ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 3 2020

УДК 519.17

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ Q-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГРАФОВ[1]

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев

В классе дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 с псевдогеометрическим графом Γ_3 для частичной геометрии допустимые массивы пересечений были найдены для сетей — А. А. Махневым, М. П. Голубятниковым и Го Вэнь-бинем, для двойственных сетей — И. Н. Белоусовым и А. А. Махневым, для обобщенных четырехугольников — А. А. Махневым и М. С. Нировой. В этих работах найдены четыре бесконечные серии допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов:

$$\{c_2(u^2-m^2)+2c_2m-c_2-1, c_2(u^2-m^2),\ (c_2-1)(u^2-m^2)+2c_2m-c_2; 1, c_2, u^2-m^2\},$$

$$\{mt,(t+1)(m-1),t+1;1,1,(m-1)t\} \text{ при } m\le t,$$

$$\{lt,(t-1)(l-1),t+1;1,t-1,(l-1)t\} \text{ и } \{a(p+1),ap,a+1;1,a,ap\}.$$

В данной статье найдены все допустимые массивы пересечений Q-полиномиальных графов из этих серий. В частности, показано, что среди этих бесконечных семейств допустимых массивов только два массива — $\{7,6,5;1,2,3\}$ (свернутый 7-куб) и $\{191,156,153;1,4,39\}$ — отвечают Q-полиномиальным графам.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, Q-полиномиальный граф, граф Γ с сильно регулярным графом Γ_3.

I. N. Belousov, A. A. Makhnev. Inverse problems in the class of Q-polynomial graphs.

In the class of distance-regular graphs Γ of diameter 3 with a pseudogeometric graph Γ_3, feasible intersection arrays for the partial geometry were found for networks by Makhnev, Golubyatnikov, and Guo; for dual networks by Belousov and Makhnev; and for generalized quadrangles by Makhnev and Nirova. These authors obtained four infinite series of feasible intersection arrays of distance-regular graphs:

$$\{c_2(u^2-m^2)+2c_2m-c_2-1, c_2(u^2-m^2),\ (c_2-1)(u^2-m^2)+2c_2m-c_2; 1, c_2, u^2-m^2\},$$

$$\{mt,(t+1)(m-1),t+1;1,1,(m-1)t\} \text{ for } m\le t,$$

$$\{lt,(t-1)(l-1),t+1;1,t-1,(l-1)t\}, \text{ and } \{a(p+1),ap,a+1;1,a,ap\}.$$

We find all feasible intersection arrays of Q-polynomial graphs from these series. In particular, we show that, among these infinite families of feasible arrays, only two arrays ($\{7,6,5;1,2,3\}$ (folded 7-cube) and $\{191,156,153;1,4,39\}$) correspond to Q-polynomial graphs.

Keywords: distance-regular graph, Q-polynomial graph, graph Γ with a strongly regular graph Γ_3.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-14-22

1. Введение

Пусть Γ — связный граф со множеством вершин $V(\Gamma)$ и множеством ребер $E(\Gamma)$, где $E(\Gamma)$ состоит из неупорядоченных пар различных смежных вершин. *Расстоянием* $d_\Gamma(a,b)$ между вершинами a и b графа Γ называется длина кратчайшего пути от вершины a до b в графе Γ.

Определим $\Gamma_i(a)$ как множество вершин находящихся на расстоянии i от a $(0\le i\le D)$, где $D=\max\{d_\Gamma(a,b)|a,b\in V(\Gamma)\}$ называется *диаметром* графа Γ. Под $\Gamma_{-1}(a)$ и $\Gamma_{D+1}(a)$ будем понимать пустое множество.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-51-53013 ГФЕН_а).

Связный граф Γ диаметра D называется *дистанционно регулярным*, если существуют целые числа b_i, c_i $(0 \leq i \leq D)$ такие, что для любых двух вершин $x, y \in V(\Gamma)$ с $d_\Gamma(x,y) = i$ число вершин из $\Gamma_{i-1}(x)$, смежных с y, равно c_i, а число вершин из $\Gamma_{i+1}(x)$, смежных с y, равно b_i. Набор $\{b_0, b_1, \ldots, b_{D-1}; c_1, c_2, \ldots, c_D\}$ называется *массивом пересечений* дистанционно регулярного графа. В дистанционно регулярном графе числа $|\Gamma_i(x)|$ и $|\Gamma_i(x) \cap \Gamma(y)|$ не зависят от выбора вершин x и y с $d_\Gamma(x,y) = i$ и обозначаются через k_i и a_i соответственно. Очевидно, $a_i = b_0 - b_i - c_i$. Дистанционно регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если $v = |V(\Gamma)|, k = b_0, \lambda = a_1, \mu = c_2$.

Предположим, что Γ — дистанционно регулярный граф, степень и диаметр которого больше 1. Под матрицей A_i $(0 \leq i \leq D)$ графа Γ будем понимать квадратную матрицу, строки и столбцы которой индексированы множеством $V(\Gamma)$; на месте (x,y) матрицы A_i стоит — 1 в случае $d_\Gamma(x,y) = i$ и 0 — в противном случае. *Матрицей смежности* графа Γ называют матрицу A_1 и обозначают ее через A. По графом Γ_i понимают граф с $V(\Gamma_i) = V(\Gamma)$ и матрицей смежности A_i, т.е. две вершины смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ. Граф Γ имеет точно $D+1$ различных собственных значений $k = \theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_D$, и пусть m_i — кратность значения θ_i $(0 \leq i \leq D)$.

Алгеброй Боуза — Меснера M дистанционно регулярного графа Γ называется матричная алгебра, порожденная матрицей смежности A графа Γ с базисом $\{A_i \,|\, i = 0, \ldots, D\}$. Алгебра M имеет другой базис, состоящий из примитивных идемпотентов $\{E_0 = \dfrac{1}{v}J, E_1, \ldots, E_D\}$, где $v = |V(\Gamma)|$ и E_i — ортогональная проекция на собственное подпространство отвечающее собственному значению θ_i. Относительно покомпонентного умножения $\circ$ выполняются равенства

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{v}\sum_{i=0}^{D} q_{ij}^k E_k.$$

Граф Γ называется *Q-полиномиальным*, если существует упорядочение примитивных идемпотентов $E_0 = \dfrac{1}{v}J, E_1, \ldots, E_D$, такое, что $q_{ij}^k = 0$ при $|j-k| > 1$. Будем говорить, что Γ является *Q-полиномиальным относительно* θ, если E_1 — ортогональная проекция на собственное подпространство, отвечающее собственному значению θ.

Прямой задачей в теории дистанционно регулярных графов является нахождение параметров симметричной структуры, отвечающей графу с данным массивом пересечений, по этому массиву. Обратная задача — восстановление массива пересечений дистанционно регулярного графа по параметрам отвечающей ему симметричной структуры. В [1] решена прямая задача для дистанционно регулярного графа Γ с сильно регулярным графом Γ_3. В [2] решаются прямая и частично обратная задачи для дистанционно регулярного графа Γ с сильно регулярным графом Γ_2.

Одним из направлений в решении обратных задач теории дистанционно регулярных графов является восстановление массива пересечений графа Γ, когда Γ_3 — сильно регулярный граф из некоторого семейства известных графов. К таким классам сильно регулярных графов относятся прежде всего псевдогеометрические графы для сетей, двойственных 2-схем и обобщенных четырехугольников. Массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 с псевдогеометрическим графом Γ_3 для сетей были найдены А. А. Махневым, М. П. Голубятниковым и Го Вэнь-бинем [3], для двойственных 2-схем — И. Н. Белоусовым и А. А. Махневым (Обратные задачи в теории дистанционно регулярных графов: двойственные 2-схемы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. Р. 44–51), для обобщенных четырехугольников — А. А. Махневым и М. С. Нировой [4]. В этих работах найдены бесконечные серии допустимых массивов пересечений в данных классах графов. А именно в случае псевдогеометрического графа Γ_3 для сети имеем серию массивов:

$$\big\{c_2(u^2-m^2)+2c_2m-c_2-1, c_2(u^2-m^2), (c_2-1)(u^2-m^2)+2c_2m-c_2; 1, c_2, u^2-m^2\big\},$$

для двойственной 2-схемы —

$$\{mt, (t+1)(m-1), t+1; 1, 1, (m-1)t\}, \quad m \le t,$$

и для обобщенного четырехугольника — две серии:

$$\{lt, (t-1)(l-1), t+1; 1, t-1, (l-1)t\} \text{ и } \{a(p+1), ap, a+1; 1, a, ap\}.$$

Интересной представляется задача описания всех Q-полиномиальных графов из этих серий, так как они являются в определенном смысле экстремальными (см., например, [5, теорема 8.3.1]).

Условия, при которых дистанционно регулярные графы из указанных серий — Q-полиномиальные, найдены в следующей теореме.

Теорема. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* 3. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* Γ *имеет массив пересечений*

$$\{c_2(u^2-m^2)+2c_2m-c_2-1, c_2(u^2-m^2), (c_2-1)(u^2-m^2)+2c_2m-c_2; 1, c_2, u^2-m^2\}, \quad (1)$$

то Γ *является* Q*-полиномиальным графом только в случае*

$$c_2 = \frac{(u^2+2u-m^2+2m-1)(u-m)}{(u+m-1)(u-m+1)}; \quad (2)$$

(2) *если* Γ *имеет массив пересечений*

$$\{mt, (t+1)(m-1), t+1; 1, 1, (m-1)t\}, \quad m \le t,$$

то Γ *не является* Q*-полиномиальным графом*;

(3) *если* Γ *имеет массив пересечений*

$$\{lt, (t-1)(l-1), t+1; 1, t-1, (l-1)t\},$$

то Γ *—* Q*-полиномиальный граф только в случае* $t = \dfrac{l^2-1}{2-l}$;

(4) *если* Γ *имеет массив пересечений* $\{a(p+1), ap, a+1; 1, a, ap\}$, *то* Γ *не является* Q*-полиномиальным графом.*

Следствие. *Пусть* Γ *—* Q*-полиномиальный граф с массивом пересечений*

$$\left\{c_2(u^2-m^2)+2c_2m-c_2-1, c_2(u^2-m^2), (c_2-1)(u^2-m^2)+2c_2m-c_2; 1, c_2, u^2-m^2\right\}.$$

Тогда граф Γ *либо — свернутый 7-куб с массивом пересечений* $\{7,6,5;1,2,3\}$, *либо имеет массив пересечений* $\{191, 156, 117; 1, 4, 39\}$.

2. Доказательство теоремы

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{b_0, b_1, b_2; c_1, c_2, c_3\}$. Через L_1 обозначим трехдиагональную матрицу $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & O \\ & c_2 & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & O & & \cdot & \cdot & b_{D-1} \\ & & & & c_D & a_D \end{pmatrix}$ и через

$$\left(u_0(\theta_j) = 1,\ u_1(\theta_j) = \frac{\theta_j}{b_0},\ u_2(\theta_j), u_3(\theta_j)\right)^T$$

— правый собственный вектор, отвечающий собственному значению θ_j матрицы L_1. Заметим, что по [5, 4.1B] собственные значения графа Γ совпадают с собственными значениями матрицы L_1. Согласно [5, теорема 4.1.4 (Биггс)] кратности собственных значений графа Γ вычисляются по формуле

$$m_j = \frac{|V(\Gamma)|}{\sum_{i=0}^{D} k_i u_i(\theta_j)^2}, \tag{3}$$

где $k_i = k_{i-1}b_{i-1}/c_i$. Под второй (дуальной) матрицей собственных значений графа Γ будем понимать матрицу Q, элементами Q_{ij} которой являются числа $m_j u_i(\theta_j)$.

По [6, теорема 3.3] граф Γ является Q-полиномиальным относительно θ_j $(1 \le j \le 3)$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\begin{aligned} c_3\Big(u_2(\theta_j) - u_3(\theta_j) - \frac{(u_1(\theta_j)-u_2(\theta_j))^2}{u_0(\theta_j)-u_3(\theta_j)}\Big) - b_2\frac{(u_1(\theta_j)-u_3(\theta_j))^2}{u_0(\theta_j)-u_2(\theta_j)} \\ = (b_0-\theta_j)(u_1(\theta_j)-u_3(\theta_j)) - (\theta_j+1)(u_0(\theta_j)-u_2(\theta_j)), \end{aligned} \tag{4}$$

где c_3, b_2, b_0 — числа пересечений графа Γ, $(u_0(\theta_j)=1, u_1(\theta_j)=\theta_j/b_0, u_2(\theta_j), u_3(\theta_j))^T$ — правый собственный вектор матрицы L_1, отвечающий собственному значению θ_j $(j>0)$. Заметим, что в равенстве (4) числа $u_i(\theta_j)$ можно заменить элементами Q_{ij} матрицы Q.

Лемма 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

$$\{a(p+1), ap, a+1; 1, a, ap\}$$

не является Q-полиномиальным.

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{a(p+1), ap, a+1; 1, a, ap\}$. Положим $z=\sqrt{4a^2+4ap+4a+1}$. Тогда правые собственные векторы матрицы L_1 графа Γ, упорядоченные по убыванию собственных значений, имеют вид

$(1,1,1,1)^T$,

$\Big(1, \frac{z-1}{2a(p+1)}, \frac{2a-z+1}{2a(p+1)p}, \frac{-1}{p+1}\Big)^T$,

$\Big(1, -\frac{1}{a(p+1)}, -\frac{1}{a(p+1)}, \frac{p}{(a+1)(p+1)}\Big)^T$,

$\Big(1, -\frac{z+1}{2a(p+1)}, \frac{2a+z+1}{2a(p+1)p}, -\frac{1}{p+1}\Big)^T$.

Используя формулу (3), получаем, что кратности неглавных собственных значений равны

$$\frac{2(ap+a+1)a(p+2)(p+1)p}{(p+1)z^2-2az-pz-z}, \quad \frac{(a+1)a(p+2)(p+1)}{a+p+1}, \quad \frac{2(ap+a+1)a(p+2)(p+1)p}{(p+1)z^2+2az+pz+z}.$$

Очевидно, что кратности целые только в случае, когда $4a^2+4ap+4a+1=u^2$ для некоторого $u \in \mathbb{N}$. Далее, $4ap=(u-2a-1)(u+2a+1)$. Так как u нечетно, то $u=2m+1$ и $ap=(m-a)(m+a+1)$.

Пусть граф Q-полиномиален относительно θ_1. Тогда выполнено равенство (4), которое принимает вид

$$\begin{aligned} -\Big(a^6 - a^5m - 2a^4m^2 + 2a^3m^3 + a^2m^4 - am^5 + a^5 - 5a^4m + 4a^3m^2 + 4a^2m^3 - 5am^4 + m^5 - 3a^4 \\ + a^3m + 8a^2m^2 - 10am^3 + 4m^4 - 2a^3 + 7a^2m - 8am^2 + 7m^3 + 2a^2 - am + 7m^2 + a + 4m + 1\Big) \\ \times (a^2-m^2-m-1)(a+m)/\Big((a^2-m^2+a-2m-1)a(2m+1)(m+1)\Big) \end{aligned}$$

$$= \frac{-(a^3 - am^2 - am + 2m^2 - a + 3m + 1)(a^2 - m^2 - m - 1)(a + m)(a - m - 1)}{a(2m + 1)(m + 1)}.$$

Эквивалентно

$$\frac{(a^3 - a^2m - am^2 + m^3 - 3am + 2m^2 - 2a + m)(a^2 - m^2 - m - 1)(a^2 - m^2 - 3m - 2)(a + m)}{(a^2 - m^2 + a - 2m - 1)a(2m + 1)(m + 1)} = 0.$$

С учетом неравенства $a < m$ имеем

$a^3 - a^2m - am^2 + m^3 - 3am + 2m^2 - 2a + m = 0$. Пусть $a = m - t$. Тогда $2mt^2 - t^3 - m^2 + 3mt - m + 2t = 0$ или $m^2 - m(2t^2 + 3t - 1) + t^3 - 2t = 0$.

$D = (2t^2 + 3t - 1)^2 - 4t^3 + 8t = (4t^2 + 1)(t + 1)^2$.

Поэтому $4t^2 + 1$ — квадрат целого числа; противоречие.

Когда граф Γ Q-полиномиален относительно θ_2, равенство (4) принимает вид

$$\frac{(a^2 - m^2 + a - m - 1)(a^2 - m^2 - m - 1)(a + m)(a - m - 1)}{(m + 1)m}$$
$$= \frac{(a^2 - m^2 - m - 1)^2(a + m)(a - m - 1)}{(m + 1)m}.$$

Эквивалентно $(a^2 - m^2 - m - 1)(a + m)(a - m - 1)a/((m + 1)m) = 0$. Противоречие с условием $a < m$.

Если же Γ — Q-полиномиальный граф относительно θ_3, то равенство (4) эквивалентно

$$\frac{(a^3 + a^2m - am^2 - m^3 + a^2 + am - m^2)(a^2 - m^2 + m)(a^2 - m^2 - m - 1)(a - m - 1)}{(a^2 - m^2 + a)a(2m + 1)m} = 0.$$

Заметим, что $-a^3 - a^2m + am^2 + m^3 - a^2 - am + m^2 = ((m + a)^2 + m)(m - a) - a^2$. Снова противоречие с неравенством $a < m$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

$$\{c_2(u^2 - m^2) + 2c_2m - c_2 - 1, c_2(u^2 - m^2), (c_2 - 1)(u^2 - m^2) + 2c_2m - c_2; 1, c_2, u^2 - m^2\} \quad (5)$$

является Q-полиномиальным тогда и только тогда, когда выполнено равенство (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Γ — Q-полиномиальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений (5). Неглавные собственные значения графа Γ равны $\theta_1 = c_2m + c_2u - c_2 - 1$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -(c_2u - c_2m + c_2 + 1)$.

Вторая матрица собственных значений графа Γ имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_0(m+u)(m-u-1)^2}{2u} & b_0(b_0 + 1 - u^2 + m^2) & \frac{-b_0(m+u-1)^2(m-u)}{2u} \\ 1 & \frac{\theta_1(m+u)(m-u-1)^2}{2u} & -(b_0 + 1 - u^2 + m^2) & -\frac{\theta_3(m+u-1)^2(m-u)}{2u} \\ 1 & \frac{(\theta_1 - m - u + 1)(m-u-1)^2}{2u} & -(b_0 + 1 - u^2 + m^2) & -\frac{(\theta_3 - m + u + 1)(m+u-1)^2}{2u} \\ 1 & -\frac{(m+u)(m-u-1)^2}{2u} & (m+u)(u-m) & -\frac{(m+u-1)^2(u-m)}{2u} \end{pmatrix}.$$

Пусть Γ является Q-полиномиальным относительно θ_j при $j = 1$. В этом случае равенство (4) приводится к виду

$(c_2m^2 + m^3 - m^2u - c_2u^2 - mu^2 + u^3 - 2c_2m - 2m^2 + 2u^2 + c_2 + m - u)(m^2 - u^2 - 2m - 2u + 1)c_2(m + u - 1)/(c_2m^2 - c_2u^2 - 2c_2m + c_2 + 1)(m^2 - u^2 - m - u + 1)(m + u)(m - u - 1)$.

Решая полученное уравнение относительно c_2 и учитывая $u > m$, имеем c_2, определяемое равенством (2), или $c_2 = 0$. Последний случай невозможен, так как иначе $b_0 = -1$, а в первом — выполняется утверждение (1) теоремы 2.

В случае $j = 2$ равенство (4) приводится к уравнению

$$\frac{(c_2m^2 - c_2u^2 - 2c_2m - m^2 + u^2 + c_2 + 1)c_2(m + u - 1)(m - u - 1)}{(c_2m^2 - c_2u^2 - 2c_2m - m^2 + u^2 + c_2)(c_2m^2 - c_2u^2 - 2c_2m + c_2 + 1)}.$$

Поэтому $c_2 = (u^2 - m^2 + 1)/(u^2 - m^2 + 2m - 1)$ и c_2 целое только при $m = 1$ и $c_2 = 1$. Но в этом случае $b_0 = b_1$; противоречие.

При $j = 3$ уравнение (4) приводится к виду

$(c_2m^2 + m^3 + m^2u - c_2u^2 - mu^2 - u^3 - 2c_2m - 2m^2 + 2u^2 + c_2 + m + u)(m^2 - u^2 - 2m + 2u + 1)c_2(m - u - 1)/((c_2m^2 - c_2u^2 - 2c_2m + c_2 + 1)(m^2 - u^2 - m + u + 1)(m + u - 1)(m - u))$.

Поэтому

$$c_2 = \frac{(u^2 - m^2 + 2m - 2u - 1)(m + u)}{(m + u - 1)(u - m + 1)}$$

или $m^2 - u^2 - 2m + 2u + 1 = 0$. В первом случае

$$c_2 = \frac{(u - m)(u + m - 1) - u + m - 1)(u + m)}{(u + m - 1)(u - m + 1)}$$

и $(u+m-1)$ делит $u-m+1$. Значит, $m = 1$ и $c_2 = (u+2-u^2)/uu$; противоречие. Во втором — $(u + m - 2)(u - m) = 1$ и с учетом $u > m$ получаем $u + m - 2 = 1$ и $u - m = 1$, а значит, $u = 2, m = 1, a_1 = c_2 - 2$ и $a_2 = 2 - c_2$. Поэтому $c_2 = 2$ и выполняется утверждение леммы.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

$$\{lt, (t - 1)(l - 1), t + 1; 1, t - 1, (l - 1)t\}$$

не является Q-полиномиальным.

Доказательство. Пусть дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{lt, (t - 1)(l - 1), t + 1; 1, t - 1, (l - 1)t\}$ Q-полиномиален относительно θ_j для некоторого натурально числа j, меньшего 4.

Пусть $j = 1$. Тогда 4 эквивалентно следующему равенству:

$$\frac{(l^2 - 2l - 2t - 1)(lt + l + 2t)(t - 1)}{(lt + 1)(l + 1)lt} = 0.$$

Так как $l, t > 1$, то $l^2 - 2l - 2t - 1 = 0$ и $t = (l - 1)^2/2 - 1$. В этом случае l нечетно и, если положить $l = 2r + 1$, получим массив пересечений

$$\{(2r^2 - 1)(2r + 1), 4r(r^2 - 1), 2r^2; 1, 2(r^2 - 1), r(4r^2 - 2)\}.$$

Дистанционно регулярный граф с таким массивом не существует по [7, теорема 3].

При $j = 2$ равенство 4 приводится к следующему виду: $(lt+1)/(l(t+1)) = 0$. Противоречие.

Наконец, при $j = 3$ имеем $(l + 1)(l - 2)/((l - 1)l) = 0$. Значит, $l = 2$. Противоречие с тем, что $b_1 < b_2$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

$$\{mt, (t + 1)(m - 1), t + 1; 1, 1, (m - 1)t\}, m \leq t,$$

не является Q-полиномиальным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{mt,(t+1)(m-1),t+1;1,1,(m-1)t\}$ с $m \le t$ Q-полиномиален относительно θ_j для некоторого натурально числа j, меньшего 4.

Пусть $j=1$. Тогда (4) эквивалентно следующему равенству:

$$\frac{(m^2t+m^2-mt-m-t-2)(mt+m+t+2)}{(mt+m+1)m^2(t+1)}=0.$$

Так как $m^2t+m^2-mt-m-t-2=(m-1)m(t+1)-m-2$, то $m=2$. Но тогда $t=1<m$; противоречие.

При $j=2$ равенство 4 приводится к следующему виду $(mt+1)/(m(t+1))=0$. Противоречие.

Наконец, при $j=3$ имеем $(mt+m+1)(mt-m-t)/((mt-tt-1)mt)=0$. Значит, $mt=m+t$ и $t=1+t/m$; противоречие.

Лемма доказана.

Из лемм 1–4 следует теорема.

3. Доказательство следствия

В этом разделе мы докажем следствие. Пусть Γ — Q-полиномиальный граф с массивом пересечений (1). По теореме имеем значение c_2, определяемое (2).

Лемма 5. *Если* $m=1$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{7,6,5;1,2,3\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $m=1$, то Γ имеет массив пересечений

$$\{c_2(u^2-1)+c_2-1,c_2(u^2-1),(c_2-1)(u^2-1)+c_2;1,c_2,u^2-1\}.$$

В этом случае $c_2=(u^2+2u)(u-1)/u^2$, поэтому $u=2$ и $c_2=2$.

Таким образом, Γ имеет массив пересечений $\{7,6,5;1,2,3\}$.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если* $m>1$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{191,156,153;1,4,39\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m>1$. Так как c_2 вычисляется по формуле (2) и число $u-m+1$ взаимно просто с $u-m$, то $u-m+1$ делит u^2+2u-m^2+2m-1. Далее,

$$u^2+2u-m^2+2m-1=(u^2-um+u)+(um-m^2+m)+u+m-1,$$

поэтому $u-m+1$ делит $u+m-1$. Заметим, что $(u-m+1,u+m-1)=(2u,2m)$ делит $u+m-1$, следовательно, $(u,m)=1$.

Положим $u+m-1=(u-m+1)w$. Тогда $u(w-1)=(m-1)(w+1)$, $w+1$ делит $2u$,

$$c_2=\frac{(u^2-um+u)+(um-m^2+m)+(u-m+1)w)(u-m)}{w(u-m+1)^2}=\frac{(u+m+w)(u-m)}{w(u-m+1)},$$

поэтому $u-m+1$ делит $w+1$. Отсюда $u-m+1$ делит $2(m-1)$. С другой стороны, w делит $(u-m)(u+m)$ и $u+m-1$, поэтому w делит $(u-m)$. Таким образом, $w=u-m$ и $c_2=(u+m+w)/(u-m+1)$.

Если $u=3(m-1)$, то $3(w-1)=(w+1)$, $w=2$ и $c_2=(u+m+w)/(u-m+1)=(4m-1)/(2(m-1))$; противоречие.

Если $u=2(m-1)$, то $2(w-1)=(w+1)$, $w=3$, $c_2=(u+m+w)/(u-m+1)=(3m+1)/(m-1)$ и $m-1$ делит 4. В случае $m=3$ имеем $c_2=(3m+1)(m-2)/(3(m-1))=10/6$; противоречие. В случае $m=5$ имеем $c_2=(3m+1)(m-2)/(3(m-1))=4$, $u=8$ и Γ имеет массив пересечений $\{191,156,153;1,4,39\}$.

Если $u-m+1=2(m-1)/d$, $d\ge 3$, то $u<0$; противоречие.

Лемма доказана.

Из лемм 5 и 6 вытекает следствие.

Заключение

В статье показано, что для известных бесконечных серий допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов Γ с Γ_3 являющимся псевдогеометрическим для сети обобщенного четырехугольника или двойственной 2-схемы, только два массива $\{7,6,5;1,2,3\}$ и $\{191,156,153;1,4,39\}$ отвечают Q-полиномиальному графу. Известно существование единственного дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{7,6,5;1,2,3\}$ (свернутый 7-куб), причем этот граф имеет два Q-полиномиальных упорядочения. Существование графа с массивом пересечений $\{191,156,153;1,4,39\}$ неизвестно. Вызывает интерес возможность построения графа с указанным массивом по его группе автоморфизмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bang S., Koolen J.** Distance-regular graphs of diameter 3 having eigenvalue -1 // Linear Algebra and Appl. 2017. Vol. 531. P. 38–53. doi: 10.1016/j.laa.2017.05.038 .
2. **Iqbal Q., Koolen J., Park J., Rehman M.** Distance-regular graphs with diameter 3 and eigenvalue $a_2 - c_3$ // Linear Algebra and Appl. 2020. Vol. 587. P. 271–290. doi: 10.1016/j.laa.2019.10.021 .
3. **Makhnev A.A., Golubyatnikov M.P., Guo Wenbin** Inverse problems in distance-regular graphs: nets // Communications in Mathematics and Statistics. 2019. Vol. 7, no 1. P. 69–83.
4. **Makhnev A.A., Nirova M.S.** Inverse problems in distance-regular graphs: generalized quadrangles // Sibirean Electr. Math. Reports. 2018. Vol. 15. P. 927–934. doi: 10.17377/semi.2018.15.079 .
5. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-Regular Graphs. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
6. **Terwilliger P.** A new unequality for distance-regular graphs // Discrete Math. 1995. Vol. 137. P. 319–332. doi: 10.1016/0012-365X(93)E0170-9 .
7. **Jurisic A., Vidali J.**, Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Des. Codes Cryptogr. 2012. Vol. 65. P. 29–47. doi: 10.1007/s10623-012-9651-0 .

Поступила 22.05.2020
После доработки 17.06.2020
Принята к публикации 13.07.2020

Белоусов Иван Николаевич
канд. физ.-мат. наук
зав. отделом, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: i_belousov@mail.ru

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Bang S., Koolen J. Distance-regular graphs of diameter three having eigenvalue -1. *Linear Algebra and its Applications*, 2017, vol. 531, pp. 38–53. doi: 10.1016/j.laa.2017.05.038 .
2. Iqbal Q., Koolen J., Park J., Rehman M. Distance-regular graphs with diameter 3 and eigenvalue $a_2 - c_3$. *Linear Algebra and Appl.*, 2020, vol. 587, pp. 271–290. doi: 10.1016/j.laa.2019.10.021 .

3. Makhnev A.A., Golubyatnikov M.P., Guo Wenbin. Inverse problems in distance-regular graphs: nets. *Communications in Mathematics and Statistics*, 2019, vol. 7, no. 1, pp. 69–83. doi: 10.1007/S40304-018-0159-4 .
4. Makhnev A.A., Nirova M.S. Inverse problems in distance-regular graphs: generalized quadrangles. *Sibirean Electr. Math. Reports*, 2018, vol. 15, pp. 927–934. doi: 10.17377/semi.2018.15.079 .
5. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-Regular Graphs.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 0387506195 .
6. Terwilliger P. A new inequality for distance-regular graphs. *Discrete Mathematics*, 1995, vol. 137, pp. 319–332. doi: 10.1016/0012-365X(93)E0170-9 .
7. Jurisic A., Vidali J. Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3. *Des. Codes Cryptogr.*, 2012, vol. 65, no. 1-2, pp. 29–47. doi: 10.1007/s10623-012-9651-0 .

Received May 22, 2020
Revised June 17, 2020
Accepted July 13, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research – the National Natural Science Foundation of China (project no. 20-51-53013_a).

Ivan Nikolaevich Belousov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: i_belousov@mail.ru .

Aleksandr Alekseevich Makhnev, Dr. Phys.-Math. Sci., RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: makhnev@imm.uran.ru .

I. N. Belousov, A. A. Makhnev. Inverse problems in the class of Q-polynomial graphs, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 14–22 .