^2}$. Следовательно, на характеристике $x = 2\alpha s + x_\mu$, $y = 2\beta s + y_\mu$, $z = 2\nu s + z_\mu$, $\psi = 2s + f_\mu$.

Для уравнения (1.1) решаем краевую задачу: $u(R) = 0$, если $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Вдоль характеристики имеем $u = 0$, когда $x^2+y^2+z^2 = (2\alpha s+x_\mu)^2+(2\beta s+y_\mu)^2+(2\nu s+z_\mu)^2 = R^2$. Это имеет место при

$$s = s_* = 0.5\left(R - \sqrt{x_\mu^2+y_\mu^2+z_\mu^2}\right), \quad \psi = \psi_* = R + f_\mu - \sqrt{x_\mu^2+y_\mu^2+z_\mu^2}$$

и

$$s = s^* = -0.5\left(R + \sqrt{x_\mu^2+y_\mu^2+z_\mu^2}\right), \quad \psi = \psi^* = f_\mu - R - \sqrt{x_\mu^2+y_\mu^2+z_\mu^2}.$$

Учитывая эти условия, из выражения для $u = -M/\psi + (3/4)\psi^3 + M_1$ получаем, что $M = 0.75[(\psi_*)^2 + \psi_*\psi^* + (\psi^*)^2]\psi_*\psi^*$, $M_1 = 0.75[(\psi^*)^2 + (\psi_*)^2](\psi^* + \psi_*)$ для заданных краевых условий.

§ 2. Сравнение с точным решением

Функция $u = (x+y+z)^3$ удовлетворяет уравнению $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} = 18(x+y+z)$. Для этого уравнения будем решать задачу на заданной сетке при следующих условиях:

$$u(x,y,z_1) = 0, \quad z_1 = -x-y\,; \quad u(x,y,z_2) = 8\,, \quad z_2 = 2-x-y.$$

Рассматриваем поверхность уровня $\psi = x+y+z$. Если в уравнении $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} = 18(x+y+z)$ считаем, что $u = u(\psi)$, то $u_x = u'$, $u_{xx} = u''$, $u_y = u'$, $u_{yy} = u''$, $u_z = u'$, $u_{zz} = u''$. Подставляя эти выражения в уравнение $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} = 18(x+y+z)$, получаем $3u'' = 18(x+y+z)$. Здесь (см. (1.2)) $\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2 = 3$, $g(\psi) = 0$. Правая часть задана на сетке $x = x_\mu$, $y = y_\mu$, $z = z_\mu$, $f = f_\mu = 18(x_\mu+y_\mu+z_\mu)$, $\mu = 1,2,\ldots,N$.

На характеристике $x = 2s + x_\mu$, $y = 2s + y_\mu$, $z = 2s + z_\mu$, $\psi = 6s + f_\mu$. Решая уравнение $3u'' = \psi$, получаем $u = \psi^3/18 + M\psi + M_1$, $M = \mathrm{const}$, $\mathrm{M}_1 = \mathrm{const}$. Удовлетворяя условиям $u(x, y, z_1) = 0$, $z_1 = -x - y$; $u(x, y, z_2) = 8$, $z_2 = 2 - x - y$, определим вид произвольных постоянных M, M_1.

(1) $u = 0$, если $2s + x_\mu + 2s + y_\mu + 2s + z_\mu = 0$, $s = -(1/6)(x_\mu + y_\mu + z_\mu)$, $\psi_* = f_\mu - (x_\mu + y_\mu + z_\mu)$.

(2) $u = 8$, если $2s + x_\mu + 2s + y_\mu + 2s + z_\mu = 2$, $s = (1/6)(2 - x_\mu - y_\mu - z_\mu)$, $\psi^* = f_\mu + 2 - (x_\mu + y_\mu + z_\mu)$.

Для определения M и M_1 получаем систему уравнений $M\psi_* + M_1 = -\psi_*^3/18$, $M\psi^* + M_1 = 8 - (\psi^*)^3/18$. Отсюда $M = 4 - (1/36)[(\psi^*)^3 - \psi_*^3]$ и $M_1 = -4\psi_* + (1/36)\psi_*\psi^*[(\psi^*)^2 - \psi_*^2]$. Тогда для вычисления значений u в точках сетки имеем

$$u = f_\mu^3/18 + \{-4 - (1/36)[(\psi^*)^3 - \psi_*^3]\}f_\mu - 4\psi_* + (1/36)\psi_*\psi^*[(\psi^*)^2 - \psi_*^2]. \tag{2.1}$$

Если $x_\mu = 1$, $y_\mu = 0$, $z_\mu = 0$, то $f_\mu = 18$, $\mu = 1$. Так как $u = (x + y + z)^3$, то $u(x_\mu, y_\mu, z_\mu) = 1$. Вычислив значение u по формуле (2.1) также получаем $u = 1$, что подтверждает работоспособность описанного выше алгоритма для решения уравнения на сетке.

§ 3. Решение уравнения нестационарной фильтрации в осесимметричном случае в точках сетки

Неоднородное уравнение нестационарной фильтрации в осесимметричном случае имеет вид [9]

$$-p_t r^2 + \frac{1}{\gamma}\left(r^2 p_r^2 + p_\varphi^2\right) + p(r^2 p_{rr} + p_{\varphi\varphi} + r p_r) = f(r, \varphi, t). \tag{3.1}$$

Здесь p — давление, $\gamma > 1$ — показатель адиабаты, $\{r, \varphi\}$ — полярные координаты, t — время.

Считая, что $p = p(\psi)$, $\psi = \psi(r, \varphi, t)$, получаем

$$p_r = p'\psi_r, \quad p_\varphi = p'\psi_\varphi, \quad p_t = p'\psi_t, \quad p_{rr} = p''\psi_r^2 + p'\psi_{rr}, \quad p_{\varphi\varphi} = p''\psi_\varphi^2 + p'\psi_{\varphi\varphi}.$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по ψ, нижние индексы — дифференцирование по соответствующим независимым переменным. Подстановка данных выражений в уравнение (3.1) дает

$$\left[\frac{1}{\gamma}(p')^2 + pp''\right](r^2\psi_r^2 + \psi_\varphi^2) + pp'(r^2\psi_{rr} + \psi_{\varphi\varphi} + r\psi_r) - p'r^2\psi_t = f(r, \varphi, t). \tag{3.2}$$

Дополним (3.2) соотношениями

$$r^2\psi_r^2 + \psi_\varphi^2 = C, \quad r^2\psi_{rr} + \psi_{\varphi\varphi} + r\psi_r = g(\psi), \quad r^2\psi_t = g_1(\psi), \tag{3.3}$$

где $C = \mathrm{const} \neq 0$, $g(\psi)$ и $g_1(\psi)$ — пока произвольные функции.

Заметим, что (3.2) содержит два сомножителя, зависящих только от первых производных функции ψ. Можно положить $r^2\psi_t = C$, $r^2\psi_r^2 + \psi_\varphi^2 = g_1(\psi)$, но мы пока рассматриваем случай (3.3).

Утверждение 2. *Существуют такие функции $g(\psi)$ и $g_1(\psi)$, при которых система (3.3) имеет решение.*

Доказательство. Выпишем дифференциальные следствия первого и последнего уравнения системы (3.3) и дополним полученные соотношения вторым уравнением системы (3.3), получим переопределенную алгебраическую систему для определения вторых производных функции ψ :

$$2r^2\psi_r\psi_{rr} + 2\psi_\varphi\psi_{r\varphi} = -2r\psi_r^2, \quad 2r^2\psi_r\psi_{r\varphi} + 2\psi_\varphi\psi_{\varphi\varphi} = 0, \quad 2r^2\psi_r\psi_{rt} + 2\psi_\varphi\psi_{\varphi t} = 0,$$

$$r^2\psi_{rt} = g_1'\psi_r - 2r\psi_t, \quad r^2\psi_{t\varphi} = g_1'\psi_\varphi, \quad r^2\psi_{tt} = g_1'\psi_t, \quad r^2\psi_{rr} + \psi_{\varphi\varphi} + r\psi_r = g(\psi).$$

Решая эту алгебраическую систему и учитывая первое из соотношений (3.3), находим

$$\psi_{rr} = \frac{g\psi_\varphi^2 - Cr\psi_r}{r^2C}, \quad \psi_{r\varphi} = -\frac{g\psi_r\psi_\varphi}{C}, \quad \psi_{\varphi\varphi} = \frac{gr^2\psi_r^2}{C}, \quad \psi_{rt} = \frac{g_1'\psi_r - 2r\psi_t}{r^2}, \quad \psi_{t\varphi} = \frac{g_1'\psi_\varphi}{r^2}.$$

Заметим, что выразив ψ_{rt} и $\psi_{t\varphi}$ из соотношений $r^2\psi_{rt} = g_1'\psi_r - 2r\psi_t$, $r^2\psi_{t\varphi} = g_1'\psi_\varphi$ и подставив их в соотношение $2r^2\psi_r\psi_{rt} + 2\psi_\varphi\psi_{\varphi t} = 0$, получим $g_1'/g_1 = 2r\psi_r/C$, $\quad C = \mathrm{const} \neq 0$. Выпишем уравнения характеристик для первого уравнения системы (3.3) [8]

$$\frac{dr}{ds} = 2r^2\psi_r, \quad \frac{d\varphi}{ds} = 2\psi_\varphi. \quad \frac{dt}{ds} = 0, \quad \frac{d\psi}{ds} = 2C,$$

$$\frac{d\psi_r}{ds} = -2r\psi_r^2, \quad \frac{d\psi_\varphi}{ds} = 0, \quad \frac{d\psi_t}{ds} = 0.$$

Отсюда

$$\psi_r\frac{dr}{ds} + r\frac{d\psi_r}{ds} = 2r^2\psi_r^2 - 2r^2\psi_r^2 = 0, \quad r\psi_r = a_2.$$

Здесь $a_2 = \mathrm{const}$. Тогда $g_1'/g_1 = 2r\psi_r/C = 2(a_2/C)$ и $g_1(\psi) = b_1\exp[2(a_2/C)\psi]$, $b_1 = \mathrm{const}$.

Вычисляем производные $\psi_{rr\varphi}$, $\psi_{r\varphi r}$, $\psi_{r\varphi\varphi}$, $\psi_{\varphi\varphi r}$ от выражений для вторых производных. В полученные выражения будут входить вторые производные. Подставляя вместо входящих вторых производных их выражения и требуя равенства третьих смешанных производных $\psi_{rr\varphi} = \psi_{r\varphi r}$ и $\psi_{r\varphi\varphi} = \psi_{\varphi\varphi r}$, приходим к двум соотношениям $\psi_\varphi(r^2\psi_r^2 + \psi_\varphi^2)(Cg' + g^2) = 0$, $\psi_r(r^2\psi_r^2 + \psi_\varphi^2)(Cg' + g^2) = 0$. Оба этих соотношения выполняются, если

$$Cg' + g^2 = 0, \quad g(\psi) = C/(\psi + C_1), \quad C = \mathrm{const} \neq 0, \quad \mathrm{C}_1 = \mathrm{const}\,.$$

Итак, если $g(\psi) = C/(\psi + C_1)$ и $g_1(\psi) = b_1\exp[2(a_2/C)\psi]$, то система (3.3) имеет решение, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим уравнение (3.1), когда правая часть задана на сетке $\{r_\mu, \varphi_\mu, t_\mu\}$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$: $f_\mu = f(r_\mu, \varphi_\mu, t_\mu)$. Подставив полученные $g(\psi)$, $g_1(\psi)$ в уравнение (3.2), замечаем, что если записать в правой части $F(\psi) = (\mathrm{sgn}\, f_\mu)\exp[(4a_2/C)\psi]$, то можно выписать аналитическое решение полученного в результате ОДУ

$$\left[\frac{1}{\gamma}(p')^2 + pp''\right]C + pp'\frac{C}{\psi + C_1} - p'b_1\exp[2(a_2/C)\psi] = (\mathrm{sgn}\, f_\mu)\exp[(4a_2/C)\psi]. \tag{3.4}$$

Если на характеристике зададим $\psi = 2Cs + (C/4a_2)\ln|f_\mu|$, то при $s = 0$ выписанное в (3.4) $F(\psi) = f_\mu$.

Частное решение уравнения (3.4) имеет вид $p = K(\psi)\exp[(2/a_2)\psi]$, если $K(\psi)$ удовлетворяет уравнению

$$K'' + \frac{1}{K\gamma}(K')^2 + K'\left(\frac{1}{\psi + C_1} - \frac{b_1}{CK} + \frac{4(\gamma+1)}{a_2\gamma}\right) +$$

$$+\frac{4K(\gamma+1)}{a_2^2\gamma}+\frac{2K}{a_2(\psi+C_1)}-\frac{2b_1}{a_2C}-(\operatorname{sgn} f_\mu)\frac{1}{KC}=0.$$

Рассмотрим частный случай. Пусть $\psi = a_2\ln r + 0.5a_2\ln(1/t)$, $a_2 = \mathrm{const}$. Отсюда $C = a_2^2$. В этом случае (3.2) при $p = p(\psi)$ имеет вид

$$\left[\frac{1}{\gamma}(p')^2+pp''\right]a_2^2+p'(a_2/2)\exp\left[(2/a_2)\psi\right]=(\operatorname{sgn} f_\mu)\exp\left[(4/a_2)\psi\right], \tag{3.5}$$

$\psi = 2a_2^2 s+(a_2/4)\ln|f_\mu|$. Частное решение уравнения (3.5) имеет вид $p = K(\psi)\exp\left[(2/a_2)\psi\right]$, где $K(\psi)$ определяется из уравнения

$$K''+\frac{1}{K\gamma}(K')^2+K'\frac{1}{a_2}\left(\frac{1}{2K}+\frac{4(\gamma+1)}{\gamma}\right)+\frac{1}{a_2^2}\left(1+\frac{4K(\gamma+1)}{\gamma}-(\operatorname{sgn} f_\mu)\frac{1}{K}\right)=0. \tag{3.6}$$

Полагая в уравнении (3.6) $K' = q(K)$, получим уравнение Абеля второго рода [10]

$$\begin{gathered} qq'=f_2q^2+f_1q+f_0,\quad f_2=-\frac{1}{K\gamma},\quad f_1=-\frac{1}{a_2}\left(\frac{1}{2K}+\frac{4(\gamma+1)}{\gamma}\right),\\ f_0=-\frac{1}{a_2^2}\left(1+\frac{4K(\gamma+1)}{\gamma}-(\operatorname{sgn} f_\mu)\frac{1}{K}\right). \end{gathered} \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) подстановкой $q = K^{-1/\gamma}(w+F)$ приводится к виду

$$\begin{gathered} (w+F)w'=F_0,\quad F=\frac{\gamma}{2a_2}K^{1/\gamma}+\frac{4}{a_2}K^{(\gamma+1)/\gamma},\\ F_0=-K^{2/\gamma}\left(\frac{1}{a_2^2}+\frac{4(\gamma+1)}{\gamma}\frac{K}{a_2^2}\pm\frac{1}{Ka_2^2}\right). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Перепишем (3.8) так [11]:

$$w=F_0(K)z-F(K)=\varphi(K,z),\quad z=\frac{dK}{dw},\quad \text{тогда}\quad 1=z\left(\varphi_K+\varphi_z\frac{dz}{dK}\right).$$

Отсюда получаем параметрическое представление $z = z(K,B)$, $w = w(K, z(k,B))$, $B = \mathrm{const}$ [11].

Если $p = K\exp\left[(2/a_2)\psi\right]$, $K = \mathrm{const}$, то $[4(\gamma+1)/\gamma]K^2 + K - \operatorname{sgn} f_\mu = 0$. Для такого K в точках сетки $p_\mu = p(r_\mu,\varphi_\mu,t_\mu) = K\sqrt{|f_\mu|}$ (на характеристике при $s = 0$ $\psi = (a_2/4)\ln|f_\mu|$).

Пример 3. Рассмотрим случай, когда в (3.2) $\psi_t r^2 = C$, $C = \mathrm{const} \neq 0$. Тогда можно считать, что $\psi = Ct/r^2$ и, если $F(\psi) = (\operatorname{sgn} f_\mu)/\psi^2$, то (3.2) приведется к виду

$$-p'C+4\psi^2\left[\frac{1}{\gamma}(p')^2+pp''\right]+4\psi pp'=(\operatorname{sgn} f_\mu)/\psi^2. \tag{3.9}$$

Выпишем систему уравнений характеристик для уравнения $\psi_t r^2 = C$

$$\frac{dt}{ds}=r^2,\quad \frac{dr}{ds}=0,\quad \frac{d\varphi}{ds}=0,\quad \frac{d\psi}{ds}=C,\quad \frac{d\psi_r}{ds}=-2r\psi_t\quad \frac{d\psi_\varphi}{ds}=0,\quad \frac{d\psi_t}{ds}=0.$$

Отсюда для характеристики, проходящей через точку сетки $f_\mu = f(r_\mu,\varphi_\mu,t_\mu)$, получаем

$$r=r_\mu,\quad \varphi=\varphi_\mu,\quad t=r_\mu^2s+t_\mu,\quad \psi=Cs+1/\sqrt{|f_\mu|}. \tag{3.10}$$

При подстановке ψ из (3.10) в правую часть уравнения (3.9) получим f_μ, если $s=0$.

Уравнение (3.9) имеет решение

$$
\begin{gathered}
p=\frac{A}{\psi}, \quad A=\mathrm{const}, \quad \text{если} \\
\frac{4(\gamma+1)}{\gamma}A^2+AC-\operatorname{sgn} f_\mu=0, \quad C=\frac{\operatorname{sgn} f_\mu-[4(\gamma+1)/\gamma]A^2}{A}.
\end{gathered} \tag{3.11}
$$

Для данного решения в точках сетки имеем $p_\mu=A\sqrt{|f_\mu|}$.

§ 4. Сравнение с точным решением

Рассмотрим уравнение нестационарной фильтрации с заданной правой частью

$$
-p_t r^2+\frac{1}{\gamma}\left(r^2p_r^2+p_\varphi^2\right)+p(r^2p_{rr}+p_{\varphi\varphi}+rp_r)=f(r,\varphi,t), \quad f=(5\gamma+4)r^4/(\gamma t^2), \tag{4.1}
$$

и с заданным условием $p=1$, если $t=r^2$.

На характеристике (3.10) условие $t=r^2$ выполняется, если $r_\mu^2=sr_\mu^2+t_\mu$, что имеет место при $s=s_*=(r_\mu^2-t_\mu)/r_\mu^2$. Тогда в случае, когда $\psi=Ct/r^2$, решение уравнения (4.1) (см. (3.11)) имеет вид $p=A/\psi$, а в точках сетки $p=A\sqrt{|f_\mu|}$. Найдем A, исходя из заданного условия. Учитывая зависимость $C=C(A)$, при $s=s_*$ имеем

$$
\psi=\psi_*=\frac{\operatorname{sgn} f_\mu-[4(\gamma+1)/\gamma]A^2}{A}s_*+1/\sqrt{|f_\mu|}, \quad p=1=A/\psi_*.
$$

Так как $p=1$ при заданном условии, то для определения A имеем зависимость

$$
A=\psi_*=\frac{(r_\mu^2-t_\mu)(\operatorname{sgn} f_\mu-[4(\gamma+1)/\gamma]A^2)}{r_\mu^2A}+\frac{1}{\sqrt{|f_\mu|}}. \tag{4.2}
$$

Отсюда получим значение $A=A_*$ для заданного условия и $p_\mu=A_*\sqrt{|f_\mu|}$ в точках сетки, где $f_\mu=(5\gamma+4)r_\mu^4/(\gamma t_\mu^2)$.

Уравнение (4.1) имеет решение $p=r^2/t$, удовлетворяющее заданному условию. Нетрудно проверить, что, например, в точке сетки $r=2$, $t=1$, $f=112$ ($\gamma=2$) получим $A_*=4/\sqrt{|f_\mu|}$ и $p_\mu=4$, как и при подстановке значений в точное решение $p=r^2/t$.

Следует заметить, что для уравнения (4.1) можно решать начальную задачу. Например, пусть при $t=t_0$ задано $p=q(r)$. На характеристике это будет иметь место, когда $t_0=r_\mu^2s+t_\mu$ при $s=s_0=(t_0-t_\mu)/r_\mu^2$ и $q(r_\mu)=A/\psi_0$, где соответствующее ψ_0 получается после подстановки в его выражение s_0. Тогда $A_0=q(r_\mu)\psi_0$ и $p=A_0/\psi$ при заданном начальном условии.

§ 5. Заключение

Ранее авторы в статье [2] изложили некоторые подходы к решению неоднородных уравнений в частных производных в случае, когда их правые части — известные функции. В данной работе рассматриваются уравнения с правыми частями, заданными на сетке. Приведенные примеры и утверждения показывают, что для сведения исходного уравнения к ОДУ достаточно (алгоритм действий):

(1) решить систему уравнений характеристик, учитывая при ее решении, по возможности, краевые, начальные или другие условия исходного уравнения (см. пример 2 и [1]) или выполнение условий перехода к новой системе координат (пример 1);

(2) по полученному решению найти первоначально произвольные функции $g_k(\psi)$;

(3) по полученному виду левой части уравнения оценить возможности его аналитического решения (выбор вида правой части ψ или $F(\psi)$);

(4) выписать решение уравнения характеристик так, чтобы каждая характеристика проходила через точки сетки, а правая часть давала при этом значение f_μ;

(5) выписать, по возможности, аналитическое решение ОДУ исходной задачи в точках сетки или перейти к численному решению выписанного ОДУ.

Расширенную систему уравнений характеристик решаем только тогда, когда хотим получить общий вид произвольных функцмй $g_k(\psi)$ (см. утверждение 2).

Предложенный алгоритм позволяет во многих случаях получать точные решения начальных или краевых задач для неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных, когда правая часть уравнения задана на сетке. Алгоритм применялся при решении ряда краевых задач для уравнения Пуассона и уравнения нестационарной осесимметричной фильтрации. Характеристики — линии ветвления процессов [8], лежащие в основе алгоритма, дают возможность получать не только гладкие решения, но и решения с разрывами на характеристиках. Это показано при решении уравнения фильтрации (см. (3.11), (4.2), здесь неоднозначно определяется A). Для обоих уравнений проведено сравнение полученного решения с известными точными решениями, подтвердившее работоспособность алгоритма.

Авторы выражают благодарность А. И. Короткому, обратившему наше внимание на проблему применения подходов, изложенных в статье [2], для неоднородных уравненийй в частных производных с правыми частями, заданными на сетке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рубина Л. И., Ульянов О. Н. Один геометрический метод решения нелинейных уравнений в частных производных // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 2. С. 209–225. http://mi.mathnet.ru/timm563
2. Рубина Л. И., Ульянов О. Н. Об одном подходе к решению неоднородных уравнений в частных производных // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 355–364. https://doi.org/10.20537/vm170306
3. Yaramyshev S., Vormann H., Adonin A., Barth W., Dahl L., Gerhard P., Groening L., Hollinger R., Maier M., Mickat S., Orzhekhovskaya A. Virtual charge state separator as an advanced tool coupling measurements and simulations // Physical Review Special Topics — Accelerators and Beams. 2015. Vol. 18. No. 5. https://doi.org/10.1103/physrevstab.18.050103
4. Zohdi T. I. Modeling and simulation of laser processing of particulate-functionalized materials // Archives of Computational Methods in Engineering. 2017. Vol. 24. Issue 1. P. 89–113. https://doi.org/10.1007/s11831-015-9160-1
5. Hiptmair R., Li L., Mao Sh., Zheng W. A fully divergence-free finite element method for magnetohydrodynamic equations // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2018. Vol. 28. No. 4. P. 659–695. https://doi.org/10.1142/S0218202518500173
6. Cheng K., Wang Ch., Wise S. M. A weakly nonlinear, energy stable scheme for the strongly anisotropic Cahn–Hilliard equation and its convergence analysis // Journal of Computational Physics. 2020. Vol. 405. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.109109
7. Schiesser W. The numerical method of lines: integration of partial differential equations. Academic Press, 1991.
8. Курант Р. Методы математической физики. Т. 2. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

9. Сидоров А. Ф. Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965.
11. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1967.

Поступила в редакцию 10.03.2021

Рубина Людмила Ильинична, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2515-7763
E-mail: rli@imm.uran.ru

Ульянов Олег Николаевич, к. ф.-м. н., доцент, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19;
старший научный сотрудник, ученый секретарь, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9318-8265
E-mail: secretary@imm.uran.ru

Цитирование: Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов. К решению неоднородных уравнений в частных производных с правой частью, заданной на сетке // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 443–457.

L. I. Rubina, O. N. Ul'yanov

On solving non-homogeneous partial differential equations with right-hand side defined on the grid

Keywords: partial differential equations, solution of initial and boundary value problems, extended system of characteristics equations, reduction of PDEs to ODE systems.

MSC2020: 35C05, 35C99

DOI: 10.35634/vm210307

An algorithm is proposed for obtaining solutions of partial differential equations with right-hand side defined on the grid $\{x_1^\mu, x_2^\mu, \dots, x_n^\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \dots, N)$: $f_\mu = f(x_1^\mu, x_2^\mu, \dots, x_n^\mu)$. Here n is the number of independent variables in the original partial differential equation, N is the number of rows in the grid for the right-hand side, $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ is the right-hand of the original equation. The algorithm implements a reduction of the original equation to a system of ordinary differential equations (ODE system) with initial conditions at each grid point and includes the following sequence of actions. We seek a solution to the original equation, depending on one independent variable. The original equation is associated with a certain system of relations containing arbitrary functions and including the partial differential equation of the first order. For an equation of the first order, an extended system of equations of characteristics is written. Adding to it the remaining relations containing arbitrary functions, and demanding that these relations be the first integrals of the extended system of equations of characteristics, we arrive at the desired ODE system, completing the reduction. The proposed algorithm allows at each grid point to find a solution of the original partial differential equation that satisfies the given initial and boundary conditions. The algorithm is used to obtain solutions of the Poisson equation and the equation of unsteady axisymmetric filtering at the points of the grid on which the right-hand sides of the corresponding equations are given.

REFERENCES

1. Rubina L. I., Ul'yanov O. N. A geometric method for solving nonlinear partial differential equations, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 209–225 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/timm563
2. Rubina L. I., Ul'yanov O. N. On one approach to solving nonhomogeneous partial differential equations, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 355–364 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170306
3. Yaramyshev S., Vormann H., Adonin A., Barth W., Dahl L., Gerhard P., Groening L., Hollinger R., Maier M., Mickat S., Orzhekhovskaya A. Virtual charge state separator as an advanced tool coupling measurements and simulations, *Physical Review Special Topics — Accelerators and Beams*, 2015, vol. 18, no. 5. https://doi.org/10.1103/physrevstab.18.050103
4. Zohdi T. I. Modeling and simulation of laser processing of particulate-functionalized materials, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2017, vol. 24, issue 1, pp. 89–113. https://doi.org/10.1007/s11831-015-9160-1
5. Hiptmair R., Li L., Mao Sh., Zheng W. A fully divergence-free finite element method for magnetohydrodynamic equations, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2018, vol. 28, no. 4, pp. 659–695. https://doi.org/10.1142/S0218202518500173
6. Cheng K., Wang Ch., Wise S. M. A weakly nonlinear, energy stable scheme for the strongly anisotropic Cahn–Hilliard equation and its convergence analysis, *Journal of Computational Physics*, 2020, vol. 405. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.109109
7. Schiesser W. *The numerical method of lines: integration of partial differential equations*, Academic Press, 1991.
8. Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics. Vol. 2. Partial differential equations*, New York: Interscience, 1962.

9. Sidorov A. F. *Izbrannye trudy. Matematika. Mekhanika* (Selected works. Mathematics. Mechanics), Moscow: Fizmatlit, 2001.
10. Kamke E. *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1930.
11. Matveev N. M. *Metody integrirovaniya obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* (Methods of integration of ordinary differential equations), Moscow: Vysshaya shkola, 1967.

Received 10.03.2021

Lyudmila Il'inichna Rubina, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2515-7763
E-mail: rli@imm.uran.ru

Oleg Nikolaevich Ul'yanov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia;
Senior Researcher, Academic Secretary, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9318-8265
E-mail: secretary@imm.uran.ru

Citation: L. I. Rubina, O. N. Ul'yanov. On solving non-homogeneous partial differential equations with right-hand side defined on the grid, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 3, pp. 443–457.