

Общероссийский математический портал

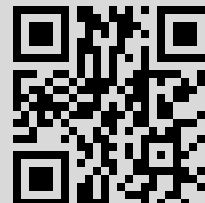
Ю. С. Осипов, А. В. Кряжимский, В. И. Максимов, Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2011, том 17, номер 1, 129–161

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.82.227.9

25 марта 2022 г., 12:26:36



УДК 517.917

**НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ
ВХОДОВ¹****Ю. С. Осипов, А. В. Кряжимский, В. И. Максимов**

Для некоторых классов систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дается обзор алгоритмов динамического восстановления входов. Предлагаемые алгоритмы, устойчивые к информационным помехам и погрешностям вычислений, основаны на методах теории некорректных задач, а также подходящих модификациях известного в теории гарантированного управления метода экстремального прицеливания Н.Н. Красовского.

Ключевые слова: восстановление, управляемые модели.

Yu. S. Osipov, A. V. Kryazhinskiy, V. I. Maksimov. Some algorithms for the dynamic reconstruction of inputs.

For some classes of systems described by ordinary differential equations, a survey of algorithms for the dynamic reconstruction of inputs is presented. The algorithms described in the paper are stable with respect to information noises and computation errors; they are based on methods from the theory of ill-posed problems as well as on appropriate modifications of N.N. Krasovskii's principle of extremal aiming, which is known in the theory of guaranteed control.

Keywords: reconstruction, controlled models.

1. Введение

В работе рассматривается задача устойчивого восстановления неизвестного входа динамической системы по результатам неточных наблюдений за ее траекторией. Содержание рассматриваемой задачи таково. Имеется динамическая система, описываемая векторным нелинейным дифференциальным уравнением. Траектория системы зависит от меняющегося во времени входного воздействия (входа), трактуемого в дальнейшем как управление. Заранее как вход, так и траектория не заданы. Однако известно множество, ограничивающее допустимую реализацию входа. В процессе функционирования системы измеряются все ее фазовые состояния или их "часть". Эти измерения, вообще говоря, неточны. Требуется сконструировать алгоритм приближенного восстановления ненаблюдаемой "части" координат (если таковая имеется), а также входа, обладающий свойствами динамичности и устойчивости. Свойство динамичности означает, что текущие значения приближения соответствующих координат и входа вырабатываются в реальном времени, свойство устойчивости — что приближения сколь угодно точны при достаточной точности наблюдения.

В работе приняты следующие обозначения:

\mathbb{R}^n — n -мерное пространство с евклидовой нормой $|\cdot|_n$ и скалярным произведением (\cdot, \cdot) ;

\mathbb{R}_+ — множество положительных чисел;

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00378), программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Математическая теория управления" (проект 09-П-1-1014), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-65590.2010.1) и Уралосибирского интеграционного проекта 09-С-1-1010.

$L_2(T; \mathbb{R}^n)$	— гильбертово пространство всех суммируемых с квадратом нормы функций, отображающих множество T в пространство \mathbb{R}^n (с нормой $ \cdot _{L_2(T; \mathbb{R}^n)}$);
$C(T; \mathbb{R}^n)$	— банахово пространство всех непрерывных функций, отображающих множество T в пространство \mathbb{R}^n , которое снабжено sup-нормой $ \cdot _{C(T; \mathbb{R}^n)}$;
C'	— транспонированная матрица;
C^{-1}	— обратная матрица;
I_n	— единичная матрица размерности $n \times n$.

2. Постановка задач. Метод решения

Обсуждаемая в данной работе задача может быть сформулирована следующим образом. Имеется динамическая система Σ , функционирующая на промежутке времени $T = [t_0, \vartheta]$, $\vartheta < +\infty$. Будем полагать, что Σ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t) + F(t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^N$, $F(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$ — заданная функция. Ее траектория $x(t) = x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$, $t \in T$, зависит от начального состояния x_0 и изменяющегося во времени неизвестного входного воздействия

$$u(\cdot) \in P(\cdot) \subset L_2(T; \mathbb{R}^N).$$

Здесь $P(\cdot)$ — некоторое заданное множество, называемое в дальнейшем множеством “допустимых управлений”. На промежутке T взято равномерное разбиение $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ с шагом δ , $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_m = \vartheta$. В моменты τ_i замеряется выход системы

$$y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^r$$

(C — $r \times n$ -мерная матрица). Выход замеряется с ошибкой. Результаты неточных измерений — векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^r$ — удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_i^h - y(\tau_i)|_r \leq h, \quad i \in [0 : m - 1], \quad (2.2)$$

где $h \in (0, 1)$ — величина информационной погрешности. Требуется построить алгоритм, позволяющий синхронно с развитием процесса по результатам неточных измерений $y(\cdot)$ восстанавливать как весь фазовый вектор $x(\cdot)$, так и управление $u(\cdot)$, порождающее выход $y(\cdot)$. Именно, требуется сформировать некоторую пару (“траектория–управление”) $\{w_*^h(\cdot), u_*^h(\cdot)\}$, “близкую” (в смысле, уточняемом в дальнейшем) к паре $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$. Такова содержательная постановка задачи.

В том случае, когда

$$C = I_n,$$

т.е. измеряются все компоненты фазового вектора, описанная выше задача трансформируется в задачу построения алгоритма приближенного вычисления только управления $u^h(\cdot)$ — “приближения” некоторого управления из множества допустимых управлений, порождающих выход $x(\cdot)$. При этом неравенства (2.2) принимают вид

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_n \leq h, \quad i \in [0 : m - 1]. \quad (2.3)$$

Прежде чем дать строгую математическую постановку рассматриваемой задачи, опишем метод ее решения. Этот метод базируется на одном из известных принципов позиционного управления — принципе вспомогательных моделей, восходящем к работам Н.Н. Красовского [1; 2]. Сформулируем его в удобной для нас форме. Пусть Σ описывается системой (2.1), где

вектор-функция $f: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и матричная функция $B: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ измеримы (по Лебегу) по первому аргументу, удовлетворяют условию Липшица по второму, а также соответствующим условиям роста. Решение системы (2.1), отвечающее начальному состоянию x_0 и управлению $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N)$, а также решения каждой из встречающихся ниже систем дифференциальных уравнений понимаются в смысле Каратеодори. Будем обозначать решения системы (2.1) символом $x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$.

Для решения задачи прежде всего фиксируется семейство $\{\Delta_h\}$ разбиений отрезка T на полуинтервалы $[\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta, \quad \delta = \delta(h), \quad \tau_{h,0} = \tau_0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta. \quad (2.4)$$

Затем выбирается система M (называемая моделью), движение которой $w^h(t)$, $t \in T$, является решением подходящим образом выбранного дифференциального уравнения

$$\dot{w}^h(t) = \Phi(t, w^h(t), \xi_i^h, u^h(t), v^h(t)), \quad t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}), \quad i \in [0 : m_h - 1] \quad (2.5)$$

с начальным условием

$$w^h(t_0) = w_0^h.$$

Здесь u^h и v^h — два управления (роль их, как будет видно ниже, в каждом случае своя и, вообще говоря, принципиально различная), $w^h(t)$ — вектор, размерность которого априори не оговаривается; в каждом конкретном случае она своя. Обозначение $w^h(t) = w^h(t; w_0^h, u^h(\cdot), v^h(\cdot))$ используется для решения системы (2.5) (с начальным условием w_0^h).

После того как модель определена (т. е. задано уравнение (2.5)), алгоритм решения задачи отождествляется с законом формирования управлений в модели по принципу обратной связи. При этом процедуре управления моделью предшествует выбор ее начального состояния w_0^h . Законы формирования управлений $\{u^h(\cdot), v^h(\cdot)\}$ в модели, называемые по терминологии, принятой в теории гарантированного управления [1; 2], стратегиями, отождествляются с парами

$$S_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h),$$

где

Δ_h определяется согласно (2.4),

\mathcal{U}_h — функция, ставящая в соответствие (пользуясь терминологией теории позиционных дифференциальных игр) позиции $q^{(i)}(\cdot)$ вектор

$$\mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot)) = \{u_i^h, v_i^h\}. \quad (2.6)$$

Понятие позиции в каждом случае будет уточняться. Например, позицией может являться тройка

$$q^{(i)}(\cdot) = \{\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)\}, \quad i \in [0 : m - 1] \quad (2.7)$$

($\tau_i = \tau_{h,i} \in \Delta_h$, $m = m_h$). Позиция может включать также некую “предысторию”. В частности, позицией может быть вектор

$$q^{(i)}(\cdot) = \{\tau_i, \xi_i^h, \xi_{i-1}^h, w^h(\tau_i)\}, \quad i \in [1 : m - 1]. \quad (2.7')$$

В дальнейшем для простоты все разбиения Δ_h будем считать равномерными. Таким образом, тройка $(\Delta_h, M, \mathcal{U}_h)$ при каждом $h \in (0, 1)$ определяет некоторый алгоритм D_h на множестве измерений $\xi(\cdot) \in \Xi(y(\cdot), h)$, формирующий по принципу обратной связи (2.5)–(2.7), ((2.5), (2.6), (2.7')) выход

$$D_h \xi^h(\cdot) = \{w^h(\cdot), u^h(\cdot), v^h(\cdot)\}, \quad h \in (0, 1). \quad (2.8)$$

Здесь символ $\Xi(y(\cdot), h)$ означает множество всех кусочно-постоянных функций $\xi^h(\cdot)$,

$$\xi^h(t) = \xi_i^h, \quad t \in \delta_{h,i} = [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}),$$

удовлетворяющих неравенствам (2.2) при $\tau_i = \tau_{h,i} \in \Delta_h$. Управления $u^h(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$, как правило, также являются кусочно-постоянными

$$u^h(t) = u_i^h, \quad v^h(t) = v_i^h, \quad t \in \delta_{h,i}. \quad (2.9)$$

Заметим, что в некоторых случаях управление $u^h(\cdot)$ может отсутствовать. Тогда система (2.5) принимает вид

$$\dot{w}^h(t) = \Phi(t, w^h(t), \xi_i^h, v^h(t)), \quad t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}). \quad (2.5')$$

Отображение $\mathcal{U}_h(q^{(\cdot)}(\cdot))$ и управление $v^h(\cdot)$ при этом задаются следующим образом:

$$\mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot)) = v_i^h, \quad (2.6')$$

$$v^h(t) = v_i^h, \quad t \in \delta_{h,i}. \quad (2.9')$$

В этом случае выход алгоритма D_h есть пара $\{w^h(\cdot), v^h(\cdot)\}$, т. е.

$$D_h \xi^h(\cdot) = \{w^h(\cdot), v^h(\cdot)\}, \quad h \in (0, 1). \quad (2.8')$$

Работа алгоритма D_h (при фиксированном h) протекает по следующей схеме. До начального момента времени t_0 выбирается и фиксируется разбиение $\Delta = \Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, ($\tau_i = \tau_{h,i}$, $m = m_h$) отрезка T , а также вспомогательная система — модель M . Алгоритм D_h разбиается на $m - 1$ однотипных шагов. Очередной, i -й, шаг выполняется на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \geq 0$. В течение этого шага осуществляются следующие операции. В момент τ_i замеряется (с ошибкой) выход $y(\tau_i)$, т. е. находится вектор ξ_i^h со свойством (2.2). После этого по правилу (2.6), (2.9) ((2.6'), (2.9')) определяется управление в модели (2.5) ((2.5')). Затем осуществляется корректировка памяти — формирование отрезка траектории модели $w^h(t) = w^h(t; \tau_i, w^h(\tau_i), u_i^h, v_i^h)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, вместо $w^h(\tau_i)$. Вся процедура заканчивается в момент ϑ .

Рассмотрим случай, когда измеряются все координаты, т. е.

$$C = I_n.$$

Как уже отмечалось выше, при фиксированных h и $\xi^h(\cdot)$ каждый алгоритм D_h порождает выход $D_h \xi^h(\cdot)$ (см. (2.8) ((2.8'))). В случае, когда измеряются все координаты, нам понадобится не весь этот выход алгоритма D_h , а лишь его часть $v^h(\cdot)$. Чтобы не было путаницы, в последнем случае мы будем говорить о выходе $v^h(\cdot) = D_h \xi^h(\cdot)$.

Рассматриваемая задача динамической реконструкции (задача 1) состоит в построении семейства алгоритмов $D_h = (\Delta_h, M, \mathcal{U}_h)$ (2.4)–(2.6), (2.9) ((2.4), (2.5'), (2.6'), (2.9')), $h \in (0, 1)$, такого, что

$$v^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot; x(\cdot)) \text{ в } L_2(T; \mathbb{R}^N) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Здесь $u_*(\cdot; x(\cdot)) \in P(\cdot)$ — некоторое управление, порождающее выход $x(\cdot)$. Таким образом, задача 1 относится к случаю, когда $C = I_n$.

Обратимся к случаю измерения части координат. Будем считать, что выход $y(t)$ имеет вид

$$y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$C = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

— $(n \times (r + g))$ -мерная матрица, $g = n - r$.

Тогда можно считать, что $x(\cdot) = (y(\cdot), x^*(\cdot))$, где x^* — неизмеряемые компоненты вектора x . Выход алгоритма D_h (при каждом h) определяется согласно (2.8), где

$$w^h(\cdot) = \{w_*^h(\cdot), w_1^h(\cdot)\}, \quad (2.11)$$

причем $w_*^h(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$ — часть координат модели, аппроксимирующая неизмеряемую координату x^* фазового вектора системы x , $w_1^h(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}^l$ — некоторая вспомогательная часть модельной траектории.

Задача 2 (задача динамической реконструкции при измерении части координат) состоит в построении семейства алгоритмов $D_h = (\Delta_h, M, \mathcal{U}_h)$ (2.4)–(2.6), (2.9) ((2.4), (2.5'), (2.6'), (2.9')), $h \in (0, 1)$, такого, что

- а) $v^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot; y(\cdot))$ в $L_2(T; \mathbb{R}^N) = 0$,
- б) $w_*^h(\cdot) \rightarrow x^*(\cdot; t_0, x_0, u_*(\cdot))$ в $C(T; \mathbb{R}^{n-r})$ при $h \rightarrow 0$.

Здесь $v^h(\cdot) = D_h \xi^h(\cdot)$ — выход алгоритма D_h .

В общем случае выход системы имеет вид $y(t) = Cx(t)$, где C — $r \times n$ -мерная матрица. Результаты измерения этого выхода $\xi_i^h \in \mathbb{R}^r$ удовлетворяют неравенствам (2.2). Выход алгоритма D_h определяется согласно (2.8), (2.11), где $w_*^h(\cdot)$ — часть координат модели, аппроксимирующая либо фазовую траекторию $x(\cdot)$ системы, либо некоторую функцию $\tilde{x}(\cdot)$ вида $\tilde{x}(t) = x(t) + f_*(t)$, $t \in T$ ($f_*(t)$ — известная функция), $w_1^h(\cdot)$ — некоторая вспомогательная часть модельной траектории.

В этом случае задача 3 (задача динамической реконструкции при измерении выхода $y(t) = Cx(t)$) состоит в построении семейства алгоритмов $D_h = (\Delta_h, M, \mathcal{U}_h)$ (2.4)–(2.6), (2.9) ((2.4), (2.5'), (2.6'), (2.9')), $h \in (0, 1)$, таких, что

- а) $v^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot; y(\cdot))$ в $L_2(T; \mathbb{R}^N) = 0$ при $h \rightarrow 0$,
- б)

$$w_*^h(\cdot) \rightarrow \tilde{x}(\cdot) \text{ в } C(T; \mathbb{R}^n) \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

3. Восстановление управлений при измерении всех координат

Сначала в настоящем разделе мы укажем один из методов решения задачи 1, который был предложен в работе [3]. При этом мы не будем пользоваться формализмами разд. 1, а опишем довольно подробно метод решения, поясняя все встречающиеся конструкции. Рассмотрим управляемую систему, динамика которой описывается векторным уравнением (2.1), т. е. уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.1)$$

где t — время, $x = x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — фазовая траектория процесса, $u = u(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))$ — управление, $B(t, x) = \{B_{ij}(t, x)\}$, $i \in [1 : n]$, $j \in [1 : N]$ — матрица размерности $n \times N$, моменты t_0, ϑ и начальное состояние x_0 заданы.

Управление $u = u(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))$ будем называть допустимым, если его компоненты $u_i(t)$, $i \in [1 : N]$, являются измеримыми (по Лебегу) на отрезке T функциями, а значения $u(t)$ для почти всех $t \in T$ принадлежат заданному ограниченному множеству P из евклидова пространства \mathbb{R}^N . Множество всех допустимых управлений будем обозначать символом $P(\cdot)$.

Итак,

$$P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N) : u(t) \in P \text{ при п.в. } t \in T\}. \quad (3.2)$$

Траекторией (или решением) задачи Коши (3.1), соответствующей (соответствующим) допустимому управлению $u(\cdot) \in P(\cdot)$, будем называть функцию $x = x(t) = x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$, которая абсолютно непрерывна на T , в начальный момент времени $t = t_0$ принимает значение

$x(t_0) = x_0$, для почти всех $t \in T$ имеет производную $\dot{x}(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.1) для почти всех $t \in T$.

Под прямой задачей обычно понимают задачу определения траектории $x = x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ системы (3.1) по известному допустимому управлению $u = u(\cdot) \in P(\cdot)$. Задачу же определения допустимого управления по известной (полученной в результате наблюдений) траектории $x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ системы (3.1) естественно назвать обратной задачей. Именно эта задача будет главным объектом нашего исследования. Уточним постановку обсуждаемой задачи. Введем множество

$$U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in P(\cdot) : x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) = x(t), \quad t \in T\} \quad (3.3)$$

всех допустимых управлений, порождающих одну и ту же траекторию $x(t)$, $t \in T$, системы (3.1). Из постановки задачи следует непустота множества $U(x(\cdot))$, так как мы полагаем, что наблюдаемая функция $x(\cdot)$ действительно является траекторией системы (3.1), порожденной каким-либо допустимым управлением $u = u(\cdot) \in P(\cdot)$, т. е. $x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) = x(t)$, $t \in T$, и, следовательно, $u(\cdot) \in U(x(\cdot))$. Однако множество $U(x(\cdot))$ может состоять более, чем из одного элемента. Это имеет место, например, в случае, когда $B(t, x) = B$ — постоянная матрица и $N > n$. Последнее легко видеть, если переписать уравнение (3.1) в виде

$$Bu(t) = \dot{x}(t) - f(t, x(t)), \quad t \in T.$$

Учитывая возможность такой неединственности, мы будем придерживаться концепции так называемых нормальных решений обратных задач. Именно, управление $u = u_*(\cdot)$, следуя [4; 5], назовем нормальным решением, если

$$u_*(\cdot) \in U(x(\cdot)), \quad |u_*(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)} = \inf_{u \in U(x(\cdot))} |u(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)}. \quad (3.4)$$

Заметим, что из-за погрешностей наблюдения (вызванных помехами, несовершенством измерительной аппаратуры или другими причинами) вместо точной траектории $x(t)$, $t \in T$, системы (3.1) нам будет известно лишь ее приближение $\xi^h(t)$, $t \in T$, удовлетворяющее условию

$$|\xi^h(t) - x(t)|_n \leq h, \quad t \in T, \quad (3.5)$$

где h — погрешность, $h \in (0, 1)$. Теперь мы можем сформулировать обсуждаемую задачу в удобной форме.

Требуется, зная $\xi^h(\cdot)$, указать допустимое управление $v^h(\cdot)$ такое, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} |v^h(\cdot) - u_*(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)} = 0. \quad (3.6)$$

При этом подразумевается, что динамика системы, т. е. $f(t, x)$, $B(t, x)$, T , x_0 , множество P и число h также известны.

Введем

Условие 3.1. *Функции f и B удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$:*

$$\max \{|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)|_n; \|B(t_1, x_1) - B(t_2, x_2)\|\} \leq L(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|_n). \quad (3.7)$$

Здесь и ниже символ $\|B\|$ означает евклидову норму матрицы B .

Уточним постановку обсуждаемой задачи. Итак, мы полагаем, что наблюдается траектория $x = x(t)$, $t \in T$, системы (3.1), соответствующая некоторому неизвестному управлению $u = u(\cdot) \in P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N) : u(t) \in P \text{ для п.в. } t \in T\}$. Измерения значений траектории $x(t)$ проводятся в заданные дискретные моменты времени τ_i , $i \in [0 : m - 1]$: $t_0 < \tau_0 < \dots < \tau_{m-1} < \tau_m = \vartheta$, причем вместо точных состояний $x(\tau_i)$ известны их приближения ξ_i^h , удовлетворяющие условиям

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_n \leq h, \quad i \in [0 : m - 1], \quad h \in (0, 1). \quad (3.8)$$

Здесь подразумевается, что

$$m = m_h = (\vartheta - t_0)\delta^{-1}(h), \quad \delta(h) = \tau_{i+1} - \tau_i = \text{const} > 0, \quad \tau_i = \tau_{h,i}.$$

Требуется, зная $B(t, x)$, $f(t, x)$, T , P , h , $\xi_0^h, \dots, \xi_{m-1}^h$, построить управление $v = v^h(\cdot) \in P(\cdot)$ такое, что имеет место сходимость (3.6), где $u_*(\cdot)$ — нормальное решение задачи, определяемое условиями

$$u_*(\cdot) \in U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in P(\cdot) : x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) = x(t) \quad \forall t \in T\},$$

$$|u_*(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)} = \inf_{u \in U(x(\cdot))} |u(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)}.$$

Остается уточнить, в каком режиме поступает информация об измерениях $\xi_0^h, \dots, \xi_{m-1}^h$ и как она используется при построении искомого управления $v^h(\cdot)$. Мы будем предполагать, что величины ξ_i^h определяются и становятся известными нам последовательно во времени, и управление $v^h(\cdot)$ мы вычисляем также последовательно на каждом отрезке $[t_0, \tau_1]$, $[\tau_1, \tau_2]$, \dots , причем для построения $v^h(\cdot)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ используем лишь значения ξ_0^h, \dots, ξ_i^h , не предполагая знания остальных значений $\xi_{i+1}^h, \dots, \xi_{m-1}^h$, которые, возможно, пока еще не измерены.

Сформулированная выше задача неустойчива к возмущениям входных данных и для ее решения нужно применять специальные устойчивые методы. Один из таких методов мы и опишем ниже. В этом методе наряду с кусочно-постоянным управлением $v^h(\cdot)$, представляющим собой приближение к нормальному решению $u_*(\cdot)$, строится вспомогательная кусочно-линейная функция $w^h(\cdot)$, которая помогает отслеживать наблюдаемую траекторию $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u_*(\cdot))$ по ее приближенным значениям ξ_i^h , удовлетворяющим (3.8).

Приведем индуктивное описание процесса построения $v^h(\cdot)$, $w^h(\cdot)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ последовательно для $i = 0, 1, \dots, m-1$. Пусть $i = 0$ и известно наблюдаемое значение ξ_0^h начальной точки $x(t_0) = x_0$ точной траектории $x(t)$. Положим

$$w^h(t_0) = \xi_0^h.$$

Решая вспомогательную задачу минимизации квадратичного функционала

$$l_0(v) = 2(w^h(t_0) - \tilde{x}_0, f(t_0, \xi_0^h)v) + \alpha|v|_N^2 \rightarrow \inf, \quad v \in P,$$

где $\alpha > 0$, $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор, находим точку $v_0 \in P$ такую, что $l_0(v_0) = \inf_{v \in P} l_0(v)$.

Затем полагаем

$$v^h(t) = v_0^h, \quad w^h(t) = w^h(t_0) + [B(t_0, \xi_0^h)v_0^h + f(t_0, \xi_0^h)]t, \quad t \in [t_0, \tau_1].$$

Пусть для некоторого i , $0 < i < m-1$, уже определены $v^h(t)$, $w^h(t)$, $0 \leq t < \tau_i$, и пусть нам стало известно измерение ξ_i^h наблюдаемой траектории $x(t)$ в момент $t = \tau_i$. Тогда решаем вспомогательную задачу минимизации квадратичной функции

$$l_i(v) = 2(w^h(\tau_i) - \xi_i^h, B(\tau_i, \xi_i^h)v) + \alpha|v|_N^2 \rightarrow \inf, \quad v \in P, \quad (3.9)$$

и определяем вектор $v_i^h \in P$, $l_i(v_i^h) = \inf_{v \in P} l_i(v)$. После этого считаем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$v^h(t) = v_i^h, \quad w^h(t) = w^h(\tau_i) + [B(\tau_i, \xi_i^h)v_i^h + f(\tau_i, \xi_i^h)](t - \tau_i). \quad (3.10)$$

Далее, по мере поступления информации $\xi_{i+1}^h, \dots, \xi_{m-1}^h$ последовательно определяются $v^h(\cdot)$, $w^h(\cdot)$ на промежутках $[\tau_{i+1}, \tau_{i+2}]$, \dots , $[\tau_{m-1}, \tau_m)$, $\tau_m = \vartheta$.

Описанный метод представляет собой сочетание принципа экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [1] и метода регуляризации А.Н. Тихонова [4]. Вспомогательную траекторию $w^h(\cdot)$ из (3.10) будем называть моделью, а правило (3.9) выбора v_i^h — правилом экстремального сдвига. Для построения модели использован аналог разностного метода Эйлера для решения задачи Коши (3.1), отличающийся от классического метода Эйлера тем, что в (3.10) функции $B(\tau_i, x)$, $f(\tau_i, x)$ вычислены в точке $x = \xi_i^h$, а не в точке $x = w^h(\tau_i)$.

Роль модели заключается в том, чтобы отслеживать реальную траекторию по наблюдаемым значениям ξ_i^h , $i \in [0, m-1]$, путем наилучшего в смысле (3.9), (3.10) выбора кусочно-постоянных управлений $v^h(t) = v_i^h$, $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i \in [0 : m-1]$. Идею отслеживания траектории можно было бы реализовать и несколько иначе, выбирая u_i из условия минимума уклонения значения $w^h(\tau_{i+1}) = w^h(\tau_{i+1}; \tau_i, w^h(\tau_i), v_i^h)$ от ξ_i^h :

$$|w^h(\tau_{i+1}) - \xi_i^h|_n^2 \rightarrow \inf, \quad v \in P. \quad (3.11)$$

Тогда с учетом формулы (3.10) имеем

$$\begin{aligned} |w^h(\tau_{i+1}) - \xi_i^h|_n^2 &= |w^h(\tau_i) + (B(\tau_i, \xi_i^h)v_i^h + f(\tau_i, \xi_i^h))(\tau_{i+1} - \tau_i) - \xi_i^h|_n^2 \\ &= |w^h(\tau_i) - \xi_i^h|_n^2 + 2(w^h(\tau_i) - \xi_i^h, B(\tau_i, \xi_i^h)v_i^h \\ &\quad + f(\tau_i, \xi_i^h))(\tau_{i+1} - \tau_i) + |B(\tau_i, \xi_i^h)v_i^h + f(\tau_i, \xi_i^h)|_n^2(\tau_{i+1} - \tau_i)^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Как видим, первое слагаемое в правой части равенства (3.12) от v не зависит и потому может быть опущено без ущерба для задачи (3.11). Если теперь пренебречь третьим слагаемым из правой части (3.12), имеющим порядок $O(\delta^2)$, $\delta = \tau_{i+1} - \tau_i$, можем перейти от задачи (3.11) к близкой задаче для определения v_i^h

$$2(w^h(\tau_i) - \xi_i^h, B(\tau_i, \xi_i^h)v + f(\tau_i, \xi_i^h)) \rightarrow \inf, \quad v \in P.$$

Замечая, что здесь слагаемое $2(w^h(\tau_i) - \xi_i^h, B(\tau_i, \xi_i^h)v + f(\tau_i, \xi_i^h))$ от v не зависит и может быть опущено, приходим к задаче

$$2(w^h(\tau_i) - \xi_i^h, B(\tau_i, \xi_i^h)v) \rightarrow \inf, \quad v \in P.$$

Добавляя к целевой функции последней задачи минимизации регуляризующее слагаемое $\alpha|v|_N^2$, получаем задачу (3.9).

Приведенные соображения поясняют происхождение задачи (3.9). Отметим, что эта задача является стандартной конечномерной задачей математического программирования и для ее решения могут быть использованы различные методы (см., например, [5]). Функция $l_i(v)$ в (3.9) сильно выпукла, квадратична и на выпуклом замкнутом множестве P достигает своей нижней грани в единственной точке $v = v_i^h$.

Важно также заметить, что в точном определении точки минимума v_i^h в задаче (3.9) нет необходимости. Достаточно найти v_i^h из условий

$$v_i^h \in P, \quad l_i(v_i^h) \leq \inf_{v \in P} l_i(v) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.13)$$

В дальнейшем предполагается, что точки v_i^h из (3.13) уже определены при $i = 0, 1, \dots, m-1$ и функции $v^h(\cdot)$, $w^h(\cdot)$, построены по формулам (3.10) с использованием v_i^h , полученных из (3.13). Оказывается, если параметры α , ε , h описанного метода (3.9), (3.10), (3.13) подходящим образом согласованы с погрешностью h , то построенное управление $v^h(\cdot)$ может быть взято в качестве приближения для нормального решения рассматриваемой обратной задачи. Имеет место

Теорема 3.1 [3]. Пусть функции $B(t, x)$, $f(t, x)$ удовлетворяют условию Липшица по совокупности аргументов $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, P — выпуклое, замкнутое, ограниченное множество \mathbb{R}^N , приближенные значения ξ_i^h наблюдаемой траектории $x(\cdot)$ в моменты $t = \tau_i$,

$i \in [0 : m - 1]$, удовлетворяют неравенствам (3.8), параметры $\alpha = \alpha(h)$, $\varepsilon = \varepsilon(h)$, $\delta = \delta(h)$ положительны и стремятся к нулю при $h \rightarrow 0$, причем

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h + \delta(h) + \varepsilon(h))\alpha^{-1}(h) = 0.$$

Тогда функции $v^h(\cdot)$, $w^h(\cdot)$, определенные согласно (3.9), (3.10), (3.13), таковы, что

$$|v^h(\cdot) - u_*(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)} \rightarrow 0, \quad (3.14)$$

$$|w^h(\cdot) - x(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0+, \quad (3.15)$$

где $u_* = u_*(\cdot) \in U(x(\cdot))$ — нормальное решение рассматриваемой задачи, $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u_*(\cdot))$.

Укажем еще один метод решения задачи 1, который основан на динамическом варианте метода невязки. При этом рассмотрим случай отсутствия ограничений на управление, т.е. считаем выполненным условие

$$P(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^N).$$

Предполагаем, что система описывается нелинейным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(x(t))u(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.16)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $u(t) \in \mathbb{R}^N$ — управление, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — векторная функция, $x \rightarrow B(x) \in \mathbb{R}^{n \times N}$ — матричная функция. Векторная функция f удовлетворяет условию Липшица по аргументам t, x , липшицевой считается и матричная функция $B(x)$ (см. (3.7)).

Пусть символ Δ_h означает разбиение отрезка T на $m_h - 1$ полуинтервалов $\delta_{h,i} = [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$ узлами $\tau_{h,i} = t_0 + i\delta_h$, $i \in [0 : m_h]$, с шагом $\delta_h = (\vartheta - t_0)(m_h)^{-1}$ (см. (2.4)), а символы ξ_i^h — результаты измерений состояний $x(\tau_i)$, т.е. векторы, удовлетворяющие неравенствам

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h|_n \leq h, \quad \tau_i = \tau_{h,i}.$$

Пусть модель M описывается системой уравнений вида

$$\dot{w}^h(t) = \Phi(t, \xi_{i-1}^h, v^h(t)), \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

$$i \in [0 : m - 1], \quad m = m_h,$$

$$\Phi(t, \xi_{i-1}^h, v^h(t)) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, t_0 + \delta), \quad \delta = \delta_h \\ f(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h) + B(\xi_{i-1}^h)v, & t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}). \end{cases}$$

Ее решение — абсолютно непрерывная функция $w^h(\cdot) = w^h(\cdot; t_0, w_0^h, \xi^h(\cdot), v^h(\cdot))$. Начальное состояние модели $w^h(t_0) = w_0^h = \xi_0^h$.

Заметим, что модель является линейной системой, в то время как реальная система нелинейна по фазовым переменным.

Позиция $q^{(i)}(\cdot)$ в данном случае есть тройка (2.7'). Пусть символ $U(x(\cdot))$ означает совокупность всех управлений $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N)$, порождающих движение $x(\cdot)$, т.е.

$$U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N) : x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$$

удовлетворяет при п.в. $t \in T$ равенству (3.16)\}.

Символом $u_*(\cdot) = u_*(\cdot, x(\cdot))$ обозначим минимальное (в смысле $L_2(T; \mathbb{R}^N)$ -нормы) управление из множества $U(x(\cdot))$ (см. (3.3), (3.4))

$$u_*(\cdot) = \arg \min \{|u(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)} : u(\cdot) \in U(x(\cdot))\}.$$

Рассмотрим два случая.

Случай I. $B(x) = B$, $u_*(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N)$.

Случай II. $u_*(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^N)$.

Закон выбора управления в модели $\mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot))$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_h &= \mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h, w^h(\tau_i)) = v_{\tau_i, \tau_{i+1}}^h(\cdot), \quad i \in [1 : m-1], \\ v_{t_0, \tau_1}^h(\cdot) &= 0, \quad (\tau_i = \tau_{h,i}, \quad m = m_h), \end{aligned}$$

где функции $v_{\tau_i, \tau_{i+1}}^h(\cdot)$ вычисляются в моменты τ_i по правилу

$$v^h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho_i^h \leq 0 \text{ или } |F_{i,\xi}|_N \leq \varepsilon, \\ \rho_i^h (a_i^h)^{-2} F_{i,\xi} & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \rho_i^h &= (\pi_i^h, \delta f(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h) - \chi_i^h), \quad \pi_i^h = w^h(\tau_i) - \xi_{i-1}^h, \\ \chi_i^h &= \xi_i^h - \xi_{i-1}^h, \quad a_i^h = |F_{i,\xi}|_N \delta^{1/2}, \quad \delta = \delta_h, \quad \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]. \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — вспомогательный параметр, $F_{i,\xi} = -B'(\xi_{i-1}^h)\pi_i^h$, штрих означает транспонирование, символ $v_{a,b}(\cdot)$ означает функцию $v(t)$, $a \leq t \leq b$. Введем следующее

Условие 3.2. Пусть взяты функция $\varepsilon(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ и семейство разбиений $\{\Delta_h\}$, $h \in (0, 1)$, (2.4) отрезка T со свойствами

$$\delta(h) \rightarrow 0, \quad \varepsilon(h) \rightarrow 0 \quad \delta(h)/\varepsilon^{3/2}(h) \leq 1$$

$$\text{при } h \rightarrow 0, \quad h/\delta(h) \leq \varepsilon(h).$$

Имеет место

Теорема 3.2 [6]. При выполнении условия (3.2) имеют место сходимости (3.14), (3.15). Если $n = N$, $B = I$ (единичная матрица), $\delta = h^{2/3}$, $\varepsilon = h^{1/3}$ и управление $u_*(\cdot)$ является функцией с ограниченной вариацией, тогда справедлива следующая оценка скорости сходимости алгоритма:

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |u_*(t) - v^h(t)|_N^2 dt \leq ch^{1/8}.$$

Мы назвали описанный выше метод динамическим методом невязки, имея в виду следующее. Решение стандартной экстремальной задачи ($J(u) \rightarrow \inf$, $u \in U$, U — заданное множество, функционал $J(u)$ определен на U) методом невязки, как известно [5, с. 202], сводится к минимизации подходящего стабилизатора на множестве точек, в которых функционал $J(u)$ принимает значения, близкие к своей нижней грани $J_* = \inf\{J(u) : u \in U\}$. В основе доказательства теоремы 3.2 лежит оценка величины $\varepsilon_{i+1} = |w^h(\tau_{i+1}) - x(\tau_{i+1})|_n^2$ через величину ε_i . Ключевым звеном при обосновании такой оценки является неравенство

$$J_{1,i} \leq 4h|\pi_i^h|_n, \quad (3.18)$$

где

$$J_{1,i} = 2 \left(\pi_i^h; \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \{f(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h) - f(\tau, x(\tau)) + B(\xi_{i-1}^h)v^h(\tau + \delta) - B(x(\tau))u_*(\tau)\} d\tau \right).$$

Остановимся более детально на последнем. Обратимся к случаю I. Введем семейство функций

$$U_{i,h} = \{u(\cdot) \in L_2(\delta_i; \mathbb{R}^N) : J_i(u(\cdot)) \leq 4h|\pi_i^h|_n\},$$

где

$$J_i(u(\cdot)) = 2 \left(r_i, \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} B(u(\tau + \delta) - u_*(\tau)) d\tau \right).$$

В таком случае, управление $v_{\tau_i, \tau_{i+1}}^h(\cdot)$ вида (3.17) обеспечивает выполнение неравенства (3.18) и является решением задачи минимизации “стабилизатора”

$$\Omega_i(v(\cdot)) = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_N^2 d\tau$$

на множестве $U_{i,h}$. Заметим также, что верно включение $u_{*\tau_i, \tau_{i+1}}(\cdot) \in U_{i,h}$.

4. Восстановление входов при измерении части координат

В настоящем разделе полагаем, что система Σ описывается нелинейным уравнением вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t)) + f_2(t, x_1(t), x_2(t))u(t), \quad t \in T, \\ \dot{x}_2(t) &= f_3(t, x_1(t), x_2(t)) + f_4(t, x_1(t), x_2(t))u(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20},$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $u \in \mathbb{R}^N$. Функции $f_j(\cdot)$, $j \in [1 : 4]$, отображают произведение $T \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ соответственно в \mathbb{R}^{n_1} , \mathbb{R}^{n_2} и в пространства всех $N \times n_1$ - и $N \times n_2$ -мерных матриц, а также удовлетворяют условию Липшица по всем аргументам. В дальнейшем символом $c[f_j]$ обозначим постоянную Липшица функции f_j .

Рассмотрим случай, когда множество допустимых управлений $P(\cdot)$ имеет вид

$$P(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^N).$$

Пусть матрица C имеет структуру

$$C = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы рассматриваем случай измерения в моменты τ_i координаты x_1 . Следовательно (см. разд. 1),

$$r = n_1, \quad y(t) = x_1(t), \quad x^*(t) = x_2(t),$$

и неравенства (2.2) принимают вид

$$|\xi_i^h - x_1(\tau_i)|_{n_1} \leq h, \quad i \in [0 : m - 1].$$

Как и выше, для решения задачи 2 следует задать семейство алгоритмов D_h , $h \in (0, 1)$, состоящее из

- а) семейства разбиений Δ_h промежутка времени T вида (2.4);
- б) некоторой вспомогательной системы (модели) M вида (2.5);
- в) закона формирования управления в модели по принципу обратной связи \mathcal{U}_h (2.6), (2.9).

Пусть E_1 и E_2 — ограниченные подмножества пространств \mathbb{R}^{n_1} и \mathbb{R}^{n_2} соответственно такие, что реализация траектории системы (4.1) $\{x_1(t), x_2(t)\}$ лежит в $E_1 \times E_2$ при всех t из T , т. е.

$$\{x_1(t), x_2(t)\} \in E_1 \times E_2 \quad \forall t \in T.$$

Пусть также выполнено

Условие 4.1. *Размерность управления и не превосходит размерности координаты x_2 ($N \leq n_2$) и при всех $t \in T$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ матрица $f_2(t, x_1, x_2)$ имеет ранг, равный N .*

Заметим, что при этом условии первое уравнение системы (4.1) может быть формально разрешено относительно $u(t)$:

$$u(t) = f_2^+(t, x_1(t), x_2(t))(\dot{x}_1(t) - f_1(t, x_1(t), x_2(t))), \quad t \in T,$$

где $f_2^+(t, x_1, x_2)$ — матрица, псевдообратная к $f_2(t, x_1, x_2)$.

При выполнении условия 4.1 множество входов, совместимых с выходом $x_1(\cdot)$, — $U(x_1(\cdot))$, одноэлементно, т. е.

$$U(x_1(\cdot)) = \{u_*(\cdot)\},$$

здесь $u(\cdot) = u_*(\cdot) = u_*(\cdot; x_1(\cdot))$ — истинное управление, действующее на систему (4.1).

В соответствии с подходом, описанным в разд. 1, каждый алгоритм D_h решения задачи 2 отождествляется с тройкой $(\Delta_h, M, \mathcal{U}_h)$, где Δ_h — разбиение (2.4) отрезка T с равномерным шагом $\delta = \delta(h)$, M — модель (2.5), \mathcal{U}_h — закон формирования управления в модели (2.6).

Выберем функцию $\alpha = \alpha(h) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ и семейство разбиений Δ_h (2.4) таким образом, чтобы при $h \rightarrow 0$ выполнялись условия

$$\delta(h) \rightarrow 0, \quad \alpha(h) \rightarrow 0, \quad \frac{h + \delta(h)}{\alpha(h)} \rightarrow 0, \quad \frac{h}{\delta(h)} \leq \lambda, \quad \frac{\alpha^2(h)}{\delta(h)} \leq \sigma^*, \quad (4.2)$$

где $\lambda > 0$, $\sigma^* > 0$ — константы. Модель M зададим дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{w}_0^h(t) &= \bar{u}_i^h, \\ \dot{w}_*^h(t) &= f_3(\tau_i, \eta_i^h) + f_4(\tau_i, \eta_i^h) f_2^+(\tau_i, \eta_i^h) [\bar{u}_i^h - f_1(\tau_i, \eta_i^h)], \\ \dot{w}_2^h(t) &= f_1(\tau_i, \eta_i^h) + f_2(\tau_i, \eta_i^h) v_i^h + \tilde{u}_i^h, \\ t \in \delta_i &= [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m - 1], \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad m = m_h \end{aligned} \quad (4.3)$$

с начальным условием

$$w_0^h(t_0) = x_{10}, \quad w_*^h(t_0) = x_{20}, \quad w_2^h(t_0) = x_{10}.$$

Здесь для краткости обозначено $\eta_i^h = \{\xi_i^h, w_{*,i}^h\}$, $w_{*,i}^h = w_*^h(\tau_i)$. Тройка $w_0^h(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $w_*^h(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $w_2^h(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$ составляет фазовый вектор модели $w^h(t) = \{w_0^h(t), w_*^h(t), w_2^h(t)\}$.

Закон формирования управления в модели \mathcal{U}_h (2.6) отождествляется с правилом, ставящим в соответствие каждой пятерке

$$q^{(i)}(\cdot) = \{\tau_i, \xi_i^h, \xi_{i-1}^h, w_*^h(\tau_i), w_2^h(\tau_i)\}, \quad i \in [1 : m - 1],$$

вектор

$$\mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot)) = \{u_i^h, v_i^h\}, \quad u_i^h = \{\bar{u}_i^h, \tilde{u}_i^h\},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^h &= 0, \quad \bar{u}_i^h = (\xi_i^h - \xi_{i-1}^h) \delta^{-1} = \xi^*(\tau_i, \tau_{i-1}), \quad i \geq 1, \\ v_i^h &= \alpha^{-1} f_2'(\tau_i, \xi_i^h, w_{*,i}^h) (\xi_i^h - w_2^h(\tau_i)), \\ \tilde{u}_i^h &= c_* \delta \alpha^{-2} (\xi_i^h - w_2^h(\tau_i)), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$|f_2(t, x_1, x_2)| \leq b[f_2] \quad \forall \{t, x_1, x_2\} \in T \times E_1 \times E_2.$$

$$c_* = \text{const} > (1 + 2(b[f_2])^2 + 4(b[f_2])^4 + \sigma^*) / 2.$$

Работа алгоритма D_h (при фиксированном h) разбивается на конечное число однотипных шагов. Очередной, i -й, шаг выполняется на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$. В течение этого шага осуществляются следующие операции. Сначала согласно (4.4) вычисляется тройка векторов $\{\bar{u}_i^h, \tilde{u}_i^h, v_i^h\}$, составляющая вектор управления, затем на вход модели (4.3) подаются постоянные управления

$$\bar{u}^h(t) = \bar{u}_i^h, \quad \tilde{u}^h(t) = \tilde{u}_i^h, \quad v^h(t) = v_i^h \quad \text{при } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

После этого пересчитывается фазовое состояние модели, вместо $\{w_0^h(\tau_i), w_*^h(\tau_i), w_2^h(\tau_i)\}$ находят $\{w_0^h(\tau_{i+1}), w_*^h(\tau_{i+1}), w_2^h(\tau_{i+1})\}$. Вся процедура заканчивается в момент ϑ .

Справедлива следующая теорема

Теорема 4.1 [7]. *Пусть выполнено условие 4.1, а также условия согласования параметров (4.2). Тогда имеют место сходимости*

$$v^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot) \text{ в } L_2(T; \mathbb{R}^N), \quad w_*^h(\cdot) \rightarrow x_2(\cdot) \text{ в } C(T; \mathbb{R}^{n_2}) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

В основе доказательства теоремы 4.1 лежит процедура стабилизации функционала типа Ляпунова вида

$$\Lambda(t) = |w_2^h(t) - x_1(t)|_{n_1}^2 + \alpha \int_{t_0}^t \{|v^h(s)|_N^2 - |u_*(s)|_N^2\} ds,$$

где $w_2^h(t)$ — фазовая траектория модели. При этом устанавливаются оценки

$$|w_0^h(\cdot) - x_1(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^{n_1})} \leq 3h + 2k_0\delta^{1/2},$$

$$|w_*^h(\cdot) - x_2(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^{n_2})} \leq k_*(h + \delta^{1/2}), \quad k_0, k_* = \text{const} > 0,$$

$$|w_2^h(\tau_i) - x_1(\tau_i)|_{n_1}^2 \leq d_0(h + \delta + \alpha), \quad i \in [0 : m],$$

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(t)|_N^2 dt \leq \int_{t_0}^{\vartheta} |u_*(t)|_N^2 dt + d_1\alpha^{-1}(h + \delta) + d_2\alpha, \quad d_0, d_1, d_2 = \text{const} > 0.$$

Имеет место также

Лемма 4.1 [7]. *Пусть $\alpha = h^{1/2}$, $\delta = h$ и $u_*(\cdot)$ является функцией ограниченной вариации на T . Тогда имеет место следующая оценка скорости сходимости алгоритма:*

$$d_3 h^{1/2} \leq \int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(t) - u_*(t)|_N^2 dt \leq d_3 h^{1/2}.$$

Приведем еще один алгоритм решения задачи 2, считая, что множество $P(\cdot)$ имеет вид (3.2), где P — выпуклый компакт. Символами E_1^γ , E_2^γ обозначим γ -окрестности множеств E_1 и E_2 соответственно, где γ — некоторое (достаточно большое) фиксированное положительное число такое, что все ξ_i^h заведомо принадлежат E_1^γ при всех $h \in (0, 1)$ и всех i .

Пусть

$$\sup \{|f_1(t, x_1, x_2) + f_2(t, x_1, x_2)u|_{n_1} : t \in T, x_1 \in E_1^\gamma, x_2 \in E_2^\gamma, u \in P\} \leq K_1,$$

$$\sup \{|f_3(t, x_1, x_2) + f_4(t, x_1, x_2)u|_{n_2} : t \in T, x_1 \in E_1^\gamma, x_2 \in E_2^\gamma, u \in P\} \leq K_2.$$

Пусть выполняется условие 4.1. Модель M зададим управляемой системой вида

$$\dot{w}_0^h(t) = u_i^h,$$

$$\dot{w}_*^h(t) = f_3(\tau_i, \eta_i^h) + f_4(\tau_i, \eta_i^h) f_2^+(\tau_i, \eta_i^h) [u_i^h - f_1(\tau_i, \eta_i^h)], \quad (4.5)$$

$$t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m - 1], \quad m = m_h, \quad \tau_i = \tau_{h,i}$$

с начальным условием

$$w_0^h(t_0) = x_{10}, \quad w_*^h(t_0) = x_{20},$$

где $u^h(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_1}$ — управление, пара $\{w_0^h(\cdot), w_*^h(\cdot)\} \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ составляет фазовую траекторию модели $w^h(\cdot)$. Для краткости записи обозначено

$$\eta_i^h = \{\xi_i^h, w_{*,i}^h\}, \quad w_{*,i}^h = w_*^h(\tau_i).$$

Семейство отображений $\mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot))$ зададим формулой (2.6), полагая

$$\begin{aligned} u_i^h &= \{u_i^{h(1)}, \dots, u_i^{h(n_1)}\} \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ u_i^{h(k)} &= -K_1 \operatorname{sign} [w_0^{h(k)}(\tau_i) - \xi_i^{h(k)}] \in R, \quad k \in [1 : n_1], \\ v_0^h &= 0, \quad v_i^h = \begin{cases} \arg \min\{|u|_N : u \in \Omega_i^h\}, & \text{если } \Omega_i^h \neq \emptyset, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega_i^h &= \left\{ u \in P : |f_2(\tau_i, \xi_i^h, w_{*,i}^h)u - F_i^h|_{n_2} \leq \nu(h, \delta(h)) \right\}, \\ \nu(h, \delta) &= 2h\delta^{-1} + K(c[f_1] + c[f_2]d(P))(h + \delta), \\ d(P) &= \sup\{|u|_N : u \in P\}, \quad \tilde{K} = 1 + c[x_1] + c[w] + K_0, \\ F_i^h &= (\xi_i^h - \xi_{i-1}^h)\delta^{-1}(h) - f_1(\tau_i, \xi_i^h, w_{*,i}^h), \quad K_0 = \max\{k_1, k_2\}, \\ |x_1(t_1) - x_2(t_2)|_{n_1} &\leq c[x_1]|t_1 - t_2|, \\ |w_*^h(t_1) - w_*^h(t_2)|_{n_2} &\leq c[w]|t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in T, \\ k_1 &= c_7 = c_1 c_3(\vartheta - t_0) + c_5, \quad k_2 = c_2 c_3(\vartheta - t_0) + c_6, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= c[f_3] + c[g_1] + c[g_2]n_1K_1, \quad c_2 = c_1K_1, \quad c_3 = \exp(c_1(\vartheta - t_0)), \\ c_5 &= c[g_2](1 + n_1K_1 + n_2K_2)(\vartheta - t_0) + c^*[g_2], \quad c_6 = 2c_5K_1, \end{aligned}$$

$c[f_j]$ — постоянные Липшица функций f_j , $j \in [1 : 4]$, $c[g_j]$ — постоянные Липшица функций g_j , $j \in [1 : 2]$,

$$\begin{aligned} g_1(t, x_1, x_2) &= -f_4(t, x_1, x_2) f_2^+(t, x_1, x_2) f_1(t, x_1, x_2), \\ g_2(t, x_1, x_2) &= f_4(t, x_1, x_2) f_2^+(t, x_1, x_2), \quad t \in \delta_i, \end{aligned}$$

символ $c^*[g]$ обозначает константу, ограничивающую сверху евклидову норму $|g(t, x_1, x_2)|$ при всех (t, x_1, x_2) из множества $T \times E_1^\gamma \times E_2^\gamma$.

Пусть функции $\delta(h)$ таковы, что при $h \rightarrow 0$:

$$\delta(h) \rightarrow 0, \quad h\delta^{-1}(h) \rightarrow 0.$$

Имеет место

Теорема 4.2 [8]. Пусть выполнено условие 4.1. Модель M описывается уравнениями (4.5), а семейство \mathcal{U}_h — соотношениями (4.6). Тогда справедливо утверждение теоремы 4.1.

Укажем еще один алгоритм решения задачи 2 в предположении, что множество допустимых управлений $P(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^N)$, причем известно, что истинное управление $u(\cdot) = u_*(\cdot, x_1(\cdot))$, действующее на систему (4.1), является элементом пространства $L_\infty(T; \mathbb{R}^N)$. Пусть выполняется условие 4.1. В качестве модели M возьмем управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{w}_0^h(t) &= u_i^h, \\ \dot{w}_*^h(t) &= f_3(\tau_i, \eta_i^h) + f_4(\tau_i, \eta_i^h) f_2^+(\tau_i, \eta_i^h) [u_i^h - f_1(\tau_i, \eta_i^h)], \\ t \in \delta_i &= [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m - 1], \quad m = m_h, \quad \tau_i = \tau_{h,i} \end{aligned} \quad (4.7)$$

с начальным условием

$$w_0^h(t_0) = x_{10}, \quad w_*^h(t_0) = x_{20},$$

где $u^h(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_1}$ — управление, пара $\{w_0^h(\cdot), w_*^h(\cdot)\} \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ составляет фазовую траекторию модели $w^h(\cdot)$,

$$\eta_i^h = \{\xi_i^h, w_{*,i}^h\}, \quad w_{*,i}^h = w_*^h(\tau_i).$$

Семейство отображений $\mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot))$ зададим формулой (2.6),

$$\begin{aligned} u_0^h &= 0, \quad u_i^h = (\xi_i^h - \xi_{i-1}^h) \delta^{-1}, \quad i \geq 1, \\ v_0^h &= 0, \quad v_i^h = \begin{cases} \arg \min\{|u|_N : u \in \Omega_i^h\}, & \text{если } \Omega_i^h \neq \emptyset, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь

$$\Omega_i^h = \left\{ u \in S(d(h)) : |f_2(\tau_i, \xi_i^h, w_{*,i}^h)u - F_i^h|_{n_2} \leq \nu(h, \delta(h), d(h)) \right\},$$

$$S(d(h)) = \{u \in \mathbb{R}^N : |u|_N \leq d(h)\} \text{ — шар радиуса } d(h),$$

$$d(h) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ — скалярная функция,}$$

$$F_i^h = (\xi_i^h - \xi_{i-1}^h) \delta^{-1}(h) - f_1(\tau_i, \xi_i^h, w_{*,i}^h),$$

$$\nu(h, \delta, d) = 2h\delta^{-1} + K(c[f_1] + c[f_2]d)(h + \delta^{1/2}), \quad K = 1 + c[x_1] + c[w] + K_*,$$

$$K_* = 3 \exp(k_0^2(\vartheta - t_0))(k_0(1 + c[x_1] + c[w])(\vartheta - t_0)^{1/2} + 3(c[x_1] + 1)S[r]),$$

$$k_0 = (c[f_3] + c[g_1])(\vartheta - t_0)^{1/2} + c[g_2](2S[x])^{1/2}, \quad S[x] = |\dot{x}_1(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^{n_1})}^2,$$

$$c[g_2] = c[f_4]b[f_2^+] + c[f_2^+]b[f_4], \quad c[g_1] = c[f_1]b[f_4]b[f_2^+] + c[g_2]b[f_1],$$

$$|x_1(t_1) - x_2(t_2)|_{n_1} \leq c[x_1]|t_1 - t_2|,$$

$$|w_*^h(t_1) - w_*^h(t_2)|_{n_2} \leq c[w]|t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in T.$$

Пусть функции $\delta(h)$, $d(h)$ таковы, что при $h \rightarrow 0$

$$\delta(h) \rightarrow 0, \quad h\delta^{-1}(h) \rightarrow 0, \quad d(h) \rightarrow +\infty, \quad d(h)\delta^{1/2}(h) \rightarrow 0. \quad (4.9)$$

Алгоритм работает по стандартной схеме. До момента t_0 фиксируется погрешность h , а также разбиение $\Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^{m_h}$ отрезка T . На очередном, i -м, шаге, выполняемом на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m_h - 1]$, осуществляются следующие операции. Сначала вычисляются векторы $\{u_i^h, v_i^h\}$ согласно правилу (4.8). Затем на вход модели подается постоянное управление

$$u^h(t) = u_i^h, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

После этого пересчитывается фазовое состояние модели: вместо $w^h(\tau_i) = \{w_0^h(\tau_i), w_*^h(\tau_i)\}$ находится $w^h(\tau_{i+1}) = \{w_0^h(\tau_{i+1}), w_*^h(\tau_{i+1})\}$. Вся процедура заканчивается в момент ϑ .

Имеет место

Теорема 4.3 [7]. Пусть выполнено условие 4.1, а также условие согласования параметров (4.9), модель M описывается уравнениями (4.7), а семейство \mathcal{U}_h — соотношениями (4.8). Тогда справедливо утверждение теоремы 4.1.

Доказательство теорем 4.2 и 4.3 основано на идеологии динамического варианта метода невязки. При этом устанавливаются неравенства

$$|v^h(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)}^2 \leq |u_*(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)}^2,$$

$$|w_*^h(\cdot) - x_2(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^{n_2})} \leq k\varphi(h, \delta),$$

где $\varphi(h, \delta) = h + \delta$ (при доказательстве теоремы 4.2), $\varphi(h, \delta) = h + \delta^{1/2}$ (при доказательстве теоремы 4.3).

При некоторых дополнительных условиях можно установить верхнюю оценку скорости сходимости алгоритма. Имеет место

Теорема 4.4 [7]. Пусть выполнены условия (4.9) и $u_*(\cdot)$ является функцией ограниченной вариации, тогда справедлива следующая оценка скорости сходимости алгоритма

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(t) - u_*(t)|_N^2 dt \leq C(h\delta^{-1}(h) + d(h)(h + \delta^{1/2}(h))). \quad (4.10)$$

Здесь постоянная $C > 0$ может быть выписана явно.

Следствие 4.1. Если положить $\delta(h) = h^{3/4}$, а $d(h) = h^{-1/8}$, то как верхняя, так и нижняя оценки скорости сходимости алгоритма будут иметь порядок $h^{1/8}$.

5. Восстановление входов по измерениям выхода $y = Cx$

В этом разделе всюду полагаем

$$P(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^N).$$

Таким образом, ограничения на управление отсутствуют. Рассмотрим линейный стационарный случай. Именно, положим в (2.1) $f(t, x) = Ax$, где A — $n \times n$ -мерная матрица, $B(t, x) = B$ — $n \times N$ -мерная матрица. Таким образом, система (2.1) имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F(t), \quad t \in T, \quad (5.1)$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Предполагаем, что выход системы $y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^r$ (C — $r \times n$ -мерная матрица). Результаты измерения $y(t)$ удовлетворяют неравенствам (2.2).

Модель зададим векторным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \dot{w}^h(t) &= \Phi(w^h(t), v^h(t)), \quad t \in [\tau_1, \vartheta], \quad \tau_1 = \tau_{h,1}, \\ \dot{w}^h(t) &= 0, \quad t \in [t_0, \tau_1], \quad w^h(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $w^h = \{w_0^h, w_*^h, w_2^h\}$ — фазовый вектор размерности $r + 2n$, $w_1^h = \{w_0^h, w_2^h\}$,

$$\Phi(w^h, v^h) = \{CBv^h, Aw_*^h + Bv^h, w_*^h\}. \quad (5.3)$$

Таким образом, модель описывается системой

$$\begin{aligned}\dot{w}_0^h(t) &= CBv^h(t), \quad t \in [\tau_1, \vartheta], \\ \dot{w}_*^h(t) &= Aw_*^h(t) + Bv^h(t), \\ \dot{w}_2^h(t) &= w_*^h(t),\end{aligned}$$

причем $w^h(t) = 0$ при $t \in [t_0, \tau_1]$.

Пусть выполнено

Условие 5.1. а) Размерность выхода равна размерности входа, т. е. $r = N$; $\text{rank } CB = r$. Функция $F(\cdot)$ непрерывна.

б) Входное воздействие $u(\cdot)$, действующее на систему (2.1), является элементом пространства $L_2(T; \mathbb{R}^N)$.

Выполнение этого условия гарантирует одноэлементность множества $U(y(\cdot))$:

$$U(y(\cdot)) = \{u_*(\cdot)\} \subset L_2(T; \mathbb{R}^N), \quad u_*(\cdot) = u_*(\cdot; y(\cdot)).$$

Семейство \mathcal{U}_h определим формулами

$$\mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot)) = \begin{cases} v_0^h & \text{при } i = 0, \\ v_i^h & \text{при } i \in [1 : m - 1], \quad m = m_h, \end{cases} \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned}q^{(i)}(\cdot) &= \{t_i, \xi_i^h, \xi_{i-1}^h, w^h(\tau_i)\}, \quad i \in [0 : m - 1], \\ v_i^h &= \begin{cases} (CB)^{-1} \left| \delta^{-1}(h) (\xi_i^h - \xi_{i-1}^h) - CAx_1(\tau_i) - CF(\tau_i) - \right. \\ \left. CAw_*^h(\tau_i) \right|_r s_i / |s_i|_r, & \text{если } |s_i|_r \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$x_1(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, 0)$ — решение системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + F(t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0,$$

вектор s_i определяется соотношением

$$s_i = \xi_{i-1}^h - \xi_0^h - \int_{t_0}^{\tau_i} C\{F(\tau) + Ax_1(\tau)\} d\tau - w_0^h(\tau_i) - CAw_2^h(\tau_i).$$

Имеет место

Теорема 5.1 [9]. Пусть $v^h(t) = 0$ при $t \in [t_0, t_{h,1}]$,

$$\delta(h) \rightarrow 0, \quad h/\delta(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Тогда семейство алгоритмов D_h , $h \in (0, 1)$, (2.4), (5.2)–(5.5) решает задачу 3. При этом имеет место сходимость (2.12), где

$$\tilde{x}(t) = x(t) + f_*(t), \quad f_*(t) = x_1(t). \quad (5.6)$$

Кроме того, равномерно по всем разбиениям $\{\Delta_h\}$, $h \in (0, 1)$, с диаметрами $\delta = \delta(h)$ и всем результатам измерений ξ_i^h , $|\xi_i^h - y(\tau_i)|_r \leq h$, справедливо неравенство

$$\sup_{t \in T} \left| \int_{t_0}^t \{v^h(\tau) - u_*(\tau)\} d\tau \right|_r \leq c\{\delta^{1/2}(h) + \omega_F(\delta) + h/\delta(h)\}.$$

Здесь постоянная c не зависит от h , δ и $\xi^h(\cdot)$; $\omega_F(\delta)$ — модуль непрерывности функции F , т. е.

$$\omega_F(\delta) = \sup \{|F(\tau_1) - F(\tau_2)|_N : |\tau_1 - \tau_2| \leq \delta, \tau_1, \tau_2 \in T\}.$$

Рассмотрим случай, когда множество $P(\cdot)$ задается формулой (3.2). Так же, как и выше, мы рассмотрим систему (5.1) в предположении, что выполнено условие 5.1. Модель зададим соотношениями (5.2), (5.3). Семейство \mathcal{U}_h определим формулами (5.4), где положим

$$v_i^h = \arg \min \{2(l^h(\tau_i), u) + \alpha|u|_N^2 : u \in P\}, \quad (5.7)$$

$$l^h(t) = (CB)^{-1}\{w_0^h(t) - CAw_2^h(t) - f^h(t)\},$$

$$f^h(t) = \tilde{\xi}^h(t) - \int_{t_0}^t \{CAx_1(\tau) + CF(\tau)\} d\tau,$$

$\tilde{\xi}^h(t)$ — линейный интерполянт, построенный по узлам ξ_i^h , т. е. $\tilde{\xi}^h(\tau_i) = \xi_i^h$, $i \in [0 : m - 1]$, $m = m_h$.

Теорема 5.2. Пусть выполнено условие согласования параметров

$$h \leq \delta(h), \quad \delta(h) \rightarrow 0, \quad \alpha(h) \rightarrow 0,$$

$$(\delta(h) + h)/\alpha(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow +0.$$

Тогда семейство алгоритмов D_h , $h \in (0, 1)$, (2.4), (5.2)–(5.4), (5.7) решает задачу 3. При этом имеет место сходимость (2.12), где $\tilde{x}(t)$ определяется по формуле (5.6). Если функция $u_*(\cdot)$ имеет на промежутке T ограниченную вариацию, то справедливы следующие оценки скорости сходимости алгоритма:

$$\int_0^\vartheta (\vartheta - s)^2 |v^h(s) - u_*(s)|_N^2 ds \leq C_1 h^{1/3},$$

$$|v^h(\cdot) - u_*(\cdot)|_{L^2(T; \mathbb{R}^N)} \leq C_2 (\delta(h)/\alpha(h) + (\alpha(h))^{1/2})^{1/6},$$

где константы C_1 и C_2 выписываются явно.

Поясним соображения, которые лежат в основе доказательства теорем 5.1 и 5.2. Как известно, решение системы (5.1) представимо в виде

$$x(t) = x_1(t) + \int_{t_0}^t X(t, \tau) Bu(\tau) d\tau, \quad (5.8)$$

где $X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Продифференцируем правую и левую части равенства (5.8) и умножим полученное равенство на C . В результате будем иметь

$$C\dot{x}(t) = CAx_1(t) + CF(t) + CBu(t) + C \int_{t_0}^t AX(t, \tau) Bu(\tau) d\tau.$$

Заметим, что левая часть этого равенства есть $y(t)$, а матрица CB имеет размерность $r \times r$ и является невырожденной (см. условие 5.1 а)). Следовательно, неизвестное управление

$u(\cdot) = u_*(\cdot)$, действующее на систему (5.1), является единственным решением интегрального уравнения

$$\Psi_1(t) - Mu(t) - \int_{t_0}^t K(t, \tau)u(\tau) d\tau = 0, \quad t \in T,$$

здесь

$$M = CB, \quad K(t, \tau) = CAX(t, \tau)B, \quad (5.9)$$

$$\Psi_1(t) = \dot{y}(t) - CAx_1(t) - CF(t).$$

В таком случае, естественно пытаться построить семейство алгоритмов D_h , выход которых $v^h(\cdot) = D_h \xi^h(\cdot)$ будет обладать свойством

$$\sup_{t \in [\tau_1, \vartheta]} \left| \int_{\tau_1}^t \{\Psi_1(\tau - \delta(h)) - Mv^h(\tau) - \int_{t_0}^{\tau} K(\tau, \eta)v^h(\eta) d\eta\} d\tau \right| \leq \nu(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0+.$$

Описанные выше алгоритмы как раз и обладают таким свойством.

6. Уравнения непрерывного оценивания возмущений динамических систем

В настоящем разделе обсуждается задача построения дифференциальных уравнений оценивания (реконструкции) возмущений по данным измерений. В отличие от предыдущих разделов, в которых анализируются случаи дискретных моментов наблюдений, обсуждается непрерывный случай, для него выводятся дифференциальные уравнения вспомогательной системы, управления в которой являются приближениями неизвестного входа. Общие конструкции иллюстрируются на примере.

Итак, задана динамическая система, описываемая нелинейным дифференциальным уравнением (2.1), в котором $B(t, x) = B$, $F(t) \equiv 0$, т. е. уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + Bu(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.1)$$

где t — время, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $u(t) \in \mathbb{R}^N$ — возмущение, B — $n \times N$ -мерная матрица, f — $n \times n$ -мерная матричная функция, непрерывная по t и липшицева по x . Траектория системы $x(\cdot)$ зависит от меняющегося во времени входного воздействия (возмущения) $u(\cdot)$. Это воздействие, как и траектория, заранее не заданы. Предполагается, что непрерывно производятся наблюдения (измерения) фазового состояния системы (6.1), в результате чего определяются векторы $\xi^h(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $n_1 \leq n$ со свойствами

$$|\xi^h(t) - \{x(t)\}_{n_1}|_{n_1} \leq h, \quad t \in T. \quad (6.2)$$

Величина $h \in (0, 1)$, как и всюду ранее, характеризует точность измерения, $\{x\}_{n_1}$ — вектор, составленный из первых n_1 координат вектора x , а $|\cdot|_n$ — евклидова норма в пространстве \mathbb{R}^n .

Задача непрерывного оценивания заключается в построении алгоритма приближенного восстановления неизвестного возмущения $u(\cdot)$.

Сначала обратимся к случаю измерения всех фазовых координат системы (6.1). Именно, будем считать $n_1 = n$. Следовательно, результаты наблюдений — n -мерные векторы $\xi^h(t)$ со свойствами

$$|\xi^h(t) - x(t)|_n \leq h, \quad t \in T.$$

Пусть $c[f]$ — постоянная Липшица функции f , т. е.

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)|_n \leq c[f]|x_1 - x_2|_n \quad \forall t \in T, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Введем вспомогательную функцию $\alpha(h) \in (0, 1)$, обладающую следующим свойством:

$$\alpha(h) \rightarrow 0, \quad h^{2/3}\alpha^{-1}(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (6.3)$$

В качестве уравнения непрерывного оценивания, как видно из приведенной ниже теоремы 6.2, можно взять управляемую систему вида

$$\dot{w}^h(t) = f(t, w^h(t)) + Bv^h(t) + u^h(t), \quad t \in T \quad (6.4)$$

с начальным состоянием $w^h(t_0) = \xi^h(t_0)$. Введем обозначения $\Phi_h(t) = \xi^h(t) - w^h(t)$, $\chi_h(t) = u_*(t) - v^h(t)$.

Управления $v^h(t)$ и $u^h(t)$ в системе (6.4) зададим следующим образом:

$$v^h(t) = \alpha^{-1}B'\Phi_h(t), \quad u^h(t) = c[f]\Phi_h(t).$$

Пусть, как и всюду выше, $u_*(\cdot) = u_*(\cdot; x(\cdot))$ — элемент множества $U(x(\cdot))$ минимальной $L_2(T; \mathbb{R}^N)$ -нормы, $U(x(\cdot))$ — множество всех управлений $u(\cdot)$, совместимых с выходом $x(\cdot)$, т. е.

$$U(x(\cdot)) = \left\{ u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N): x(t) = x_0 + \int_0^t \{f(\tau, x(\tau)) + Bu(\tau)\} d\tau \quad \forall t \in T \right\}.$$

Заметим, что множество $U(x(\cdot))$ выпукло и замкнуто в $L_2(T; \mathbb{R}^N)$. Поэтому элемент $u_*(\cdot)$ определен и единственен.

Теорема 6.1 [10]. Пусть выполнены условия (6.3). Тогда имеет место сходимость

$$v^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot) \quad \text{в } L_2(T; \mathbb{R}^N) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Рассмотрим случай измерения части координат фазового вектора ($n_1 < n$). Пусть y — вектор, составленный из n_1 первых координат вектора x , а z — вектор, составленный из оставшихся $n - n_1$ координат вектора x . Таким образом, $x = (y, z)$. Пусть

$$f(t, x) = f(t, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(t, y) + Cz \\ f_2(t, y, z) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix},$$

причем $n_1 > 0.5n$ и ранг $n_1 \times (n - n_1)$ -мерной матрицы C равен $n - n_1$, а матрица D имеет размерность $(n - n_1) \times N$. В этом случае систему (6.1) можно переписать в виде

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t)) + Cz(t), \quad \dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t)) + Du(t).$$

При этом неравенства (6.2) примут вид

$$|\xi^h(t) - x_1(t)|_{n_1} \leq h, \quad t \in T, \quad \xi^h(t) \in \mathbb{R}^{n_1}.$$

Будем считать также, что в начальный момент времени измеряется все начальное состояние системы, т. е. определяется вектор $\xi_0^h = (\xi_{10}^h, \xi_{20}^h) \in \mathbb{R}^n$ такой, что $|\xi_0^h - x(t_0)|_n \leq h$. В качестве уравнения непрерывного оценивания возьмем систему

$$\begin{aligned} \dot{w}_1^h(t) &= f_1(t, w_1^h(t)) + Cv_1^h(t) + u_1^h(t), \\ \dot{w}_2^h(t) &= f_2(t, w_1^h(t), w_2^h(t)) + Dv_2^h(t) + u_2^h(t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

с управлениями вида

$$\begin{aligned} v_1^h(t) &= h^{-4/9}C'\chi_1^h(t), \quad u_1^h(t) = c[f]\chi_1^h(t), \\ v_2^h(t) &= \alpha^{-1}D'\chi_2^h(t), \quad u_2^h(t) = 2c[f]\chi_2^h(t), \end{aligned}$$

где

$$\chi_1^h(t) = \xi^h(t) - w_1^h(t), \quad \chi_2^h(t) = v_1^h(t) - w_2^h(t),$$

$\alpha = \alpha(h)$ — вспомогательный параметр. За начальное состояние системы (6.5) примем ξ_0^h , т. е.

$$w_1^h(t_0) = \xi_{10}^h, \quad w_2^h(t_0) = \xi_{20}^h.$$

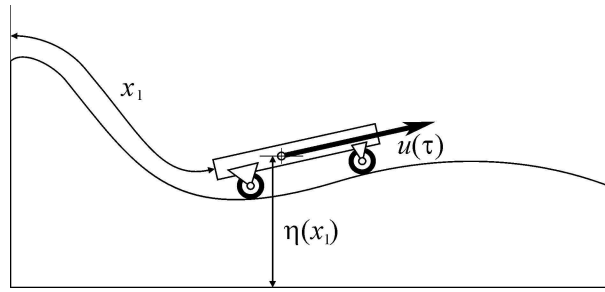


Рис. 6.1. Схема движения тела по рельефной местности.

Теорема 6.2 [10]. Пусть $\alpha = \alpha(h) = h^{1/18}$. Тогда имеют место сходимости

$$v_1^h(\cdot) \rightarrow x_2(\cdot) \quad \text{в } L_2(T; \mathbb{R}^{n_1}), \quad (6.6)$$

$$v_2^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot) \quad \text{в } L_2(T; \mathbb{R}^{n-n_1}) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (6.7)$$

Для доказательства теоремы сначала устанавливаются оценки

$$\sup_{t \in T} |x_1(t) - w_1^h(t)|_{n_1} \leq \nu^2(h),$$

$$|v_1^h(\cdot) - x_2(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^{n_1})} \leq \nu(h) = Kh^{1/9}, \quad k = \text{const} > 0,$$

из которых следует соотношение (6.6). Для доказательства (6.7) в свою очередь устанавливаются неравенства

$$\sup_{t \in T} |x_2(t) - w_2^h(t)|_{n-n_1}^2 \leq d_0 h^{1/18}, \quad \int_{t_0}^{\vartheta} |v_2^h(\tau)|_N^2 d\tau \leq \int_{t_0}^{\vartheta} |u_*(\tau)|_N d\tau + d_1 h^{1/36},$$

$$d_0, d_1 = \text{const} > 0.$$

Рассмотрим пример. Пусть тело движется по местности, рельеф которой известен, под действием силы тяги $u = u(t)$, $t \in T$ (см. рис. 6.1). Сила тяжести не учитывается. По ходу движения поступают приближенные данные о фазовом положении тела. Требуется синхронно с движением тела вычислять силу тяги u .

Обратимся к простейшей модели этой ситуации, когда материальная точка движется по гладкой кривой под действием силы, направленной по касательной к этой кривой. Уравнения движения имеют вид [11]

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -\beta \eta'(x_1(t)) + u(t). \quad (6.8)$$

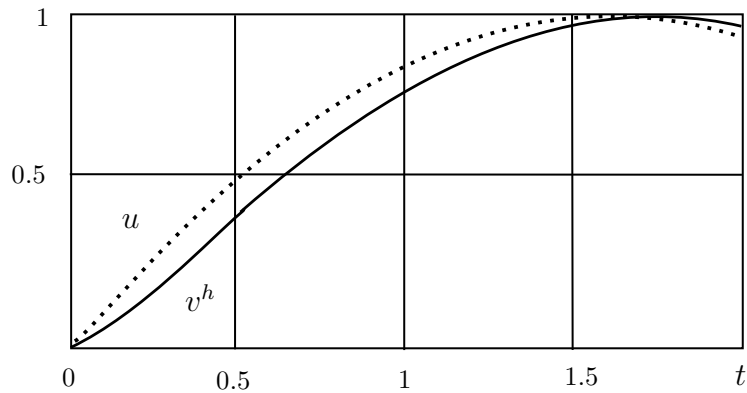
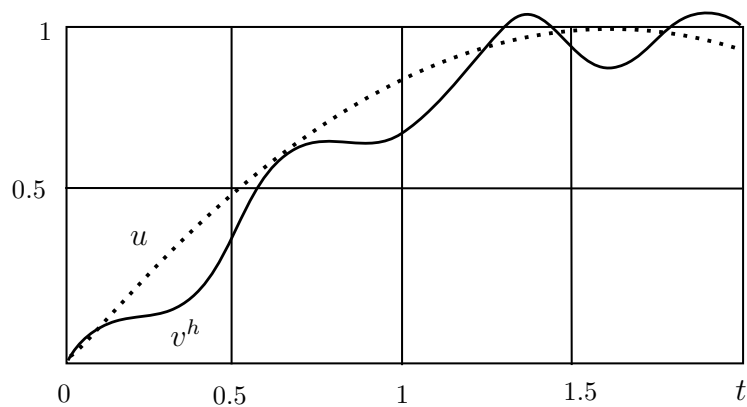
Здесь x_1 — криволинейная координата, определяющая положение точки, x_2 — скорость изменения координаты, $\eta = \eta(x_1)$ — гладкая функция (полагаем ее липшицевой функцией с постоянной Липшица $c[f]$), $\eta'(x_1)$ — производная функции $\eta(x_1)$ по x_1 , β — постоянный коэффициент. Примем, что время движения T задано. В моменты времени $t \in T$ измеряется (с ошибкой) состояние $x_2(t)$. Результаты измерения $\xi^h(t)$ имеют погрешность h :

$$|x_2(t) - \xi^h(t)| \leq h,$$

($|a|$ — модуль числа a). Требуется выписать уравнение непрерывного оценивания силы $u(t)$.

Согласно описанному выше правилу это уравнение имеет вид

$$\dot{w}_1^h(t) = w_2^h(t), \quad \dot{w}_2^h(t) = -\beta \eta'(w_1^h(t)) + v^h(t) + u^h(t), \quad (6.9)$$

Рис. 6.2. Результаты вычислений для $h = 10^{-3}$.Рис. 6.3. Результаты вычислений для $h = 10^{-2}$.

где

$$v^h(t) = \alpha^{-1}(\xi^h(t) - w_2^h(t)), \quad u^h(t) = c[f](\xi^h(t) - w_2^h(t)).$$

Для случая

$$\alpha = 0.1, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad T = 2, \quad \eta(x_2) = 0$$

системы (6.8) и (6.9) решались методом Эйлера с шагом 10^{-4} . Результаты показаны на рис. 6.2, 6.3 при $h = 10^{-3}$ и $h = 10^{-2}$ соответственно. Пунктирная линия отвечает возмущению $u(t)$, а сплошная — управлению $v^h(t)$.

7. О реконструкции входа на бесконечном промежутке времени

В настоящем разделе мы рассмотрим динамическую систему, описываемую обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0. \quad (7.1)$$

Здесь $t \in T = [0, +\infty)$ — переменная времени, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^N$ — соответственно состояние системы и значение динамического возмущения в момент t ; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное состояние системы; B — $n \times N$ -мерная матрица. Значения $u(t)$ возмущения заранее не заданы и подчинены априорному ограничению $u(t) \in P$ ($t \geq 0$), где P — заданное выпуклое, ограниченное и

замкнутое множество в \mathbb{R}^N . Всякую измеримую по Лебегу функцию $u(\cdot) : [0, +\infty) \mapsto P$ будем называть *допустимым возмущением*.

Предположим, что в каждый момент времени t измеряется текущее состояние $x(t)$ системы (7.1). Результат $\xi(t)$ измерения, вообще говоря, неточен и удовлетворяет оценке

$$\int_0^{+\infty} |\xi(t) - x(t)|_n dt \leq d_* h, \quad (7.2)$$

где $h \in (0, 1)$ — малый параметр измерительной погрешности, $d_* = \text{const} > 0$. Наряду с условием (7.2) будем также считать выполненным условие

$$|\xi(0) - x_0|_n \leq h. \quad (7.3)$$

Обратим внимание на тот факт, что все описанные выше алгоритмы устойчивого динамического обращения рассчитаны на приближение возмущения на ограниченном отрезке времени $[0, \vartheta]$. С возрастанием длины ϑ этого отрезка происходит накопление вычислительных и измерительных ошибок, и при стремлении ϑ к бесконечности качество приближения бесконечно ухудшается. Качество приближения, о котором идет речь, оценивается двумя критериями — во-первых, величиной равномерного (на $[0, \vartheta]$) отклонения траекторий системы (7.1), отвечающих истинному возмущению $u(\cdot)$ и построенному приближению $v^h(\cdot)$ этого возмущения; во-вторых, разностью среднеквадратичных норм функций $v^h(\cdot)$ и $u(\cdot)$ (на $[0, \vartheta]$). Выбор этих двух критериев обусловлен тем, что малость их значений (для второго критерия — лишь в случае его положительности) влечет за собой близость приближения $v^h(\cdot)$ к возмущению $u(\cdot)$ в среднеквадратичной норме на отрезке $[0, \vartheta]$, если матрица B имеет ранг N . Бесконечное ухудшение качества приближения понимается как тот факт, что при $\vartheta \rightarrow +\infty$ значения обоих критериев могут стремиться к бесконечности.

Ниже мы опишем алгоритм устойчивого динамического обращения системы (7.1), свободный от этого недостатка; данное свойство алгоритма назовем *грубостью*.

Далее предполагаем выполненным следующее

Условие 7.1. *Матрица A устойчива.*

Как известно, при выполнении условия 7.1 существует симметричная положительно определенная $n \times n$ -матрица Q такая, что функция Ляпунова $V : x \mapsto V(x) = x'Dx$ (D — положительно определенная матрица) обладает свойством

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)' Ax + x'Qx = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Зафиксируем число $k > 0$ такое, что

$$x'Qx \geq k|x|_n^2 \quad (x \in \mathbb{R}^n). \quad (7.4)$$

Введем также систему

$$\dot{w}^h(t) = Aw^h(t) + Bv^h(t), \quad t \in T, \quad (7.5)$$

с начальным условием $w^h(0) = \xi(0)$ и управлением $v^h(\cdot) \in P(\cdot)$. Здесь символ $P(\cdot)$ означает множество измеримых (по Лебегу) функций $v(\cdot) : [0, +\infty) \rightarrow P$. Назовем систему (7.5) моделью.

Всякую суммируемую функцию $\xi(\cdot) : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ будем называть *допустимым измерением, имеющим точность h* ($h > 0$), если для $\xi(\cdot)$ справедливы оценки (7.2), (7.3), где $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$.

Будем считать, что фазовые состояния $w^h(t)$, $t \geq 0$, модели (7.5) наблюдаются точно и изменяются под воздействием значений целенаправленно формируемой обратной связи

$\mathcal{U}(w^h(t), \xi(t)) \in P$, “имитирующей” значения $u(t)$ ненаблюдаемого возмущения в системе (7.1). Движение модели (7.5) таким образом зависит от результатов $\xi(t)$ измерения траектории системы (7.1) и подчиняется следующим дифференциальному уравнению и начальному условию:

$$\dot{w}^h(t) = Aw^h(t) + B\mathcal{U}(w^h(t), \xi(t)), \quad w^h(0) = \xi(0). \quad (7.6)$$

Всякую непрерывную функцию $\mathcal{U}(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto P$ будем называть *допустимой обратной связью* (для модели (7.6)). Для любой допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot, \cdot)$ и любого допустимого измерения $\xi(\cdot)$, очевидно, существует определенное на $[0, +\infty)$ решение $w^h(\cdot)$ задачи Коши (7.6), которое будем называть *траекторией модели*, соответствующей допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot, \cdot)$ и допустимому измерению $\xi(\cdot)$.

Для любых допустимых возмущений $u(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$ ($v^h(\cdot)$ мыслится как построенное приближение ненаблюдаемого возмущения $u(\cdot)$) введем следующие два критерия отклонения $v^h(\cdot)$ от $u(\cdot)$ на каком-либо ограниченном отрезке времени $[0, \vartheta]$:

$$\omega_1(v^h(\cdot), u(\cdot)|\vartheta) = \max_{t \in [0, \vartheta]} \left| w^h(t; t_0, x_0, v^h(\cdot)) - x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) \right|_n, \quad (7.7)$$

$$\omega_2(v^h(\cdot), u(\cdot)|\vartheta) = \int_0^{\vartheta} |v^h(t)|_N^2 dt - \int_0^{\vartheta} |u(t)|_N^2 dt. \quad (7.8)$$

Здесь символы $x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ и $w^h(\cdot; t_0, x_0, v^h(\cdot))$ означают решения системы (7.1) и модели (7.6), порождаемые входами $u(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$ соответственно.

Управляемым процессом, соответствующим допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot, \cdot)$, допустимому возмущению $u(\cdot)$ и измерительной точности h ($h > 0$) будем называть всякую четверку $(x(\cdot), \xi(\cdot), w^h(\cdot), v^h(\cdot))$, где $x(\cdot) = x^*(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ — решение (траектория) системы (7.1), $\xi(\cdot)$ — допустимое измерение точности h , соответствующее $u(\cdot)$, $w^h(\cdot)$ — траектория модели (7.6), соответствующая $\mathcal{U}(\cdot, \cdot)$ и $\xi(\cdot)$, а функция $v^h(\cdot) : [0, +\infty) \rightarrow P$ имеет вид $v^h(t) = \mathcal{U}(w^h(t), \xi(t))$ ($t \geq 0$). Функцию $u(\cdot)$ (которая, очевидно, лежит в классе всех допустимых возмущений) будем при этом называть *реализацией* допустимой стратегии $\mathcal{U}(\cdot, \cdot)$, соответствующей допустимому возмущению $u(\cdot)$ и измерительной точности h . Последняя функция играет роль приближения возмущения $u(\cdot)$.

Инструментом решения рассматриваемой задачи является семейство $(\mathcal{U}_h(\cdot, \cdot))_{h>0}$ допустимых обратных связей. Это семейство будем называть *грубо обращающим*, если найдутся такие функции $\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot) : (0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$, что а) $\gamma_1(h), \gamma_2(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и б) для всякого допустимого возмущения $u(\cdot)$, всякого $h > 0$ и всякой реализации $v^h(\cdot)$ допустимой обратной связи $\mathcal{U}_h(\cdot, \cdot)$

$$v^h(t) = \mathcal{U}_h(w^h(t), \xi(t)) \quad (7.9)$$

($w^h(t) = w^h(t; t_0, x_0, v^h(\cdot))$ — траектория модели (7.6)), соответствующей возмущению $v^h(\cdot)$ вида (7.9), выполняются неравенства (см. (7.7), (7.8))

$$\sup_{\vartheta \geq 0} \omega_1(v^h(\cdot), u(\cdot)|\vartheta) \leq \gamma_1(h), \quad \sup_{\vartheta \geq 0} \omega_2(v^h(\cdot), u(\cdot)|\vartheta) \leq \gamma_2(h).$$

Пару $(\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot))$ будем при этом называть *векторной оценкой точности* семейства $(\mathcal{U}_h(\cdot, \cdot))_{h>0}$. Рассматриваемая основная задача о грубом обращении системы (7.1) состоит в построении грубо обращающего семейства допустимых обратных связей.

Коротко остановимся на причинах, побудивших нас взять в качестве критериев отклонения $\bar{v}(\cdot)$ от $u(\cdot)$ на отрезке $[0, \vartheta]$ функции $\omega_1(\cdot)$ и $\omega_2(\cdot)$ видов (7.7) и (7.8) соответственно. Пусть $\Omega_\vartheta(x(\cdot))$ означает множество всех возмущений

$$v(\cdot) \in P_\vartheta(\cdot) = \left\{ v(\cdot) \in L_2([0, \vartheta]; \mathbb{R}^N) : v(t) \in P \text{ при п.в. } t \in [0, \vartheta] \right\},$$

порождающих траекторию $x(t)$, $t \in [0, \vartheta]$, системы (7.1), т. е.

$$\Omega_{\vartheta}(x(\cdot)) = \left\{ v(\cdot) \in P_{\vartheta}(\cdot): x(t; t_0, x_0, v(\cdot)) = x(t), t \in [0, \vartheta] \right\}.$$

Обозначим символом $v_{\vartheta}(\cdot)$ минимальное (в смысле нормы пространства $L_2([0, \vartheta]; \mathbb{R}^N)$) возмущение из множества $\Omega_{\vartheta}(x(\cdot))$. В силу выпуклости и компактности множества P такое возмущение единственно. Пусть взяты последовательности чисел $\{h_j\}$, $h_j \rightarrow +0$ при $j \rightarrow +\infty$, $\{\bar{v}_{\vartheta}^{h_j}(\cdot)\} \in P_{\vartheta}(\cdot)$, $\bar{v}_{\vartheta}^{h_j}(\cdot)$ сходится слабо в $L_2([0, \vartheta]; \mathbb{R}^N)$ при $j \rightarrow +\infty$ к некоторому возмущению. Тогда, как следует из результатов [3], соотношения

$$\omega_1(\bar{v}_{\vartheta}^{h_j}(\cdot), v_{\vartheta}(\cdot)|\vartheta) \leq \gamma_1(h_j), \quad \omega_2(\bar{v}_{\vartheta}^{h_j}(\cdot), v_{\vartheta}(\cdot)|\vartheta) \leq \gamma_2(h_j)$$

влекут сильную сходимость $\bar{v}_{\vartheta}^{h_j}(\cdot)$ к $v_{\vartheta}(\cdot)$ в $L_2([0, \vartheta]; \mathbb{R}^N)$ при $j \rightarrow +\infty$. Если же матрица B имеет ранг N и $v(t) = B^{-1}(\dot{x}(t) - Ax(t)) \in P$, $t \in [0, \vartheta]$, то $\bar{v}_{\vartheta}^{h_j}(\cdot)$ сходится к истинному управлению $v_{\vartheta}(\cdot)$, действующему на систему (7.1).

Укажем алгоритм решения задачи. Зафиксируем положительную функцию $\alpha(\cdot)$ положительного аргумента. Для каждого $h > 0$, используя ранее введенную матрицу D , положим

$$\mathcal{U}_h(y, \xi) = \arg \min \left\{ 2(D(y - \xi))' B v + \alpha(h) |v|_N^2 : v \in P \right\} \quad (y, \xi \in \mathbb{R}^n). \quad (7.10)$$

Легко видеть, что $\mathcal{U}_h(\cdot, \cdot)$ есть допустимая обратная связь. Имеет место

Лемма 7.1 [12]. Пусть выполнено условие 7.1, $h > 0$ и $(x(\cdot), \xi(\cdot), w^h(\cdot), v^h(\cdot))$ — управляемый процесс, соответствующий допустимой обратной связи $\mathcal{U}_h(\cdot, \cdot)$, допустимому возмущению $u(\cdot)$ и измерительной точности h . Тогда при всех $t \geq 0$

$$\int_0^t |v^h(\tau)|_N^2 d\tau - \int_0^t |u(\tau)|_N^2 d\tau \leq \frac{|(\xi(0) - x_0)' D(\xi(0) - x_0)|_n + 2c_1 h}{\alpha(h)}, \quad (7.11)$$

$$|w^h(t) - x(t)|_n \leq \chi_2 \left[|(\xi(0) - x_0)' D(\xi(0) - x_0)|_n e^{-\chi_1 t} + 2c_1 \left(\frac{\alpha(h)}{\chi_1} + 2h \right) \right]^{1/2}, \quad (7.12)$$

где

$$c_1 = 2\|D\| \max\{|Bv|_n : v \in P\}, \quad \chi_1 = k\chi_2, \quad \chi_2 = \min_{|w|_n=1} |D^{-1}w|_n,$$

число k определено в (7.4).

З а м е ч а н и е 7.1. В случае, когда $h/\alpha(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и указанное выше измерение $\xi(\cdot)$ (соответствующее допустимому возмущению $v(\cdot)$) имеет точность h , т. е. выполняется неравенство $|\xi(0) - x_0|_n \leq h$, при малом h правые части неравенств (7.11) и (7.12) малы равномерно относительно $t \geq 0$. Следовательно, допустимая обратная связь $\mathcal{U}_h(\cdot, \cdot)$ решает задачу о приближенном отслеживании управляемой моделью (7.6) неточно измеряемого движения системы (7.1) на полуинтервале времени $[0, +\infty)$ при том дополнительном условии, что на любом конечном отрезке времени $[0, t]$ среднеквадратичная норма управления $v^h(\cdot)$ модели (приближенно) не превосходит среднеквадратичной нормы действующего на систему не наблюдаемого возмущения $u(\cdot)$. Для ряда механических систем данная задача может иметь смысл задачи о приближенном устойчивом моделировании в темпе реального времени возмущенного движения системы с одновременной (приближенной) минимизацией энергетического расхода.

Из леммы 7.1 следует основное утверждение, доставляющее решение поставленной выше задачи о грубом обращении системы (7.1).

Теорема 7.1 [12]. Пусть $h/\alpha(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Тогда семейство $(\mathcal{U}_h(\cdot, \cdot))_{h>0}$ допустимых обратных связей вида (7.10) является грубо обращающим, и пара $(\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot))$, где

$$\gamma_1(h) = \chi_2 \|D\| h + \chi_2 \left[\|D\| h^2 + 2c_1 \left(\frac{\alpha(h)}{\chi_1} + 2h \right) \right]^{1/2},$$

$$\gamma_2(h) = \frac{\|D\|^2 h^2 + 2c_1 h}{\alpha(h)} \quad (h > 0),$$

есть векторная оценка точности этого семейства.

В качестве модельного примера, иллюстрирующего описанный алгоритм, рассмотрим колебательное звено

$$\ddot{w}(t) + 2l\dot{w}(t) + \omega_0^2 w(t) = u(t), \quad t \in [0, +\infty); \quad (7.13)$$

$$l = \text{const} > 0, \quad \omega_0 \neq 0, \quad w(0) = w_0, \quad \dot{w}(0) = w_1.$$

Пусть $P = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq K\}$, где $K = \text{const}$. Полагая $x_1 = w$, $x_2 = \dot{w}$, мы приходим к системе вида (7.1)

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -\omega_0^2 x_1(t) - 2lx_2(t) + u(t).$$

Пусть матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 2l^2 + \omega_0^2 & l \\ l & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве модели (7.6) возьмем систему

$$\dot{w}_1^h(t) = w_2^h(t), \quad \dot{w}_2^h(t) = -\omega_0^2 w_1^h(t) - 2lw_2^h(t) + \mathcal{U}_h(t) \quad (7.14)$$

с начальным условием

$$w_1^h(0) = w_0, \quad w_2^h(0) = w_1.$$

При моделировании обе системы, (7.13) и (7.14), решались методом Эйлера с шагом δ . Векторы $\xi^h(\tau_i) = \{\xi_{1i}^h, \xi_{2i}^h\} \in \mathbb{R}^2$ вычислялись в моменты $\tau_i = \delta_i$ по формулам

$$\xi_{1i}^h = x_1(\tau_i) + h \sin(1 + C\tau_i), \quad \xi_{2i}^h = x_2(\tau_i) + h \sin(1 + C\tau_i).$$

Управление \mathcal{U}_h в системе (7.14) вычислялось по формуле (7.10), т. е. в моменты τ_i вычислялись величины

$$\mathcal{U}_h(w^h(\tau_i), \xi(\tau_i)) = \begin{cases} -K, & s_i \geq \alpha K, \\ s_i \alpha^{-1}, & -\alpha K \leq s_i \leq \alpha K, \\ K, & s_i \leq -\alpha K; \end{cases}$$

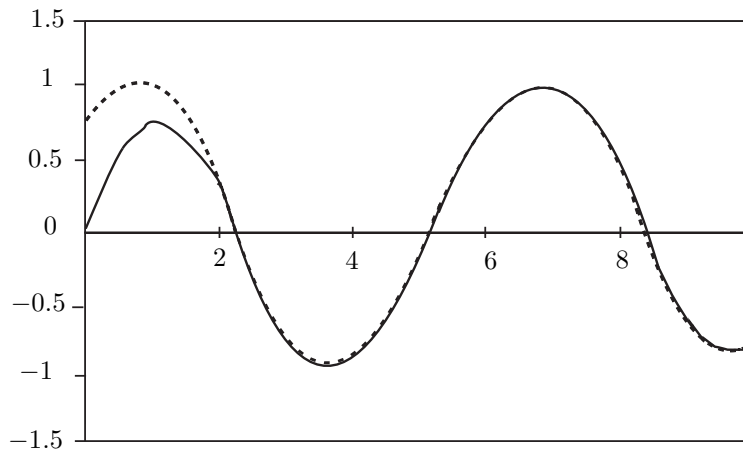
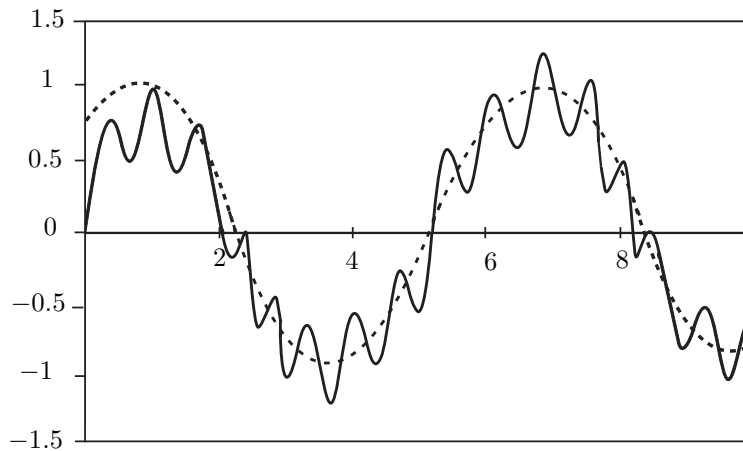
$$s_i = l(w_1^h(\tau_i) - \xi_{1i}) + (w_2^h(\tau_i) - \xi_{2i}).$$

Предполагалось

$$l = 0.2, \quad \omega_0 = 1, \quad K = 2, \quad C = 10, \quad \delta = 0.01, \quad \alpha = 0.5.$$

На рис. 7.1 и 7.2 представлена эволюция управлений $u(t) = \sin(1 + t)$ и $\mathcal{U}_h(w^h(t), \xi(t))$ при двух значениях параметра h .

Рис. 7.1 и 7.2 отвечают $h = 0.01$ и $h = 0.1$, соответственно. Сплошной линией изображено управление $u(t)$, пунктирной — управление $\mathcal{U}_h(w^h(t), \xi(t))$.

Рис. 7.1. Эволюция управлений при $h = 0.01$.Рис. 7.2. Эволюция управлений при $h = 0.1$.

8. Восстановление неизвестных характеристик биореактора с подпиткой

Содержательный пример, обсуждаемый в данном разделе, связан с работами [13; 14], в которых рассматривается задача оптимального планирования эксперимента при моделировании биореактора.

Пусть концентрация растворенного кислорода в подпитке соответствует уровню насыщения, т. е. она не подвергается воздействию бактерий, которые, по предположению, отсутствуют в подпитке. Потребление субстрата бактериями в реакторе является аэробным и непосредственно влияет на концентрацию растворенного кислорода в реакторе. Тогда следующая нелинейная динамическая модель описывает биохимические процессы в реакторе [13; 14]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dC_{DO}(t)}{dt} &= k_{La}(C_{sat}^{en} - C_{DO}(t)) - OUR(t) + \frac{F_{in}(t)}{V(t)}(C_{sat} - C_{DO}(t)), \\
 \frac{dC_X(t)}{dt} &= \mu(C_S(t))C_X(t) - \frac{F_{in}(t)}{V(t)}C_X(t), \\
 \frac{dC_S(t)}{dt} &= -\frac{\mu(C_S(t))}{Y}C_X(t) + \frac{F_{in}(t)}{V(t)}(C_{S,in}(t) - C_S(t)),
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

где

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_0^t F_{\text{in}}(\tau) d\tau + V(t_0), \\ \text{OUR}(t) &= \frac{(1-Y)}{Y} \mu(C_S(t)) C_X(t), \\ \mu(C_S(t)) &= \mu_{\text{max}}(t) \frac{C_S(t)}{K_S + C_S(t)}, \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \end{aligned}$$

Здесь и ниже k_{La} — коэффициент аэрирования, $V(t)$ — объем реактора, $C_{\text{sat}}^{\text{en}}$ — концентрация растворенного кислорода на уровне насыщения, включая малую (постоянную) коррекцию для эндогенного дыхания биомассы, C_{sat} — (нормальная) концентрация растворенного кислорода на уровне насыщения в подпитке, $\mu_{\text{max}}(t)$ — коэффициент максимальной скорости роста, K_S — постоянная полунасыщения, Y — коэффициент текучести биомассы на субстрате, $\text{OUR}(t)$ — скорость поглощения кислорода биомассой в реакторе, $C_{\text{DO}}(t)$ — концентрация растворенного кислорода в реакторе, $C_X(t)$ — концентрация биомассы, $C_S(t)$ — скорость роста биомассы. Заметим, что в (8.1) величина $\mu_{\text{max}}(t)$ является меняющимся во времени параметром. Чаще всего этот параметр меняется вследствие адаптации организмов, дополнительных ограничений на субстрат или в общем вследствие погрешностей кинетического моделирования.

Заметим, что первое уравнение в (8.1) описывает концентрацию растворенного кислорода в реакторе, причем первое слагаемое в правой части представляет естественное аэрирование, второе — поглощение кислорода аэробной биомассой и последнее — подпитку и разбавление растворенного кислорода. Второе уравнение в (8.1) описывает динамику биомассы; здесь первое слагаемое в правой части описывает рост биомассы, а последнее — разбавление. Это первое слагаемое, отвечающее за рост, с некоторым коэффициентом текучести (Y) также присутствует в третьем уравнении в (8.1), но в качестве слагаемого, характеризующего элемент поглощения в балансе субстрата.

Далее полагаем, что имеются *данные только по растворенному кислороду* и нет никакой информации ни по биомассе, ни по субстрату. Эти ограниченные информативные возможности являются причиной некорректности задачи восстановления коэффициента $\mu_{\text{max}}(\cdot)$ и состояний $C_X(\cdot)$, $C_S(\cdot)$. В дальнейшем основное внимание уделим одновременному оцениванию $\mu_{\text{max}}(\cdot)$, концентрации биомассы $C_X(\cdot)$ и скорости роста биомассы $C_S(\cdot)$ на основе неточных измерений концентрации растворенного кислорода $C_{\text{DO}}(t)$. Поэтому будем считать, что параметры $V(t_0)$, Y , K_S , $C_X(t_0)$, $C_S(t_0)$, $C_{\text{sat}}^{\text{en}}$, C_{sat} , k_{La} и функции $F_{\text{in}}(\cdot)$, $C_{S,\text{in}}(\cdot)$ либо уже оценены априори, либо взяты из литературы, имеющейся в достаточном количестве.

Рассматриваемая задача состоит в следующем. Известная функция (коэффициент) $\mu_{\text{max}}(\cdot)$ действует на систему (8.1), порождая некоторое (неизвестное) решение

$$C(t) = C(t; C_0, \mu_{\text{max}}) = (C_{\text{DO}}(t), C_X(t), C_S(t)),$$

где $C_0 = (C_{\text{DO}}(t_0), C_X(t_0), C_S(t_0))$ — начальное состояние системы, которое мы считаем известным. Промежуток времени T разбит на подинтервалы $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\delta > 0$, $i \in [0 : m]$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$. В дискретные моменты времени τ_i координата $C_{\text{DO}}(\tau_i)$ измеряется с ошибкой, т. е. находятся числа ξ_i^h такие, что справедливы неравенства

$$|C_{\text{DO}}(\tau_i) - \xi_i^h| \leq h$$

для всех $i \in [1 : m]$. Здесь и всюду ниже символ $|x|$ означает абсолютную величину числа a . Требуется сконструировать алгоритм вычисления функций $v(\cdot) = v^h(\cdot)$ и $w^h(\cdot) = \{w_1^h(\cdot), w_2^h(\cdot)\}$, аппроксимирующих $\mu_{\text{max}}(\cdot)$ и $C_X(\cdot)$, $C_S(\cdot)$ соответственно.

В дальнейшем полагаем известным число $K \in (0, +\infty)$ такое, что неизвестные функции $\mu_{\text{max}}(\cdot)$ и $\text{OUR}(\cdot)$ стеснены следующими ограничениями:

$$\text{OUR}(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}), \quad \mu_{\text{max}}(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}),$$

$$|\text{OUR}(t)| \leq K \quad \text{при п.в. } t \in T.$$

Будем считать выполненным

Условие 8.1. $b_0 \leq F_{\text{in}}(t) \leq b_1$ при почти всех $t \in T$, $0 \leq b_0 \leq b_1$,

$$Y \in (0, 1), \quad V(t) \geq V_0 > 0, \quad C_{\text{S,in}}(t) \in C^1(T; \mathbb{R}), \quad F_{\text{in}}(t) \in L_\infty(T; \mathbb{R}),$$

$$C_X(t) \geq C_X > 0, \quad C_S(t) \geq C_S > 0.$$

В дальнейшем полагаем функцию $V(t)$ известной.

Для решения задачи применим метод, развитый выше. Следуя этому методу, сначала выберем и зафиксируем семейство

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = t_0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad (8.2)$$

$$\tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad m_h = (\vartheta - t_0)\delta^{-1}(h)$$

разбиений промежутка времени T с диаметрами

$$\delta(h) = \delta(\Delta_h), \quad \delta(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow +0.$$

Здесь h означает величину погрешности измерения. Затем введем вспомогательную систему M , функционирующую синхронно с реальной системой (8.1). В качестве M возьмем дискретную *линейную* систему вида

$$\begin{aligned} w_0^h(\tau_{i+1}) &= w_0^h(\tau_i) + \delta\{k_{\text{La}}(C_{\text{sat}}^{\text{en}} - \xi_i^h) - \varphi_i^h\} + \ln(V(\tau_{i+1})V^{-1}(\tau_i))(C_{\text{sat}} - \xi_i^h), \\ w_1^h(\tau_{i+1}) &= W(\tau_{i+1})C_X(t_0) + V^{-1}(\tau_{i+1})\delta \sum_{j=0}^i V(\tau_j)\psi_j^h, \\ w_2^h(\tau_{i+1}) &= W(\tau_{i+1})C_S(t_0) + C_{\text{S,in}}(\tau_{i+1}) - W(\tau_{i+1})C_{\text{S,in}}(t_0) \\ &\quad - V^{-1}(\tau_{i+1})\left[\sum_{j=0}^i (C_{\text{S,in}}(\tau_{j+1}) - C_{\text{S,in}}(\tau_j))V(\tau_j) + \delta Y^{-1} \sum_{j=0}^i V(\tau_j)\psi_j^h\right] \end{aligned} \quad (8.3)$$

с начальным условием

$$w_0^h(t_0) = \xi_0^h, \quad w_1^h(t_0) = C_X(t_0), \quad w_2^h(t_0) = C_S(t_0).$$

Здесь

$$\psi_i^h = Y\varphi_i^h(1 - Y)^{-1}, \quad \varphi_i^h = \varphi^h(\tau_i), \quad W(\tau_j) = V^{-1}(\tau_j)V(t_0).$$

Таким образом, модель M имеет в качестве входа управление $\varphi^h(\cdot)$, а в качестве выхода — траекторию $w^h(\cdot)$:

$$\varphi^h(t) = \varphi_i^h, \quad w^h(t) = \{w_0^h(t), w_1^h(t), w_2^h(t)\} = w^h(\tau_i), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

где векторы $w^h(\tau_i)$ находятся по формулам (8.3), а закон определения чисел φ_i^h указан ниже.

Перейдем к описанию алгоритма. До момента t_0 фиксируются величина $h \in (0, 1)$, функция $\alpha = \alpha(h): (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R}: r > 0\}$, разбиение $\Delta = \Delta_h$ (8.2) с диаметром $\delta = \delta(\Delta_h)$ и модель (8.3). Затем организуется процесс управления по принципу обратной связи моделью M синхронно с развитием процесса функционирования системы (8.1). Работа алгоритма начинается в момент t_0 и разбивается на $m_h - 1$ однотипных шагов. Во время i -го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, выполняются следующие операции. Сначала находится управление в модели

$$\varphi^h(t) = \varphi_i^h, \quad t \in \delta_i,$$

согласно принципу обратной связи

$$\varphi_i^h = \varphi_i^h(\xi_i^h, w_0^h(\tau_i)) = \begin{cases} -s_i \alpha^{-1}(h), & \text{если } |s_i| \leq \alpha(h)K, \\ -K \operatorname{sign} s_i & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$s_i = \xi_i^h - w_0^h(\tau_i).$$

Затем вычисляется фазовое состояние $w^h(\tau_{i+1})$ модели в момент τ_{i+1} согласно (8.3). После этого функция $v^h(\cdot)$ — приближение функции $\mu_{\max}(\cdot)$ — находится по правилу

$$v^h(t) = v_i^h, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

где

$$v_i^h = v_i^h(\xi_i^h, \varphi_i^h, w^h(\tau_i)) = \frac{Y(K_S + w_2^h(\tau_i))\varphi_i^h}{(1 - Y)w_1^h(\tau_i)w_2^h(\tau_i)}.$$

Алгоритм заканчивает работу в момент ϑ .

Сходимость алгоритма устанавливается в теореме 8.1 (см. ниже). Введем

Условие 8.2. *Найдутся числа $w_1 > 0$ и $w_2 > 0$ такие, что для всех $h \in (0, 1)$ и $t \in T$ выполнены неравенства*

$$w_1^h(t) \geq w_1, \quad w_2^h(t) \geq w_2.$$

Итак, имеет место

Теорема 8.1 [15]. *Пусть выполнены условия 8.1, 8.2, а также условия согласования параметров алгоритма*

$$\alpha(h) \rightarrow 0, \quad (h + \delta(h))\alpha^{-1}(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Тогда имеют место сходимости

$$\sup_{t \in T} |w_1^h(t) - C_X(t)| \rightarrow 0, \quad \sup_{t \in T} |w_2^h(t) - C_S(t)| \rightarrow 0,$$

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(\tau) - \mu_{\max}(\tau)|^2 d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Описанный выше алгоритм был протестирован. Система (8.1) рассматривалась на промежутке времени $T = [0, 3]$. Коэффициент $\mu_{\max}(t)$ равнялся $\sin(t)$. Предполагалось, что мы не знаем $\mu_{\max}(t)$ и хотим его восстановить. Мы также рассчитываем восстановить состояния $C_X(t)$ и $C_S(t)$ по конечному числу измерений эволюции концентрации растворенного кислорода в реакторе $C_{DO}(t)$.

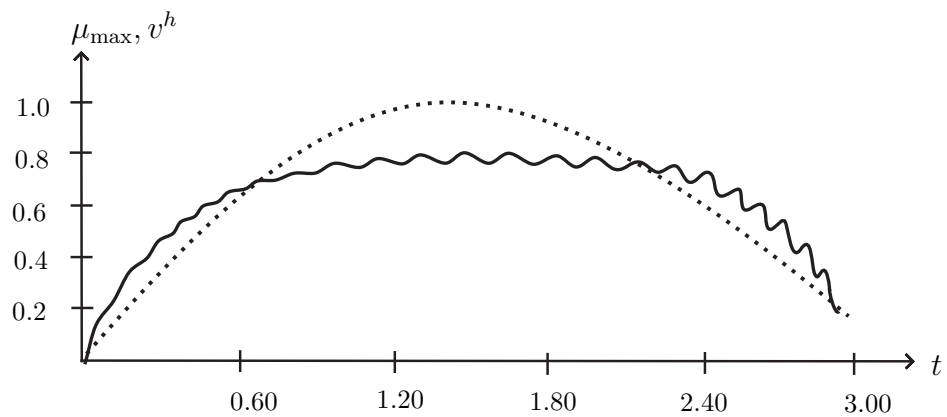
На рис. 8.1, 8.2 приведены результаты вычислительного эксперимента. Предполагалось (см. (8.1)), что

$$\begin{aligned} K_S &= 0.1, & Y &= 0.5, \\ C_{S,\text{in}} &= 0.2, & V(t_0) &= 1.5, \\ F_{\text{in}}(t) &= \sin(t), & C_{\text{sat}}^{\text{en}} &= C_{\text{sat}} = 0.5. \end{aligned}$$

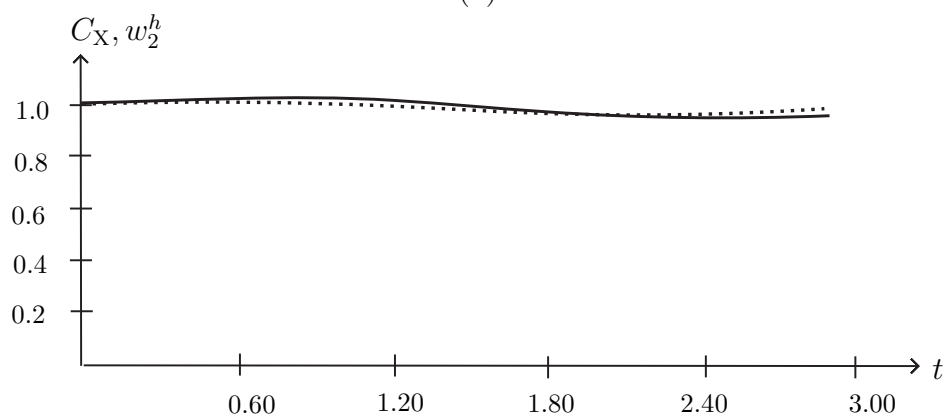
Были взяты следующие параметры алгоритма: $\alpha = 0.001$, $K = 2$. Начальное состояние системы полагалось равным единице, т. е. $C_{DO}(t_0) = C_X(t_0) = C_S(t_0) = 1$.

Система (8.1) решалась методом Эйлера с шагом δ . Результаты вычислительного эксперимента показывают сходимость в среднем квадратичном $v^h(\cdot)$ к $\mu_{\max}(\cdot)$ и равномерную сходимость $w_1^h(\cdot)$ к $C_X(\cdot)$ и $w_2^h(\cdot)$ к $C_S(\cdot)$ при соответствующих значениях параметров α , h и δ .

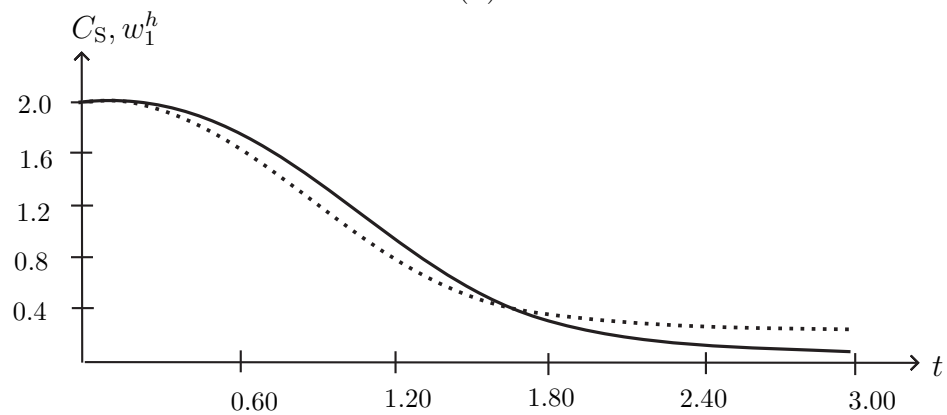
Рис. 8.1 отвечает случаю, когда $h = 10^{-4} \cos(50t)$, $\delta = 10^{-3}$, рис. 8.2 — случаю, когда $h = 0$, $\delta = 10^{-4}$. На рис. 8.1, 8.2 сплошная линия изображает коэффициент $\mu_{\max}(\cdot)$ и состояния $C_X(\cdot)$, $C_S(\cdot)$, пунктирная линия соответствует управлению в модели $v^h(\cdot)$ и координатам вспомогательной системы $w_1^h(\cdot)$ и $w_2^h(\cdot)$.



(a)

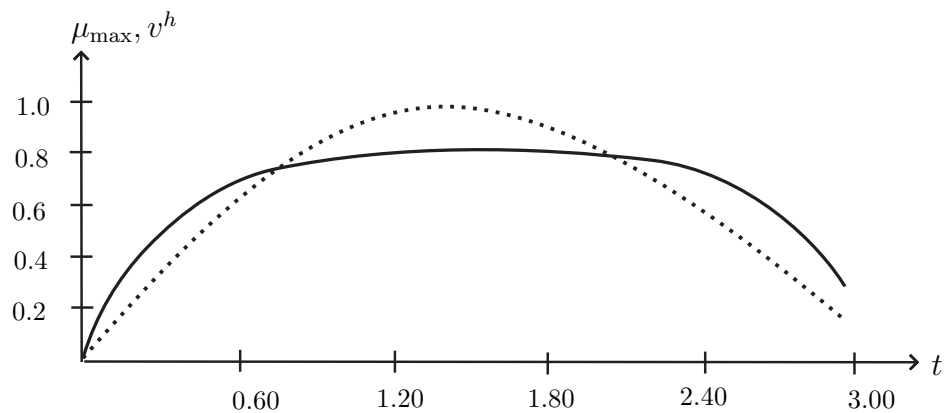


(b)

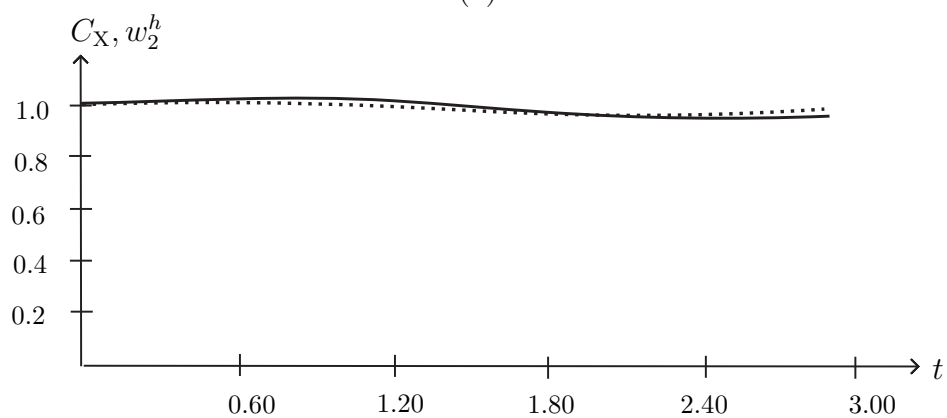


(c)

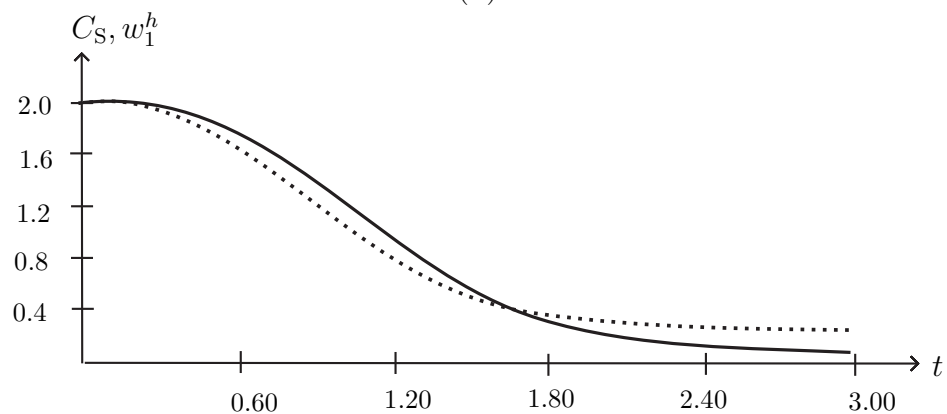
Рис. 8.1. Результаты вычислительного эксперимента, случай $h = 10^{-3} \cos(50t)$, $\delta = 10^{-3}$. Графики: (a) — коэффициент $\mu_{\max}(\cdot)$ и управление в модели $v^h(\cdot)$; (b) — состояние $C_X(\cdot)$ и координата вспомогательной системы $w_2^h(\cdot)$; (c) — состояние $C_S(\cdot)$ и координата вспомогательной системы $w_1^h(\cdot)$.



(a)



(b)



(c)

Рис. 8.2. Результаты вычислительного эксперимента, случай $h = 0$, $\delta = 10^{-4}$. Графики: (a) — коэффициент $\mu_{\max}(\cdot)$ и управление в модели $v^h(\cdot)$; (b) — состояние $C_X(\cdot)$ и координата вспомогательной системы $w_2^h(\cdot)$; (c) — состояние $C_S(\cdot)$ и координата вспомогательной системы $w_1^h(\cdot)$.

9. Заключение

Основная цель статьи — подведение некоторых итогов исследований, выполненных за последние десять лет и связанных с задачами динамического обращения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом мы не касались исследований предыдущих лет, которые отражены в обзорных работах [16; 17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–68.
4. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
5. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
6. **Максимов В.И.** Динамический метод невязки в задаче реконструкции входа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 297–307.
7. **Мартьянов А.С.** О реконструкции управлений по измерению части координат нелинейной динамической системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 4. С. 52–60.
8. **Близорукова М.С., Кодесс А.М.** К проблеме динамического восстановления управления при измерении части координат // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1450–1455.
9. **Максимов В.И.** Об одном алгоритме реконструкции входных воздействий в линейных системах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 5. С. 11–20.
10. **Максимов В.И.** Уравнения непрерывного оценивания возмущений динамических систем // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 5. С. 771–780.
11. **Осипов Ю.С.** Задачи динамического восстановления // Число и мысль. Вып. 10. М.: Знание, 1987. С. 7–27.
12. **Kryazimskii A.V., Maksimov V.I.** On rough inversion of a dynamical system with a disturbance // J. Inv. Ill-Posed Problems. Vol. 15, no. 6. P. 25–34.
13. **Vanrolleghem P.A., Daele M. van.** Optimal experimental design for structure characterization of biodegradation models: On-line implementation in a respirographic biosensor // Water Science and Technology. 1994. Vol. 30, iss. 4. P. 243–253.
14. **Stigter J.D., Vries D., Keesman K.J.** On adaptive optimal input design // Proc. of the European Control Conference. Cambridge, U.K., 2003. Paper 066 (on CD-ROM).
15. **Keesman K.J., Maksimov V.I.** On feedback identification of unknown characteristics: a bioreactor case study // Int. J. Control. Vol. 81, no. 1. P. 134–145.
16. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
17. **Максимов В.И.** Реконструкция входов по измерению части координат // Современная математика и ее приложения. Оптимальное управление. Т. 97. М.: ВИНТИ, 2001. С. 91–110.

Поступила 1.06.2010

Осипов Юрий Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, академик РАН
Президент РАН
Президиум РАН

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Кряжимский Аркадий Викторович
д-р физ.-мат. наук, академик РАН
главный науч. сотрудник
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Международный институт прикладного системного анализа (IIASA),
г. Лаксенбург, Австрия
e-mail: kryazhim@mi.ras.ru