ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 1 2020

УДК 517.977.1

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА МАЛЫХ ВРЕМЕННЫХ ПРОМЕЖУТКАХ

М. И. Гусев

В данной работе изучается задача приближенного описания множеств достижимости на малых временных промежутках для аффинных по управлению систем с изопериметрическими ограничениями на управление. Под изопериметрическим ограничением понимается интегральное ограничение типа неравенства с подынтегральной функцией, зависящей от управляющих параметров и фазовых переменных системы. Ранее подобная задача рассматривалась в предположении, что подынтегральная функция зависит только от управляющих параметров, относительно которых является положительно определенной квадратичной формой. В этом случае было показано, что при дополнительных предположениях об асимптотике грамиана управляемости линеаризованной системы, такое множество достижимости оказывается выпуклым и асимптотически близким по форме к эллипсоиду в пространстве состояний при достаточно малой длине промежутка времени. Данный эллипсоид представляет собой множество достижимости линеаризованной вдоль траектории, отвечающей нулевому управлению, системы. В настоящей работе доказывается, что при небольшом усилении условий, накладываемых на грамиан управляемости, данный результат остается справедливым, если подынтегральная функция, задающая изопериметрическое ограничение, имеет вид суммы положительно определенной квадратичной формы от управляющих параметров и неотрицательной функции фазовых переменных. Данное асимптотическое представление имеет место, в частности, для достаточно широкого класса аффинных по управлению систем второго порядка при условии полной управляемости линеаризованной системы. Доказательство опирается на результаты теории сильно выпуклых множеств и функций.

Ключевые слова: управляемая система, изопериметрические ограничения, множество достижимости, асимптотика, грамиан управляемости.

M. I. Gusev. Asymptotic behavior of small-time reachable sets of nonlinear systems with isoperimetric constraints.

We study the problem of an approximate description of reachable sets over small time intervals for affine-control systems with isoperimetric control constraints. An isoperimetric constraint is understood as an integral constraint of inequality type with the integrand depending on the control parameters and state variables of the system. Previously, a similar problem was considered under the assumption that the integrand depends only on the control parameters and is a positive definite quadratic form in these parameters. In this case, it was shown that, under certain conditions imposed on the controllability Gramian of the linearized system, the reachable set is convex and asymptotically close in shape to an ellipsoid in the state space for a sufficiently small length of the time interval. This ellipsoid is the reachable set of the system linearized along the trajectory corresponding to the null control. In this paper, it is proved that, under a slight strengthening of the conditions imposed on the controllability Gramian, this result remains valid if the integrand defining the isoperimetric constraints has the form of the sum of a positive definite quadratic form in the control parameters and a nonnegative function of the state variables. This asymptotic representation holds, in particular, for a fairly wide class of second-order systems affine in the control under the condition that the linearized system is completely controllable. The proof is based on the results of the theory of strongly convex sets and functions.

Keywords: control system, isoperimetric constraints, reachable set, asymptotics, controllability Gramian.

MSC: 93B03

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-89-101

Введение

В данной работе исследуется задача описания множеств достижимости на малых временных промежутках для аффинных по управлению систем

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t)) + f_2(x(t))u(t), \quad x(0) = x^0, \tag{0.1}$$

с изопериметрическими ограничениями на управление. Под изопериметрическим ограничением мы далее подразумеваем интегральное ограничение типа неравенства с подынтегральной функцией, зависящей от управляющих параметров и фазовых переменных системы вида

$$J(u(\cdot)) := \int_0^{t_1} (Q(x(t)) + u^\top(t)Ru(t))dt \leq \mu^2, \tag{0.2}$$

где R — симметричная положительно определенная матрица, $Q(x)$ — неотрицательная функция, u, x — конечномерные векторы управляющих параметров и состояния системы, $\mu > 0$ — заданное число. Если управляемая системы линейна, начальное состояние системы фиксировано и $Q(x)$ — неотрицательно определенная квадратичная форма, то множество достижимости есть эллипсоид в пространстве состояний. Это следует из результатов монографии [1], где соответствующий факт доказан для информационных множеств в задаче наблюдения; частным случаем последних являются множества достижимости. Параметры эллипсоида в данном случае допускают конструктивное описание в виде решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для нелинейных управляемых систем множества достижимости в случае как геометрических, так и интегральных ограничений имеют более сложную структуру; они, как правило, невыпуклы и их построение требует значительных вычислительных затрат. При изучении свойств и вычислении множеств достижимости и траекторных трубок управляемых систем используются теория уравнений и неравенств Гамильтона — Якоби и принцип сравнения [2], методы эллипсоидальных и полиэдральных аппроксимаций [3–6], конечно-разностные и пиксельные методы [7; 8], методы, основанные на принципе максимума Понтрягина [9; 10]. Алгоритмы построения множеств достижимости для систем с интегральными ограничениями изучались в работах [11; 12]. Свойства выпуклости множеств достижимости нелинейных систем исследованы в [13; 14].

В данной статье мы рассматриваем поведение множеств достижимости нелинейных систем на малых промежутках времени. Геометрическая структура множеств достижимости на промежутках времени малой длины имеет важное значение при решении задач локального синтеза. Для систем с геометрическими ограничениями на управление данные вопросы были предметом исследования в ряде работ (см., например, [15; 16]). Асимптотическое поведение множеств достижимости линейных управляемых систем с интегральными ограничениями на управление на малых промежутках времени изучалось в [17].

Асимптотика множеств достижимости нелинейных систем с интегральными ограничениями была исследована в недавней работе (Гусев М.И., Осипов И.О. Асимптотическое поведение множеств достижимости на малых временных промежутках // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 3. С. 86–99) в предположении, что подынтегральная функция в ограничении зависит только от управляющих параметров, относительно которых является положительно определенной квадратичной формой, т. е. при $Q(x) = 0$. Здесь выяснялись условия, при которых множество достижимости исходной нелинейной системы выпукло и ведет себя подобно множеству достижимости линеаризованной системы, когда длина промежутка времени стремится к нулю. Эти условия определяются поведением грамиана управляемости системы, линеаризованной вдоль траектории, которая отвечает нулевому управлению системы. Минимальное собственное число грамиана не должно стремиться к нулю слишком быстро; в этом случае множество достижимости оказывается асимптотически эквивалентным эллипсоиду в пространстве состояний при малой длине промежутка времени. Асимптотическая эквивалентность множеств определялась при этом через оценки хаусдорфова расстояния между множествами. В настоящей работе доказывается, что при небольшом усилении условий, накладываемых на грамиан управляемости, асимптотическая эквивалентность множеств имеет место для изопериметрического ограничения вида (0.2). Данные условия выполняются, в частности, для достаточно широкого класса аффинных по управлению систем второго порядка при полной управляемости линеаризованной системы. Следуя [17], два выпуклых множества, зависящие от малого параметра, мы считаем асимптотически эквивалентными, если расстояние Банаха — Мазура между этими множествами стремится к нулю при стремлении к нулю малого параметра.

Схема доказательства в предлагаемой статье опирается на результаты [19]. Используя замену времени, исходное множество достижимости можно заменить множеством достижимости для управляемой системы на единичном интервале времени. При такой замене малый параметр (длина временного интервала для исходной системы) появляется в уравнениях системы и ограничениях. При этом ограничения на управление оказываются заданы сильно выпуклым множеством, принадлежащим шару малого радиуса в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2$, если величина малого параметра удовлетворяет неравенству (см., например, [13]), содержащему минимальное собственное число грамиана управляемости. Множество достижимости является образом данного множества при нелинейном отображении его в $\mathbb{R}^n$, который приближенно заменяется образом шара при линейной аппроксимации отображения. Дальнейшее доказательство использует соотношение между расстояниями Хаусдорфа и Банаха — Мазура, установленное в следующем ниже разделе.

1. Вспомогательные результаты

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые компактные множества; предполагаем, что нулевой вектор является внутренней точкой каждого из этих множеств. Расстояние Банаха — Мазура $\rho(X, Y)$ между X и Y определяется равенством

$$\rho(X,Y) := \log(r(X,Y)\cdot r(Y,X)), \quad r(X,Y) = \inf\{t \geq 1 \colon tX \supset Y\}.$$

Для выпуклых замкнутых множеств X, Y включение $tX \supset Y$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$t\delta(y|X) \geq \delta(y|Y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \|y\| = 1,$$

где $\delta(y|X)$ — опорная функция множества X. Отсюда следует формула

$$r(X,Y) = \max\Big\{1, \sup_{\|y\|=1} \frac{\delta(y|X)}{\delta(y|Y)}\Big\}. \tag{1.1}$$

Заметим, что в силу условия $0 \in \mathrm{int} Y$ выполняется неравенство $\delta(y|Y) > 0$ при $\|y\| \neq 0$.

Предположим далее, что рассматриваемые множества зависят от малого положительного параметра, при этом $X = X(\varepsilon), Y = Y(\varepsilon)$ — выпуклые компактные множества и нулевой вектор является внутренней точкой каждого из этих множеств для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Будем также считать, что многозначные отображения $X(\varepsilon), Y(\varepsilon)$ ограничены. Множества $X(\varepsilon), Y(\varepsilon)$ называются асимптотически эквивалентными [17], если $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Из формулы (1.1) вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Для того чтобы $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\|y\|=1} \frac{\delta(y|X(\varepsilon))}{\delta(y|Y(\varepsilon))} = 1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\|y\|=1} \frac{\delta(y|Y(\varepsilon))}{\delta(y|X(\varepsilon))} = 1. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполнено условие (1.2), то из формулы (1.1) вытекает, что $r(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \to 1$, $r(Y(\varepsilon), X(\varepsilon)) \to 1$ и, следовательно, $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Докажем необходимость условий (1.2). Допустим, от противного, что данное условие не выполнено и пусть, для определенности, нарушается первое из двух предельных соотношений в (1.2). Тогда найдутся $\sigma > 0$ и последовательность $\varepsilon_k \to 0$ такие, что для бесконечного числа членов последовательности имеют место соотношения

$$\sup_{\|y\|=1} \frac{\delta(y|X(\varepsilon_k))}{\delta(y|Y(\varepsilon_k))} \geq 1 + \sigma \quad \text{либо} \quad \sup_{\|y\|=1} \frac{\delta(y|X(\varepsilon_k))}{\delta(y|Y(\varepsilon_k))} \leq 1 - \sigma.$$

В первом случае мы имеем $r(X(\varepsilon_k), Y(\varepsilon_k)) \geq 1+\sigma$ и, соответственно, $\rho(X(\varepsilon_k), Y(\varepsilon_k)) \geq \log(1+\sigma) > 0$. Во втором получаем

$$\frac{\delta(y|X(\varepsilon_k))}{\delta(y|Y(\varepsilon_k))} \leq 1-\sigma, \quad \forall y, \quad \|y\| = 1$$

и, значит,

$$\frac{\delta(y|Y(\varepsilon_k))}{\delta(y|X(\varepsilon_k))} \geq \frac{1}{1-\sigma},$$

откуда следует, что

$$\rho(X(\varepsilon_k), Y(\varepsilon_k)) \geq \log(1+\frac{\sigma}{1-\sigma}) > 0$$

для бесконечного числа членов последовательности ε_k. Последнее противоречит сходимости $\rho(X(\varepsilon_k), Y(\varepsilon_k))$ к нулю.

Лемма доказана.

Из условия $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ выводим, что $h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, где h обозначает хаусдорфово расстояние между множествами. Действительно, из леммы 1 мы получаем, что в этом случае выполняется соотношение (1.2). Следовательно, для любого $\sigma > 0$ найдется $\bar{\varepsilon}$ такое, что неравенства

$$\frac{\delta(y|X(\varepsilon))}{\delta(y|Y(\varepsilon))} \leq 1+\sigma, \quad \frac{\delta(y|Y(\varepsilon))}{\delta(y|X(\varepsilon))} \leq 1+\sigma$$

выполняются для всех $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\| = 1$, $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$. Из данных неравенств следует оценка

$$h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) = \sup_{\|y\|=1} |\delta(y|X(\varepsilon)) - \delta(y|Y(\varepsilon))| \leq \sigma \max\Big\{\sup_{\|y\|=1} \delta(y|Y(\varepsilon)), \sup_{\|y\|=1} \delta(y|X(\varepsilon))\Big\},$$

которая означает, что $h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Обратное утверждение неверно, что показывает следующий пример. Пусть $X(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2\colon |x_1| \leq \varepsilon, |x_2| \leq \varepsilon\}$, $Y(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2\colon x_1^2 + x_2^2 \leq \varepsilon^2\}$. Тогда $h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) = (\sqrt{2}-1)\varepsilon \to 0$, при этом $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) = \log\sqrt{2} > 0$. Тем не менее при дополнительном предположении о скорости сходимости к нулю хаусдорфова расстояния между множествами в приведенной далее теореме доказано, что $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Для $A \subset \mathbb{R}^n$ введем следующее обозначение: $\delta_{\min}(A) := \inf_{\|y\|=1} \delta(y|A)$.

Теорема 1. *Для того чтобы $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ достаточно выполнения условий*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon))}{\delta_{\min}(Y(\varepsilon))} = 0.$$

Доказательство. Обозначим $h(\varepsilon) = h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon))$, $\delta(\varepsilon) = \delta_{\min}(Y(\varepsilon))$. Из равенства $h(\varepsilon) = h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) = \sup_{\|y\|=1} |\delta(y|X(\varepsilon)) - \delta(y|Y(\varepsilon))|$ следуют неравенства

$$-h(\varepsilon) \leq \delta(y|X(\varepsilon)) - \delta(y|Y(\varepsilon)) \leq h(\varepsilon),$$

справедливые для всех $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\| = 1$. Поделив эти неравенства на положительную величину $\delta(y|Y(\varepsilon))$, получим оценку

$$|\sup_{\|y\|=1} \frac{\delta(y|X(\varepsilon))}{\delta(y|Y(\varepsilon))} - 1| \leq \sup_{\|y\|=1} \frac{h(\varepsilon)}{\delta(y|Y(\varepsilon))} \leq \frac{h(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)}.$$

При делении неравенств на $\delta(y|X(\varepsilon))$ выводим

$$|\sup_{\|y\|=1} \frac{\delta(y|Y(\varepsilon))}{\delta(y|X(\varepsilon))} - 1| \leq \sup_{\|y\|=1} \frac{h(\varepsilon)}{\delta(y|X(\varepsilon))} \leq \frac{h(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon) - h(\varepsilon)},$$

учитывая, что при достаточно малых ε в силу условий теоремы $\delta(\varepsilon)-h(\varepsilon)>0$. Из полученных неравенств имеем соотношения (1.2) и, значит, в силу леммы 1 $\rho(X(\varepsilon),Y(\varepsilon))\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Теорема доказана.

Заметим, что множества X,Y входят симметричным образом в определение $\rho(X,Y)$. Поэтому в формулировке теоремы можно $\delta_{\min}(Y(\varepsilon))$ заменить на $\delta_{\min}(X(\varepsilon))$.

2. Асимптотика множеств достижимости на малых временных промежутках

Рассмотрим аффинную по управлению нелинейную управляемую систему вида (0.1) на промежутке $0\le t\le t_1,\ x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^r$, функции $f_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\ f_2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times r}$ считаем непрерывными и непрерывно дифференцируемыми. Начальное состояние x^0 фиксировано. Пусть интегральные ограничения на управление и траекторию заданы неравенством (0.2), где R — симметричная положительно определенная матрица, $Q(x)$ — неотрицательная непрерывная функция, μ — положительное число. Далее будем обозначать через $\mathbb{L}_2$ гильбертово пространство интегрируемых с квадратом вектор-функций на отрезке $[0,t_1]$, скалярное произведение в котором определено равенством

$$(u(\cdot),v(\cdot))=\int\limits_0^{t_1}u^\top(t)Rv(t)dt;$$

$B(0,\mu)=\{u(\cdot)\in\mathbb{L}_2\colon (u(\cdot),u(\cdot))\le\mu^2\}$ — шар радиуса $\mu>0$ с центром в нуле. Множество управлений, удовлетворяющих ограничению (0.2), принадлежит $B(0,\mu)$. Будем предполагать, что для некоторого $t_1=\bar t_1>0$ и для любого $u(\cdot)\in B(0,\mu)$ существует и единственно решение $x(t)$ системы (0.1), это решение определено на промежутке $[0,\bar t_1]$ и все траектории системы (0.1), отвечающие управлениям из $B(0,\mu)$, принадлежат компактному множеству $D\subset\mathbb{R}^n$. Далее будем рассматривать значения t_1, не превосходящие $\bar t_1$.

Обозначим через

$$G(t_1)=\{x\in\mathbb{R}^n\colon \exists u(\cdot)\in\mathbb{L}_2:J(u(\cdot))\le\mu^2,\ x=x(t_1,u(\cdot))\}$$

множество достижимости системы (0.1) в заданный момент t_1. Напомним, что $J(u(\cdot))$ — интегральный функционал, задающий ограничения (0.2). Далее будем считать выполненным следующее условие.

Предположение. *Функции $f_1(x),\ f_2(x),Q(x)$ имеют непрерывные производные по x, которые удовлетворяют условиям Липшица: для всех $x_1,x_2\in D$*

$$\Big\|\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_1)-\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_2)\Big\|\le L_3\|x_1-x_2\|,\quad \Big\|\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_1)-\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_2)\Big\|\le L_4\|x_1-x_2\|,$$
$$\Big\|\frac{\partial Q}{\partial x}(x_1)-\frac{\partial Q}{\partial x}(x_2)\Big\|\le L_5\|x_1-x_2\|,$$

где $L_i\ge 0,\ i=3,4,5$.

Мы изучаем асимптотику множеств достижимости $G(t_1)$ при фиксированном μ в предположении, что интервал $[0,t_1]$ является малым. С использованием замены времени задача описания множества достижимости на малом интервале может быть сведена к аналогичной задаче на фиксированном интервале для системы, уравнения которой и интегральные ограничения на управление зависят от малого параметра [19]. Малый параметр далее будем обозначать через ε: $t_1=\varepsilon$.

Произведя замену времени $t=\varepsilon\tau$ и положив $y(\tau)=x(\varepsilon\tau)$, $v(\tau)=\varepsilon R^{1/2}u(\varepsilon\tau)$, мы приходим к уравнению

$$\dot y(\tau)=\varepsilon f_1(y(\tau))+f_2(y(\tau))R^{-1/2}v(\tau),\quad 0\le\tau\le 1,\quad y(0)=x^0;\tag{2.1}$$

ограничения на управление $v(\cdot)$ при данной замене преобразуются в неравенство

$$\int_0^1 (\varepsilon^2 Q(y(\tau)) + v^\top(\tau)v(\tau))dt \le (\mu\sqrt{\varepsilon})^2. \tag{2.2}$$

Здесь $R^{1/2}$ — квадратный корень из положительно определенной матрицы R. Заметим, что траектории системы (2.1), (2.2), как и ранее, принадлежат D. Множество достижимости системы (2.1), (2.2) в момент $\tau = 1$, как нетрудно заметить, совпадает с множеством достижимости исходной системы $G(\varepsilon)$. Далее мы сохраним обозначение $\mathbb{L}_2$ для пространства вектор-функций на $[0,1]$ со скалярным произведением

$$(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^1 u^\top(\tau)v(\tau)d\tau,$$

а через $B(a,\mu)$ будем обозначать шар радиуса μ с центром в точке a в данном пространстве. Будем далее также использовать обозначение $\mu(\varepsilon) = \mu\sqrt{\varepsilon}$.

Определим функционал $\varphi(v(\cdot)) : \mathbb{L}_2 \to \mathrm{R}$ равенством

$$\varphi(v(\cdot)) = \int_0^1 Q(y(t))dt,$$

где $y(t)$ — решение системы (2.1). Из [19, лемма 2] следует, что $\varphi(v(\cdot))$ имеет производную, которая удовлетворяет условию Липшица с константой, обозначаемой далее через $L_2(\varepsilon)$, на шаре $B(0,\mu(\varepsilon)) \subset \mathbb{L}_2$.

Обозначим через U_ε множество управлений для системы (2.1), удовлетворяющих неравенству (2.2). С учетом введенных обозначений данное множество можно представить в виде

$$U_\varepsilon = \{v(\cdot) \in \mathbb{L}_2 \colon \varepsilon^2\varphi(v(\cdot)) + (v(\cdot), v(\cdot)) \le \mu^2(\varepsilon)\}.$$

При ε, удовлетворяющем неравенству $\varepsilon\varphi(0) \le \mu^2$, справедливо включение $0 \in U_\varepsilon$. Обозначим $\alpha(\varepsilon) := h(U_\varepsilon, B(0,\mu(\varepsilon)))$ — хаусдорфово расстояние между множествами U_ε и $B(0,\mu(\varepsilon))$.

Лемма 2. *Существует не зависящая от ε константа $k > 0$ такая, что для достаточно малых ε выполняется неравенство*

$$\alpha(\varepsilon) \le k\varepsilon^{3/2} \quad (\alpha(\varepsilon) \le k\varepsilon^2, \ \text{\textit{если}} \ \varphi(0) = 0).$$

Доказательство. Далее считаем, что $\varepsilon\varphi(0) \le \mu^2$, $\varepsilon \le \bar{t}_1$, и, следовательно, $U_\varepsilon \ne \varnothing$. Поскольку $U_\varepsilon \subset B(0,\mu(\varepsilon))$, то достаточно доказать, что для любого $v \in B(0,\mu(\varepsilon))$ найдется $\bar{v} \in U_\varepsilon$ такой, что $\|v - \bar{v}\| \le k\varepsilon^{3/2}$ (либо $\|v - \bar{v}\| \le k\varepsilon^2$), где $k > 0$ не зависит от ε и v. Будем искать $\bar{v}$ в виде $\bar{v} = (1-p)v$, $0 \le p < 1$. Число p должно удовлетворять неравенству

$$\varepsilon^2\varphi((1-p)v) + (1-p)^2(v,v) \le \mu^2(\varepsilon). \tag{2.3}$$

По теореме о среднем $\varphi((1-p)v) - \varphi(0) = (1-p)\varphi'(\xi)v$, где вектор ξ принадлежит отрезку $[0,(1-p)v] \subset B(0,\mu(\varepsilon))$. Из липшицевости φ' на шаре $B(0,\mu(\varepsilon))$ следует

$$\|\varphi'(\xi) - \varphi'(0)\| \le L_2(\varepsilon)(1-p)\|v\| \le L_2(\varepsilon)\mu(\varepsilon) \le m\sqrt{\varepsilon},$$

где константа m не зависит от ε. Последнее неравенство здесь вытекает из ограниченности функции $L_2(\varepsilon)$, можно положить, например, $m = L_2(\bar{t}_1)\mu$. Таким образом, при достаточно малых ε

$$\varphi((1-p)v) \le \varphi(0) + M(\varepsilon)\|v\|(1-p),$$

где

$$M(\varepsilon) = \begin{cases} 2\|\phi'(0)\|, & \text{если } \phi'(0) \neq 0, \\ m\sqrt{\varepsilon}, & \text{если } \phi'(0) = 0. \end{cases}$$

Используя полученное неравенство, оценим левую часть (2.3) сверху следующим числом

$$\varepsilon^2(\varphi(0) + M(\varepsilon)\|v\|(1-p)) + (1-p)^2\|v\|^2 \leq \varepsilon^2(\varphi(0) + M(\varepsilon)\|v\|) + (1-p)\|v\|^2$$

$$\leq \varepsilon^2(\varphi(0) + M(\varepsilon)\mu(\varepsilon)) + (1-p)\mu^2(\varepsilon).$$

С учетом последнего неравенства можно утверждать, что (2.3) будет выполнено, если положить

$$p = \frac{\varepsilon^2(\varphi(0) + M(\varepsilon)\mu(\varepsilon))}{\mu^2(\varepsilon)} = \varepsilon\varphi(0)/\mu^2 + M(\varepsilon)\varepsilon^{3/2}/\mu.$$

При достаточно малых ε при $\varphi(0) \neq 0$ выполняется неравенство $p \leq k_1\varepsilon$, где $k_1 = 2\varphi(0)/\mu^2$, следовательно,

$$\|v - \bar{v}\| = \|v - (1-p)v\| \leq p\|v\| \leq k_1\varepsilon\mu(\varepsilon) = k_1\mu\varepsilon^{3/2}.$$

Если $\varphi(0) = 0$, то $p = M(\varepsilon)\varepsilon^{3/2}/\mu$, и мы получаем

$$\|v - \bar{v}\| = \|v - (1-p)v\| \leq p\|v\| \leq \mu(\varepsilon)M(\varepsilon)\varepsilon^{3/2}/\mu \leq k\varepsilon^2.$$

Заметим, что если выполняются одновременно равенства $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) = 0$, то $\alpha(\varepsilon) \leq k\varepsilon^{5/2}$.

Лемма доказана.

Из доказательства леммы следует включение

$$B(0, \mu\varepsilon^{1/2} - k\varepsilon^{3/2}) \subset U_\varepsilon \subset B(0, \mu\varepsilon^{1/2}). \tag{2.4}$$

Рассмотрим семейство отображений $F_\varepsilon : \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{R}^n$ определяемых равенством

$$F_\varepsilon(v(\cdot)) = y_\varepsilon(1, v(\cdot)).$$

Здесь $y_\varepsilon(t, v(\cdot))$ — соответствующее управлению $v(\cdot)$ решение системы (2.1). Тогда, в силу того что $y_\varepsilon(1, v(\cdot)) = x(\varepsilon, u(\cdot))$ при соответствующей замене времени и управления, множество достижимости $G(\varepsilon)$ представимо в виде $G(\varepsilon) = \{F_\varepsilon(v(\cdot))\colon v(\cdot) \in U_\varepsilon\}$.

Отображение $F_\varepsilon(v(\cdot))$ дифференцируемо, его производная определяется соотношением

$$F'_\varepsilon(v(\cdot))\Delta v(\cdot) = \Delta y(1).$$

Здесь $\Delta y(\tau)$ — решение линеаризованной в окрестности $y(\tau, v(\cdot)), v(\cdot)$ системы

$$\dot{\Delta y}(\tau) = \varepsilon A(\tau)\Delta y(\tau) + B(\tau)\Delta v(\tau), \quad \tau \in [0,1], \quad \Delta y(0) = 0, \tag{2.5}$$

где

$$A(\tau) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(y(\tau)) + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f_2^i}{\partial x}(y(\tau))v_i(\tau), \quad B(\tau) = f_2(y(\tau))R^{-1/2}.$$

Отображение $F'_\varepsilon(v(\cdot))$ удовлетворяет условию Липшица с константой

$$L(\varepsilon) = L_0 + L_1\varepsilon (L_0, L_1 \geq 0).$$

Если функция f_2 в уравнении системы не зависят от состояния ($f_2(x) = f_2$ — постоянная матрица), то $L_0 = 0$ [20].

Наряду с множеством $G(\varepsilon)$ будем далее рассматривать множество

$$\hat{G}(\varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n : y = F'_\varepsilon(0)v(\cdot),\ v(\cdot) \in B(0, \mu(\varepsilon))\} = F'_\varepsilon(0)B(0, \mu(\varepsilon)).$$

Данное множество является множеством достижимости линеаризованной системы (2.5), отвечающей траектории системы (2.1), порожденной нулевым управлением. При этом ограничения на управление $\Delta v(\tau)$ заданы неравенством

$$\int_0^1 \Delta v^\top(\tau)\Delta v(\tau)d\tau \leq \mu^2(\varepsilon) = (\mu\sqrt{\varepsilon})^2.$$

Если сделать обратную замену времени $\tau = t/\varepsilon$ и обозначить $\Delta u(t) = 1/\varepsilon R^{-1}\Delta v(t/\varepsilon)$, то нетрудно убедиться, что $\hat{G}(\varepsilon)$ — это множество достижимости, полученное при линеаризации исходной системы (0.1) вдоль траектории $x(t, x^0, 0)$, если изопериметрическое ограничение (0.2) заменено на ограничение

$$\int_0^\varepsilon \Delta u^\top(\tau)R\Delta u(\tau)d\tau \leq \mu^2.$$

Далее мы изучаем соотношение между множествами достижимости нелинейной системы $G(\varepsilon)$ и ее линеаризации $\hat{G}(\varepsilon)$ при ε, стремящемся к нулю. Наша цель — получить достаточные условия, при которых данные множества являются асимптотически эквивалентными с точностью до сдвига.

Обозначим через W_ε грамиан управляемости линеаризованной системы (2.1), который определяется равенством

$$W_\varepsilon = \int_0^1 X_\varepsilon(1,\xi)B(\xi)B^\top(\xi)X_\varepsilon^\top(1,\xi)d\xi.$$

Здесь $X_\varepsilon(\tau,\xi)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы

$$\dot{X}_\varepsilon(\tau,\xi) = \varepsilon A(\tau)X_\varepsilon(\tau,\xi), \quad X_\varepsilon(\xi,\xi) = I,$$

I — единичная матрица.

Известно (см., например, [19]), что симметричная, неотрицательно определенная матрица W_ε связана с оператором $F'_\varepsilon(0)$ равенством $W_\varepsilon = F'_\varepsilon(0)F'_\varepsilon(0)^*$, где $F'_\varepsilon(0)^*$ — сопряженный оператор.

Заметим, что полная управляемость линеаризованной системы (2.5) на отрезке $[0,1]$ эквивалентна невырожденности грамиана W_ε. В этом случае оператор $F'_\varepsilon(0)$ является сюрьективным ($F'_\varepsilon(0)\mathbb{L}_2 = \mathbb{R}^n$) и множество достижимости $\hat{G}(\varepsilon)$ имеет вид

$$\hat{G}(\varepsilon) = F'_\varepsilon(0)B(0,\mu(\varepsilon)) = \mu(\varepsilon)F'_\varepsilon(0)B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x^\top W_\varepsilon^{-1}x \leq \mu^2(\varepsilon)\},$$

т. е. это множество есть эллипсоид в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для опорной функции множества $\hat{G}(\varepsilon)$ и величины $\delta_{\min}(\hat{G}(\varepsilon))$ мы получаем выражения

$$\delta(x|\hat{G}(\varepsilon)) = \mu(\varepsilon)\sqrt{x^\top W_\varepsilon x}, \quad \delta_{\min}(\hat{G}(\varepsilon)) = \min_{\|x\|=1}\delta(x|\hat{G}(\varepsilon)) = \mu(\varepsilon)\sqrt{\nu(\varepsilon)},$$

где $\nu(\varepsilon)$ — минимальное собственное число грамиана управляемости W_ε. Заметим, что $\nu(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon > 0$, если линеаризованная система (2.5) вполне управляема на отрезке $[0,1]$.

Теорема 2. *Пусть линеаризованная система* (2.5) *вполне управляема на* $[0,1]$ *и выполнены следующия условия*:

$$\frac{\mu^2(\varepsilon)L^2(\varepsilon)}{\nu(\varepsilon)} \to 0, \quad \frac{\alpha(\varepsilon)}{\mu(\varepsilon)\sqrt{\nu(\varepsilon)}} \to 0 \;\; \text{при} \;\; \varepsilon \to 0, \;\; \varepsilon > 0. \tag{2.6}$$

Тогда при достаточно малых ε множество $G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0)$ выпукло и асимптотически эквивалентно множеству $\hat{G}(\varepsilon)$, т. е. $\rho(G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0), \hat{G}(\varepsilon)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что из управляемости линеаризованной системы следует, что $\hat{G}(\varepsilon)$ — невырожденный эллипсоид с центром в нуле. Значит, нулевой вектор является внутренней точкой $\hat{G}(\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$.

Покажем, что нулевой вектор принадлежит внутренности $G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Действительно, из (2.4) вытекает, что $B(0, \mu\varepsilon^{1/2}/2) \subset U_\varepsilon$ при $\varepsilon \le \mu/2k$, $\varepsilon\varphi(0) \le \mu^2$, $\varepsilon \le \bar{t}_1$. Выберем $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее данным неравенствам. Рассмотрим отображение $g_\varepsilon(v) = F_\varepsilon(v) - F_\varepsilon(0)$. Очевидно, $g_\varepsilon(0) = 0$, $g'_\varepsilon(0) = F'_\varepsilon(0)$ и, значит, $g'_\varepsilon(0)\mathbb{L}_2 = \mathbb{R}^n$. По теореме Люстерника [21, с. 11] найдутся $a > 0, \bar{\rho} > 0$ такие, что для любого $\rho \le \bar{\rho}$ имеет место включение $g_\varepsilon(B(0,\rho)) \supset B(g_\varepsilon(0), a\rho) = B(0, a\rho)$. Следовательно, при $\rho \le \min\{\mu\varepsilon^{1/2}/2, \bar{\rho}\}$ мы получаем включение

$$g_\varepsilon(U_\varepsilon) \supset g_\varepsilon(B(0,\rho)) \supset B(0, a\rho),$$

означающее, что нуль — внутренняя точка $G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0) = g_\varepsilon(U_\varepsilon)$. Заметим, что мы используем здесь одно и то же обозначение $B(0,\rho)$ для шара в разных пространствах ($\mathbb{L}_2$ и $\mathbb{R}^n$).

Введем множество $\bar{G}(\varepsilon) := F'_\varepsilon(0)U_\varepsilon$ и оценим хаусдорфово расстояние между $\bar{G}(\varepsilon)$ и $G(\varepsilon)$. Обозначим через $L_1(\varepsilon)$ константу Липшица для функционала $\varphi(v)$ на шаре $B(0, \mu(\varepsilon))$, и пусть $\bar{m}(\varepsilon) = \sup\{\|\varphi'(v)\| \colon v \in B(0, \mu(\varepsilon))\}$. Тогда из результатов работы [19] имеем, что если выполнены неравенства

$$\varepsilon^2 \le \min\Big\{\frac{1}{L_1(\varepsilon)}, \frac{\mu(\varepsilon)}{\bar{m}(\varepsilon)}\Big\}, \quad 16\mu^2(\varepsilon)L^2(\varepsilon) \le \nu(\varepsilon),$$

то множество $U_\varepsilon \subset \mathbb{L}_2$ сильно выпукло и множество $G(\varepsilon)$ выпукло. Из выпуклости множества U_ε следует выпуклость $\bar{G}(\varepsilon)$. Так как $\mu(\varepsilon) = \mu\sqrt{\varepsilon}$, то первое из приведенных неравенств всегда выполнено для достаточно малых ε. Если какой-то из знаменателей дробей в этом неравенстве обращается в нуль, то вместо него можно подставить любую положительную константу. Второе неравенство выполняется для достаточно малых ε, это следует из условия (2.6). Таким образом, существует $\bar{\varepsilon} > 0$ такое, что множества $G(\varepsilon), \bar{G}(\varepsilon)$ выпуклы при $0 < \varepsilon \le \bar{\varepsilon}$. В дальнейшем мы предполагаем, что $\varepsilon \le \bar{\varepsilon}$.

Пусть $v = v(\cdot) \in U_\varepsilon$, тогда

$$F_\varepsilon(v) - F_\varepsilon(0) = F'_\varepsilon(0)v + r(\varepsilon, v),$$

где $\|r(\varepsilon, v)\| \le L(\varepsilon)\|v\| \le L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon)$. Отсюда получаем по схеме работы [18], что

$$h(G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0), \bar{G}(\varepsilon)) \le L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon). \tag{2.7}$$

Далее, очевидно, что

$$h(\hat{G}(\varepsilon), \bar{G}(\varepsilon)) \le \|F'_\varepsilon(0)\| h(U_\varepsilon, B(0, \mu(\varepsilon))). \tag{2.8}$$

Норма оператора $F'_\varepsilon(0)$ определяется следующим выражением:

$$\|F'_\varepsilon(0)\| = \max_{\|v\| \le 1} \|F'_\varepsilon(0)v\| = \max\{\|x\| \colon x \in F'_\varepsilon(0)B(0,1)\} = \max\{\|x\| \colon x^\top W_\varepsilon^{-1} x \le 1\}.$$

Решим задачу максимизации $\|x\|^2$ при ограничении, заданном квадратичным неравенством $x^\top W_\varepsilon^{-1} x \le 1$. Приравнивая нулю градиент функции Лагранжа $\|x\|^2 - \lambda x^\top W_\varepsilon^{-1} x$, где λ — неотрицательный множитель Лагранжа, получим

$$W_\varepsilon^{-1} x = \frac{1}{\lambda} x, \quad \|x\|^2 = \lambda.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{1}{\lambda}$ — минимальное собственное число матрицы W_ε^{-1}, и значит λ — максимальное собственное число грамиана управляемости W_ε, которое обозначим через $\eta(\varepsilon)$. Таким образом, $\|F'_\varepsilon(0)\| = \sqrt{\eta(\varepsilon)}$, где $\eta(\varepsilon)$ — ограниченная на любом конечном отрезке функция. Поэтому далее можно считать, что при $0 < \varepsilon \le \bar{\varepsilon}$ выполняется неравенство $\|F'_\varepsilon(0)\| \le k_1$ для некоторой константы k_1.

В силу неравенств (2.7), (2.8) справедлива оценка

$$h(G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0), \hat{G}(\varepsilon)) \leq L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon) + kh(U_\varepsilon, B(0, \mu(\varepsilon))) = L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon) + k_1\alpha(\varepsilon),$$

из которой с учетом леммы 2 получаем, что $h(G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0), \hat{G}(\varepsilon)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. При этом в силу условий теоремы имеем

$$\frac{h(G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0), \hat{G}(\varepsilon))}{\delta_{\min}(\hat{G}(\varepsilon))} \leq \frac{L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon) + k_1\alpha(\varepsilon)}{\mu(\varepsilon)\sqrt{\nu(\varepsilon)}} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Из леммы 1 следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Если $\varphi(0) = 0$, то в силу леммы 2 $\alpha(\varepsilon) \leq k\varepsilon^2$. В этом случае условие $\alpha(\varepsilon)/(\mu(\varepsilon)\sqrt{\nu(\varepsilon)}) \to 0$ теоремы 2 будет выполнено, если $\varepsilon^3/\nu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Величина $L^2(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon)$ имеет порядок ε^3, если f_2 не зависит от x; в этом случае требование $L^2(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon)/\nu(\varepsilon) \to 0$ также эквивалентно условию $\varepsilon^3/\nu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Если же $f_2 = f_2(x)$, то $L^2(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon)$ имеет, вообще говоря, порядок ε.

Ранее аналог теоремы 2 доказан для случая, когда изопериметрические ограничения на управление не зависят от траектории системы: $Q(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n$. Если $Q(x(t,0)) \equiv 0$, то $\varphi(0) = 0$. В данном случае добавление ограничений на траекторию системы не влияет на качественный характер поведения множеств достижимости при малых ε.

Принимая во внимание асимптотику минимального собственного числа грамиана управляемости для линейных стационарных систем с малым параметром [20], получим

Следствие. *Пусть управляемая система второго порядка имеет вид*

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t)) + f_2u(t), \quad x(0) = x^0, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon,$$

$x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$, f_2 *— постоянная матрица размеров* $2 \times r$. *Пусть* $f_1(x^0) = 0$ *и пара* $A := \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x^0), f_2$ *вполне управляема. Пусть* $Q(x^0) = 0$.

Тогда множество $G(\varepsilon) - x^0$ *выпукло при достаточно малых* ε *и асимптотически эквивалентно* $\hat{G}(\varepsilon)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Управление $u(t) = 0, 0 \leq t \leq \varepsilon$ порождает траекторию $x(t,0) \equiv x^0, 0 \leq t \leq \varepsilon$. В этом случае $Q(x(t,0)) \equiv 0$ и, следовательно, $\varphi(0) = 0$. Кроме того, имеют место равенства $F_\varepsilon(0) = y_\varepsilon(1,0) = x(\varepsilon,0) = x^0$.

Если число управляющих параметров $r \geq 2$ и матрица f_2 имеет ранг 2, то $\nu(\varepsilon) \geq k$, где k — положительное число. Если $\mathrm{rank} f_2 = 1$, то при достаточно малых ε имеет место неравенство $\nu(\varepsilon) \geq k_1\varepsilon^2$ для некоторого $k_1 > 0$ [18]. В любом из этих случаев $\varepsilon^3/\nu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и, следовательно, $\rho(G(\varepsilon) - x^0, \hat{G}(\varepsilon)) \to 0$.

З а м е ч а н и е. Для расстояния Банаха — Мазура справедливо очевидное равенство $\rho(sX, sY) = \rho(X, Y)$ для $s > 0$. Поэтому при выполнении условий теоремы 2 имеет место соотношение $\lim_{\varepsilon\to 0} \rho(s(\varepsilon)(G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0)), s(\varepsilon)\hat{G}(\varepsilon)) = 0$ для любой функции $s(\varepsilon)$ с положительными значениями. Масштабирующий множитель $s(\varepsilon)$ можно выбирать из условия (см., например, [18])

$$\delta_{\max}(s(\varepsilon)\hat{G}(\varepsilon)) = \max_{\|x\|=1} \delta(x|s(\varepsilon)\hat{G}(\varepsilon)) = s(\varepsilon)\mu(\varepsilon)\sqrt{\eta(\varepsilon)} = 1,$$

что позволяет избежать стягивания к нулю сравниваемых множеств. Равенство

$$s(\varepsilon)\mu(\varepsilon)\sqrt{\eta(\varepsilon)} = 1,$$

как нетрудно заметить, означает, что наибольшая из полуосей эллипсоида $s(\varepsilon)\hat{G}(\varepsilon)$ равна единице.

Заключение

В данной работе исследовано асимптотическое поведение множеств достижимости нелинейных управляемых систем на малых промежутках времени. Ограничения на управление и траекторию заданы интегральным неравенством, в котором подынтегральная функция представляет собой сумму дифференцируемой функции от состояния системы и квадратичной выпуклой функции управляющих параметров. Получены достаточные условия, при выполнении которых множество достижимости нелинейной системы является выпуклым и асимптотически эквивалентным множеству достижимости линеаризованной вдоль траектории, отвечающей нулевому управлению, системы при достаточно малой длине промежутка. Эти достаточные условия зависят от поведения минимального собственного числа грамиана управляемости линеаризованной системы, которая после замены времени описывается линейным дифференциальным уравнением с малым параметром в правой части. Если подынтегральная функция в ограничениях обращается в нуль на нулевом управлении, данные условия близки к ранее полученным для случая квадратичных интегральных ограничений на управление. Асимптотическая близость множеств ранее нами определялась через поведение хаусдорфова расстояния между ними, в этой статье мы определяем соответствующее понятие, используя метрику Банаха — Мазура. Отдельный раздел статьи посвящен выяснению соотношения между используемыми конструкциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Boston: Birkhäuser, 2014. 445 с.
3. **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
4. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.
5. **Althoff M. Krogh B.H.** Reachability analysis of nonlinear differential-algebraic systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2014. Vol. 59, iss. 2. P. 371–383. https://doi.org/10.1109/TAC.2013.2285751 .
6. **Костоусова Е.К.** Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов // Вычислительные технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 11–20.
7. **Lempio F., Veliov V.M.** Discrete approximations of differential inclusions // Mitteilungen der GAMM. 1998. Vol. 21, no. 2. C. 101–135.
8. **Незнахин А. А., Ушаков В. Н.** Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 6. С. 895–908.
9. **Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 8–16.
10. **Baier R., Gerdts M., Xausa I.** Approximation of reachable sets using optimal control algorithms // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2013. Vol. 3, no. 3. P. 519–548. https://doi.org/10.3934/naco.2013.3.519 .
11. **Guseinov Kh.G., Nazlipinar A.S.** Attainable sets of the control system with limited resources // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 261–268.
12. **Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N.** The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Differential Equations Appl. 2007. Vol. 14, no. 1-2. P. 57–73.
13. **Polyak B.T.** Convexity of the reachable set of nonlinear systems under l2 bounded controls // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Ser. A: Math. Analysis. 2004. Vol. 11, no. 2-3. P. 255–267.
14. **Райсиг Г.** Выпуклость множеств достижимости систем управления // Автоматика и телемеханика. 2007. № 9. С. 64–78.
15. **Krener A., Schättler H.** The structure of small-time reachable sets in low dimensions // SIAM J. Control Optim. 1989. Vol. 27, no. 1. P. 120–147. https://doi.org/10.1137/0327008 .

16. **Schättler H.** Small-time reachable sets and time-optimal feedback control // Nonsmooth Analysis and Geometric Methods in Deterministic Optimal Control / eds. B.S. Mordukhovich, H.J. Sussmann. N Y: Springer, 1996. P. 203–225. (The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications.; vol. 78). https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8489-2_9 .
17. **Goncharova E., Ovseevich A.** Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set // J. Optim. Theory Appl. 2016. Vol. 168, no. 2. P. 615–624. https: //doi.org/10.1007/s10957-015-0754-4 .
18. **Gusev M.I., Osipov I.O.** On convexity of small-time reachable sets of nonlinear control systems // AIP Conference Proceedings / M.D. Todorov. N Y, Melville: American Institute of Physics, 2019. Vol. 2164, iss. 1. Paper 060007. 9 p. https://doi.org/10.1063/1.5130809 .
19. **Gusev M.I.** On Convexity of reachable sets of a nonlinear system under integral constraints // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 207–212. https: //doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.382 .
20. **Gusev M.I.** Estimates of the minimal eigenvalue of the controllability Gramian for a system containing a small parameter // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Proc. Internat. Conf. (MOTOR 2019). 2019. P. 461–473. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11548). https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9_32.
21. **Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.** Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи мат. наук 1980. Т. 35, № 6. С. 11–46.

Поступила 24.12.2019
После доработки 7.02.2020
Принята к публикации 10.02.2020

Гусев Михаил Иванович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
ведущий науч. сотрудник
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: gmi@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
2. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation.* Basel: Birkhäuser, 2014, 445 p. ISBN: 978-3-319-10277-1 .
3. Kurzhanski A.B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control.* SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997, 321 p. ISBN: 978-0-8176-3699-9 .
4. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem: Metod ellipsoidov* [Estimation of the phase state of dynamical systems: The method of ellipsoids]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 320 p. ISBN: 5-02-013899-1 .
5. Althoff M. Krogh B.H. Reachability analysis of nonlinear differential-algebraic systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2014, vol. 59, no. 2, pp. 371–383. doi: 10.1109/TAC.2013.2285751 .
6. Kostousova E.K. External and internal parallelotopic estimates for attainability sets. *Vychisl. Tekhnol.*, 1998, vol. 3, no. 2, pp. 11–20 (in Russian).
7. Lempio F., Veliov V.M. Discrete approximations of differential inclusions. *Mitteilungen der GAMM*, 1998, vol. 21, no. 2, pp. 101–135.
8. Neznakhin A.A., Ushakov V.N. A grid method for the approximate construction of the viability kernel for a differential inclusion. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2001, vol. 41, no. 6, pp. 846–859.
9. Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *J. Computer Systems Sciences International*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328.
10. Baier R., Gerdts M., Xausa I. Approximation of reachable sets using optimal control algorithms. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2013, vol. 3, no. 3, pp. 519–548. doi: 10.3934/naco.2013.3.519 .
11. Guseinov Kh.G., Nazlipinar A.S. Attainable sets of the control system with limited resources. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 261–268 (in Russian).

12. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 2007, vol. 14, no. 1-2, pp. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6 .
13. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Math. Analysis*, 2004, vol. 11, no. 2-3, pp. 255–267.
14. Reißig G. Convexity of reachable sets of nonlinear ordinary differential equation. *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 9, pp. 1527–1543. doi: 10.1134/S000511790709007X .
15. Krener A., Schättler H. The structure of small-time reachable sets in low dimensions. *SIAM J. Control Optim.*, 1989, vol. 27, no. 1, pp. 120–147. doi: 10.1137/0327008 .
16. Schättler H. Small-time reachable sets and time-optimal feedback control. In: B.S. Mordukhovich, H.J. Sussmann (eds.) *Nonsmooth Analysis and Geometric Methods in Deterministic Optimal Control*, The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, vol. 78, N Y: Springer, 1996, pp. 203–225. doi: 10.1007/978-1-4613-8489-2_9 .
17. Goncharova E., Ovseevich A. Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set. *J. Optim. Theory Appl.*, 2016, vol. 168, no. 2, pp. 615–624. doi: 10.1007/s10957-015-0754-4 .
18. Gusev M.I., Osipov I.O. On convexity of small-time reachable sets of nonlinear control systems. In: M.D. Todorov (eds.) *AMiTaNS'19, AIP Conference Proceedings*, N Y, Melville: American Institute of Physics, 2019, vol. 2164, iss. 1. Paper 060007. doi: 10.1063/1.5130809 .
19. Gusev M.I. On Convexity of reachable sets of a nonlinear system under integral constraints. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 207–212. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.382 .
20. Gusev M.I. Estimates of the minimal eigenvalue of the controllability Gramian for a system containing a small parameter. In: *Mathematical Optimization Theory and Operations Research*, Proc. Internat. Conf. (MOTOR 2019), Lecture Notes in Computer Science, vol. 11548, 2019, pp. 461–473. doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_32 .
21. Dmitruk A.V., Milyutin A.A., Osmolovskii N.P. Lyusternik's theorem and the theory of extrema. *Russian Math. Surveys*, 1980, vol. 35, no. 6, pp. 11–51. doi: 10.1070/RM1980v035n06ABEH001973 .

Received December 24, 2019
Revised February 7, 2020
Accepted February 10, 2020

Mikhail Ivanovich Gusev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: gmi@imm.uran.ru .

Cite this article as: M. I. Gusev. Asymptotic behavior of small-time reachable sets of nonlinear systems with isoperimetric constraints, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 89–101 .