ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 3 2020

УДК 519.658.4

К ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДАМ ПОИСКА РАВНОВЕСИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЧИСТОГО ОБМЕНА ЭРРОУ — ДЕБРЕ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПОЛЕЗНОСТИ ЕГО УЧАСТНИКОВ[1]

Л. Д. Попов

Для классических моделей обмена Эрроу — Дебре с мультипликативными функциями полезности участников предложены новые итерационные схемы настройки равновесных цен. Предлагаемые алгоритмы носят итеративный характер. Каждая их итерация отвечает одному циклу обмена. В течении его участники обмена реагируют на текущие рыночные цены и ведут обмен товарами, исходя из своих бюджетов и своих систем предпочтений. При этом все, что они могут наблюдать, это исчезновение с рынка тех или иных продуктов, переходящих в разряд дефицитных. Это заставляет участников обмена корректировать цены на них. А именно, цены, отвечающие товарам, ставшим дефицитными, вырастают на некоторую относительно постоянную величину. При этом прочие цены, в том числе и на товары, остающиеся в избытке, не меняются. В силу этого общий уровень цен на товары понемногу растет (это соответствует нормальной инфляции, которая наблюдается во всякой рыночной экономике). В ходе такого роста происходит настройка цен на понижение ажиотажного спроса на одни группы товаров и его переключение на другие группы товаров в соответствии с существующими нормами их взаимозаменяемости. Хотя прирост цен фиксирован, их общий рост от итерации к итерации ведет к тому, что уже не абсолютные, но относительные их изменения постепенно затухают, обеспечивая обобщенную сходимость итерационного процесса. В качестве сходящейся последовательности можно отслеживать так называемые нормированные цены. Представлены соответствующие теоремы сходимости и результаты численных экспериментов, в том числе для других типов экономик, вплоть до самых экстравагантных.

Ключевые слова: экономическое равновесие, модель обмена, мультипликативная функция полезности, методы покоординатного спуска.

L. D. Popov. On iterative methods of finding the equilibrium in the Arrow–Debreu classical model of pure exchange with multiplicative utility functions of the participants.

For the classical Arrow–Debreu exchange models with multiplicative utility functions of the participants, new iterative schemes for setting the equilibrium prices are proposed. Each iteration of the new algorithms corresponds to one exchange cycle. During each cycle, the participants respond to current market prices and exchange goods based on their budgets and their preference systems. The only observations available to the participants are the disappearance from the market of certain products that pass into the category of scarce ones. This forces the exchange participants to adjust the prices for such goods. Namely, the prices corresponding to the goods that have become scarce grow by some relatively constant value. At the same time, other prices, including the prices of commodities remaining in excess, do not change. Because of this, the total level of prices gradually increases (which corresponds to the normal inflation observed in any market economy). The growth of prices forces a reduction in the excessive demand for scarce goods and its switching to other product groups, in accordance with the existing norms of their interchangeability. Although the growth of prices is fixed, their overall growth from iteration to iteration leads to the fact that not absolute but relative changes gradually fade, providing a generalized convergence of the iterative process. As a convergent sequence, it is possible to track the so-called normalized prices. The corresponding convergence theorems and results of numerical experiments are presented, including cases of other types of economies, up to the most extravagant.

Keywords: economic equilibrium, exchange model, multiplicative utility function, coordinate descent methods.

MSC: 90C05, 90C46

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-154-170

Введение

Исследование рыночных механизмов настройки цен на товары и услуги и отыскание равновесия между спросом на них и их предложением являются центральным пунктом экономической теории. Основополагающие идеи и гипотезы в этом направлении были изложены

[1]Исследования поддержаны грантом РФФИ (проект 19-07-01243).

Леоном Вальрасом еще в 1874 г. (см. [1]). Первые математические формулировки, описывающие взаимосвязь между направлением изменения цен и значениями компонент вектора текущего избыточного спроса, можно найти в работах П. Самуэльсона, К. Эрроу, Л. Гурвица, Ж. Дебре, Г. Скарфа, Х. Удзавы (см. [2–7]). В дальнейшем был построен обширный ряд математических моделей общего и частного экономического равновесия и предложены различные алгоритмы его поиска (см. дополнительно [8–14] и многие другие). Довольно быстро выяснилось, что тех сравнительно простых предположений, при которых основателями теории были доказаны существование конкурентного равновесия и сходимость непрерывных схем его поиска, оказалось недостаточно для перехода к их дискретным аналогам (см. [11–18]). Да и сами разностные схемы, постепенно усложняясь, все дальше отходили от моделирования простых хозяйственных операций. Это дало ощущение недостаточности исходных посылок и создало мотивацию для поиска дополнительных путей и идей в этой области. В данной работе сделана попытка взглянуть на “невидимую руку рынка” не как на самостоятельную сущность, стоящую над участниками обмена, а как на следствие реализации их самых простых и инстинктивных форм экономического поведения в условиях ограниченной экономической информированности; при этом будет пересмотрен механизм установления равновесия между спросом и предложением через циклическое повышение цен на дефицитные продукты, а также сменен взгляд на роль порождаемой этим механизмом инфляции. На этой основе будут предложены новые более простые, хотя и менее эффективные в вычислительном отношении, итерационные схемы настройки равновесных цен. В качестве полигона для отработки этих идей была выбрана классическая модель обмена Эрроу — Дебре с мультипликативными функциями полезности ее участников.

Работа продолжает и развивает результаты автора, доложенные на международной конференции MOTOR-2020 (6–13 июля 2020 г., г.Новосибирск).

Работа организована следующим образом. В разд. 1 дается описание модели рыночного обмена Эрроу — Дебре и краткий обзор известных подходов к ее анализу. Раздел 2 посвящен описанию нового алгоритма и тех предположений, при которых будет доказана его сходимость. Разд. 3 содержит само доказательство сходимости. В разд. 4 приведены результаты численных экспериментов, в том числе для других типов экономик.

1. Простейшая модель обмена товарами

Модель Эрроу — Дебре (см. [3]) описывает поведение m участников рынка (агентов) в ходе их обмена n видами товаров и услуг на базе сложившихся цен. Товары предполагаются бесконечно делимыми. Рассмотрение ограничивается случаем экономики Кобба — Дугласа, когда предпочтения участников обмена в пространстве товаров и услуг определяются мультипликативными функциями полезности. Данные об этих функциях и первоначальном распределении товаров между участниками можно сгруппировать в две неотрицательные матрицы — $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{m\times n}$. Каждая строка этих матриц отвечает своему участнику рынка, и каждый столбец — своему виду товара или услуги. Матрица A состоит из коэффициентов эластичности мультипликативных функций полезности каждого из участников рынка; эти функции имеют вид

$$u_i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}) = \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{a_{ij}} \quad (i \in \overline{1,m}).$$

Матрица B состоит из первоначальных запасов товаров различного вида, находящихся в распоряжении каждого из участников перед началом обмена. Как обычно, будем считать, что каждый из участников обмена обладает ненулевым запасом хотя бы одного вида товаров и нуждается хотя в одном другом виде товара или услуги. Кроме того, каждый вид товара имеется в ненулевом суммарном объеме. Не снижая общности рассуждений, можно считать все строчные суммы матрицы A и все столбцовые суммы матрицы B равными единице.

Пусть $p = (p_1, \dots, p_n) > 0$ — вектор текущих цен на рассматриваемые товары и услуги. В соответствии с этими ценами каждый участник обмена продает на рынке свои товары и на вырученные деньги приобретает другие товары в том объеме и так, чтобы максимизировать значение своей функции полезности. Индивидуальный выбор участников (их спрос на товары и услуги) можно оформить в виде неотрицательной матрицы $X(p) = (x_{ij}(p))_{m\times n}$. Каждая строка этой матрицы также отвечает своему участнику рынка, и каждый столбец — своему виду товара или услуги. При этом строка $x_i(p)$ с номером i матрицы $X(p)$ является решением оптимизационной задачи вида

$$(\mathcal{P}_i) \quad \max\Big\{ \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{\,a_{ij}}: \ \sum_{j=1}^{n} p_j\, x_{ij} \le \sum_{j=1}^{n} p_j\, b_{ij}, \ \text{все} \ x_{ij} \ge 0 \Big\}.$$

Решение выписанной задачи, как хорошо известно и легко проверяется, имеет вид

$$x_{ij}(p) = \frac{a_{ij}}{p_j} \sum_{s=1}^{n} b_{is} p_s \quad (i \in \overline{1,m}, \ j \in \overline{1,n}).$$

С учетом этих формул компоненты классической вектор-функции избыточного рыночного спроса, которую мы будем обозначать $\mathbb{E}(p)$, равны

$$\mathbb{E}_j(p) = \frac{1}{p_j} \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} a_{ij} b_{is} p_s - b_j \quad (j \in \overline{1,n}). \tag{1}$$

На векторно-матричном языке это можно записать как

$$\mathbb{E}(p) = \operatorname{diag}(p)^{-1} A^\top B p - b = \operatorname{diag}(p)^{-1} C p - b;$$

здесь $\operatorname{diag}(w)$ — диагональная матрица с вектором w на диагонали, а вспомогательная матрица $C = A^\top B$ вбирает в себя свойства обеих матриц A и B и описывает особенности взаимодействия агентов рынка друг с другом.

Введем для рассматриваемой экономики обмена обозначение $\mathcal{E}(C, b)$.

Напомним, что в наших предположениях $b = e = (1, \dots, 1)$. Напомним также, что функция избыточного рыночного спроса всегда (а не только в экономике типа Кобба — Дугласа) удовлетворяет условию однородности $\mathbb{E}(\lambda p) = \mathbb{E}(p)$ $(\forall \lambda > 0)$ и закону Вальраса, согласно которому $p^\top \mathbb{E}(p) = 0$.

О п р е д е л е н и е 1. Вектор цен $\bar p > 0$ называется *точкой равновесия* в модели Эрроу — Дебре, если суммарный спрос на товары и услуги совпадает с их исходным суммарным количеством, т. е.

$$\mathbb{E}(\bar p) = 0. \tag{2}$$

С учетом (1) для экономики Кобба — Дугласа условия равновесия (2) можно также записать в виде системы однородных линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} a_{ij}\, b_{is} p_s = b_j p_j \quad (j \in \overline{1,n}),$$

или в матричной записи

$$Cp - \operatorname{diag}(b) p = 0, \quad p > 0. \tag{3}$$

Как уже упоминалось выше, к настоящему времени разработан широкий спектр алгоритмов поиска равновесных цен, в том числе и для общих видов функций полезности участников рынка. Почти все эти алгоритмы так или иначе берут свое начало от непрерывной динамической системы Самуэльсона

$$\frac{dp(t)}{dt} = \mathbb{E}(p(t)), \quad t \in [0, +\infty). \tag{4}$$

Выписанная система рассматривает $\mathbb{E}(p)$ как однозначную и непрерывную функцию цен. В свою очередь, цены непрерывно меняются во времени. Сама система формализует рассуждения Вальраса о том, что цены на товары растут с ростом спроса на них и падают вместе с падением последнего.

Устойчивость (стабильность) системы (4), т. е. свойство сходимости ее траекторий к равновесию, требует (как минимум), чтобы существовал такой вектор равновесных цен $\bar{p} > 0$, при котором для любого вектора неравновесных цен p выполнялось бы неравенство $\bar{p}^\top \mathbb{E}(p) > 0$. В частности, в приведенных выше работах такая устойчивость была установлена для случаев, когда вектор избыточного рыночного спроса удовлетворяет свойству валовой заменимости[2] или слабой аксиоме выявленных предпочтений[3] и в ряде других. Однако подобных условий оказывается недостаточно при переходе от непрерывных траекторий $p(t)$ системы (4) к их разностным аппроксимациям $\{p^k\}_{k=0}^\infty$, где время k уже дискретно. Здесь возникают сложности с отслеживанием скорости изменения кривизны траекторий и потенциальной возможностью оказаться в области отрицательных значений.

Для учета и преодоления этих трудностей использовались разные подходы, в том числе применялись операторы положительной срезки (см., например, [5] и др.)

$$p_i^{k+1} = \max\{0, p_i^k + \mu \mathbb{E}_i(p^k)\} \quad (i \in \overline{1,n}),$$

или те или иные приемы нормализации цен (см., например, [14] и др.), когда цена одного из товаров или сразу некоторого их набора фиксируется, как это сделано ниже

$$p_i^{k+1} = p_i^k \big[1 + \mu_i^k \mathbb{E}_i(p^k)\big] \quad (i \in \overline{1,n}),$$

а также сложные алгоритмы управления шаговыми параметрами μ_i^k итерационного процесса (см., например, [17] и др.).

К сожалению, усложнение разностных схем отдаляет их от реальных экономических процессов и требует нетривиальных дополнительных предположений для обоснования их сходимости. Более того, как показывают работы [12–14; 16], алгоритмы такого сорта часто демонстрируют хаотическое поведение для ряда экономик, в том числе экономики с мультипликативными функциями полезности их участников.

Для экономики Кобба — Дугласа, впрочем, существуют и альтернативные методы поиска равновесия, основанные на решении системы линейных уравнений (3), как конечными методами (см. [10]) наподобие симплекс-метода, так и бесконечными методами (см. [18]) типа регуляризированной простой итерации

$$p^{k+1} = \frac{k+1}{k+2}\, Cp^k + \frac{1}{k+2}\, p^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{5}$$

Однако эти алгоритмы слишком сильно используют специфику мультипликативных функций полезности и не поддаются или поддаются с трудом экономической интерпретации.

В данной работе ставится цель найти итерационные методы настройки равновесных цен, которые учитывали бы то, что участникам обмена обычно недоступна полная информация о чужих предпочтениях и планах расходов, об исходном распределении товаров, а также оперативное проведение сколько-нибудь сложных математических расчетов. Единственное, что агенты могут наблюдать в реальной жизни, так это то, как те или иные виды товаров, пользующиеся повышенным спросом, на время исчезают с рынка и переходят в разряд дефицитных.

[2] Последнее означает, что частные производные $d\,\mathbb{E}_i(p)/dp_j > 0$ при всех $i \neq j$.

[3] Эта аксиома утверждает, что для любых векторов цен $p', p'' > 0$ таких, что $\mathbb{E}(p') \neq \mathbb{E}(p'')$, верна импликация $\big(\mathbb{E}(p'')^\top p' \le 0\big) \Rightarrow \big(\mathbb{E}(p')^\top p'' > 0\big)$.

2. Описание алгоритмов и исходные предположения

Предлагаемые алгоритмы носят итеративный характер. Каждая их итерация отвечает одному циклу обмена. В течении его участники обмена реагируют на текущие рыночные цены и ведут обмен товарами, исходя из своих бюджетов и своих систем предпочтений. При этом все, что они могут наблюдать, это исчезновение с рынка тех или иных продуктов, переходящих в разряд дефицитных. Это заставляет участников обмена корректировать цены на них. При этом механизмы повышения цен на дефицитные товары и их понижение на товары, остающиеся в избытке, различаются. А именно, цены, отвечающие товарам, ставшим дефицитными, вырастают на некоторую относительно постоянную величину. При этом прочие цены, в том числе и на товары, остающиеся в избытке, не меняются. В силу этого общий уровень цен на товары понемногу растет (это соответствует нормальной инфляции, которая наблюдается во всякой рыночной экономике). В ходе такого роста происходит настройка цен на понижение ажиотажного спроса на одни группы товаров и его переключение на другие группы товаров в соответствии с существующими нормами их взаимозаменяемости. Хотя прирост цен фиксирован, их общий рост от итерации к итерации ведет к тому, что уже не абсолютные, но относительные их изменения постепенно затухают, обеспечивая обобщенную сходимость итерационного процесса. В качестве сходящейся последовательности можно отслеживать так называемые нормированные цен (например, цены, поделенные на суммарную стоимость продаваемых товаров). В реальной экономике эту роль играет проводимая время от времени деноминация денежной массы.

На формальным языке схемы двух новых алгоритмов (вообще говоря, эквивалентных) выглядят следующим образом.

Алгоритм 1 групповой проверки спроса

Шаг 1. Выбираем произвольно начальные цены $p^0 > 0$. Полагаем $k = 0$.
Шаг 2. Определяем текущее множество $I_+(k)$ товаров повышенного спроса

$$i \in I_+(k) \iff \mathbb{E}_i(p^k) = \frac{c_{i1}p_1^k + c_{i2}p_2^k + \cdots + c_{in}p_n^k}{p_i^k} - 1 > 0.$$

Шаг 3. Корректируем цены по правилу

$$p_i^{k+1} = \begin{cases} p_i^k + \delta_i^k, \quad \delta_i^k > 0, & \text{если } i \in I_+(k), \\ \quad p_i^k & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 4. Увеличиваем номер итерации $k := k + 1$.
Шаг 5. Возвращаемся на шаг 2.

Алгоритм 2 циклического перебора товаров

Шаг 1. Выбираем произвольно начальные цены $p^0 > 0$. Полагаем $k = 0$.
Шаг 2. Выбираем очередной вид товара $i = 1 + (k \bmod n)$.
Шаг 3. Вычисляем избыточный спрос на него

$$\mathbb{E}_i(p^k) = \frac{c_{i1}p_1^k + c_{i2}p_2^k + \cdots + c_{in}p_n^k}{p_i^k} - 1$$

(на самом деле важен только знак этой величины).
Шаг 4. Если $\mathbb{E}_i(p^k) > 0$, увеличиваем цену i-го товара на некоторую константу

$$p_i^{k+1} = p_i^k + \delta_i^k, \quad \delta_i^k > 0.$$

Прочие цены не меняем.

Шаг 5. Увеличиваем номер итерации $k := k + 1$.

Шаг 6. Возвращаемся на шаг 2.

Как видно, оба алгоритма не требуют точного вычисления вектора рыночного избыточного спроса.

Перед тем, как сформулировать и доказать теоремы сходимости, обсудим используемые предположения относительно рассматриваемой экономики Кобба — Дугласа.

Вернемся к матрице $C = A^\top B$. Заметим, что все элементы этой матрицы неотрицательны, а все ее постолбцовые суммы элементов равны 1, так как по предположению

$$C^\top e = B^\top Ae = B^\top e = e.$$

Напомним, что квадратная матрица Q называется *неприводимой* (см. [8]), если не существует такой перестановочной матрицы P, что

$$P^{-1}QP = \left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline V & W \end{array}\right),$$

где U и W — квадратные матрицы размера, меньшего чем Q.

Напротив, квадратная матрица Q называется *полностью приводимой*, если она является прямой суммой неприводимых квадратных матриц Q_s $(s = 1, \dots, S)$, т. е. существует такая перестановочная матрица P, что

$$P^{-1}QP = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & & 0 \\ 0 & Q_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & Q_S \end{pmatrix}.$$

Выписанное представление единственно с точностью до перестановки строк и столбцов внутри блоков и перестановки самих блоков.

Структура расположения ненулевых элементов матрицы C несет существенную экономическую информацию и может быть описана также в терминах теории графов. А именно, поскольку все элементы матриц A и B не отрицательны, то элемент $c_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{n} a_{si}b_{sj}$ матрицы C отличен от нуля тогда и только тогда, когда хотя бы один участник рынка s владеет товаром j и нуждается в товаре i, т. е.

$$\exists s\colon (a_{si} > 0)\&(b_{sj} > 0).$$

Определение 2. Будем говорить, что экономика $\mathcal{E}(C, b)$ допускает непосредственный обмен товара i на товар j, если элемент $c_{ij} > 0$. Также будем говорить, что экономика $\mathcal{E}(C, b)$ допускает опосредованный обмен товара i на товар j, если существует цепочка номеров $j_1, j_2, \dots, j_r$ такая, что $i = j_1$, $j_r = j$ и в промежуточных парах товар j_{s-1} обмениваем на товар j_s непосредственно.

Рассмотрим ориентированный граф $\Gamma(C) = (U, V)$, где U — множество его вершин, V — множество его дуг. Вершины $u \in U$ отвечают номерам товаров и услуг, обращающихся внутри экономики $\mathcal{E}(C, b)$, а их пары (i, j) образуют дуги тогда и только тогда, когда $c_{ij} > 0$. Таким образом, товар i обмениваем на товар j в том и только том случае, когда в графе Γ есть путь, приводящий от вершины i к вершине j. Если все товары в экономике обмениваемы друг на друга, граф $\Gamma(C)$ сильно связен.

Определение 3. Говорят, что экономика Кобба — Дугласа $\mathcal{E}(C, b)$ допускает симметричный обмен товарами, если в любой паре ее товаров оба товара обмениваемы друг на друга (непосредственно или опосредовано), или ни один из них не обмениваем на другой.

Возможность симметричного обмена товарами означает, что граф обмена $\Gamma(C)$, построенный для рассматриваемой экономики, распадается на конечное число сильно связных подграфов, изолированных друг от друга.

Последнее можно пояснить как возможность полной декомпозиции всего рынка на конечное число подрынков так, что все участники подрынков могут иметь сами и заинтересованы только в товарах своего подрынка и не имеют, и не заинтересованы в товарах прочих подрынков. Когда число подрынков равно 1, то говорят, что экономика Кобба — Дугласа не имеет подрынков.

Известна следующая теорема (см. [10]).

Теорема 1. *Для экономики Кобба — Дугласа следующие утверждения эквивалентны:*
(a) *в экономике существует хотя бы один равновесный луч цен,*
(b) *экономика удовлетворяет условию симметричного обмена товарами,*
(c) *соответствующая матрица $C = A^\top B$ полностью приводима.*

Поскольку далее для рассматриваемой экономики $\mathcal{E}(C, b)$ предлагается метод поиска равновесия, естественно ограничиться случаем, когда такое равновесие существует, т. е. когда матрица C полностью приводима:

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & & 0 \\ 0 & C_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & C_S \end{pmatrix}.$$

На самом деле предложенные выше вычислительные процедуры действуют на каждом подрынке изолированно друг от друга. Поэтому можно, не снижая общности, считать, что выполнено следующее предположение.

П р е д п о л о ж е н и е 1. Рассматриваемая экономика не содержит подрынков, а ее граф $\Gamma(C)$ сильно связен.

Наиболее популярный пример выполнения предположения 1 являет собой циклическая экономика из [18] для трех товаров и трех агентов:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = A^\top B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Еще одно предположение сделаем относительно поправок цен в алгоритмах 1 и 2.

П р е д п о л о ж е н и е 2. Пусть все поправки цен, встречающиеся в алгоритмах 1 и 2 (пусть даже все эти поправки разные), лежат в некотором ограниченном интервале допустимых значений $0 < \underline{\delta} < \delta_i^k < \bar{\delta} < +\infty$, отделенном от нуля.

3. Обоснование сходимости алгоритмов

Проведем анализ свойств алгоритма 1. Рассмотрим три случая.

С л у ч а й 1. На очередном k-ом шаге алгоритма оказалось, что все $\mathbb{E}_i(p^k) > 0$, так что множество индексов дефицитных товаров — $I_+(k) = \{1, 2, \ldots, n\}$. Это невозможно, так как возникающее в том случае неравенство $\mathbb{E}(p^k)^\top p^k > 0$ противоречит закону Вальраса.

С л у ч а й 2. На очередном k-ом шаге алгоритма оказалось, что $I_+(k) = \varnothing$, т. е. все $\mathbb{E}_i(p^k) \le 0$. По правилам алгоритма цены $\bar{p} = p^k > 0$ в дальнейшем не меняются. При этом все попарные произведения $\mathbb{E}_i(\bar{p})\bar{p}_i \le 0$. Но по закону Вальраса их сумма должна равняться нулю, что возможно только, если все $\mathbb{E}_i(\bar{p}) = 0$, т. е. цены $\bar{p}$ равновесны.

С л у ч а й 3. Множества $I_+(k) \neq \varnothing$ и $I_+(k) \neq \{1, 2, \ldots, n\}$ при всех k. Иными словами на каждой итерации часть цен возрастает, а часть остается на прежнем уровне. Поскольку ассортимент товаров конечен, то хотя бы один из них входит в список дефицитных бесконечное число раз, а цена на него растет неограниченно. Этот случай и будет детально изучен ниже. Напомним, что мы исходим из выполнимости предположений 1, 2.

Лемма 1. *Пусть последовательность* $\{p_j^k\}_{k=0}^{\infty}$*, генерируемая алгоритмом* 1*, растет неограниченно, и товар* i *непосредственно обмениваем на товар* j*, т. е.* $c_{ij} > 0$*. Тогда последовательность* $\{p_i^k\}_{k=0}^{\infty}$ *также растет неограниченно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выделим из неограниченно возрастающей последовательности $\{p_j^k\}_{k=0}^{\infty}$ некоторую подходящую подпоследовательность, также, разумеется, неограниченную, с номерами k_0, k_1, k_2, ... Сделаем это следующим образом. Положим $k_0 = 0$. Затем выберем такое наименьшее k_1, для которого выполняется неравенство

$$p_j^{k_1-1} \geq p_j^{k_0} + \frac{p_i^{k_0}}{c_{ij}}. \tag{6}$$

Это можно сделать, поскольку последовательность $\{p_j^k\}_{k=0}^{\infty}$ растет неограниченно и разность между ее последовательными элементами не превосходит конечного числа $\bar{\delta} > 0$.

Очевидно, $k_1 > k_0 + 1$. Покажем, что $p_i^{k_1} \geq p_i^{k_0} + \underline{\delta}$, т. е. за время между итерациями с номерами от k_0 до k_1 цена на i-й товар в силу формул алгоритма 1 должна была повыситься хотя бы один раз.

В самом деле, если бы на протяжении всех итераций от k_0 до $k_1 - 1$ цена на i-й товар ни разу бы не корректировалась и сохранялась бы одинаковой, то в силу (6) имело бы место неравенство

$$\mathbb{E}_i(p^{k_1-1}) = \frac{1}{p_i^{k_1-1}} \sum_{s=1}^{n} c_{is} p_s^{k_1-1} - 1 = \frac{1}{p_i^{k_0}} \sum_{s=1}^{n} c_{is} p_s^{k_1-1} - 1 \geq \frac{c_{ij} p_j^{k_1-1}}{p_i^{k_0}} - 1 > 0. \tag{7}$$

Но тогда в силу правил алгоритма 1 цена на i-й товар обязательно будет скорректирована на итерации k_1.

Итак, в любом случае $p_i^{k_1} \geq p_i^{k_0} + \underline{\delta}$.

Далее выбираем такое наименьшее k_2, для которого выполняется неравенство

$$p_j^{k_2-1} \geq p_j^{k_1} + \frac{p_i^{k_1}}{c_{ij}}, \tag{8}$$

аналогичное неравенству (6) из предыдущего шага. Очевидно, это можно сделать и $k_2 > k_1 + 1$. И вновь мы имеем оценку прироста цены $p_i^{k_2} \geq p_i^{k_1} + \underline{\delta}$, так как за время между итерациями с номерами от k_1 до k_2 цена на j-й товар в силу формул алгоритма 1 должна была повыситься хотя бы один раз.

В самом деле, если бы на протяжении всех итераций от k_1 до $k_2 - 1$ цена на j-й товар ни разу бы не корректировалась и сохранялась бы одинаковой, то в силу (8) имело бы место неравенство (сравни с (7))

$$\mathbb{E}_i(p^{k_2-1}) = \frac{1}{p_i^{k_2-1}} \sum_{s=1}^{n} c_{is} p_s^{k_2-1} - 1 = \frac{1}{p_i^{k_1}} \sum_{s=1}^{n} c_{is} p_s^{k_2-1} - 1 \geq \frac{c_{ij} p_j^{k_2-1}}{p_i^{k_1}} - 1 > 0.$$

Но тогда в силу правил алгоритма 1 цена на i-й товар обязательно будет скорректирована на итерации k_2.

Итак, в любом случае $p_i^{k_2} \geq p_i^{k_1} + \underline{\delta}$.

Продолжая приведенные выше рассуждения, строим последующие $k_3, k_4, \ldots$ и так далее. Всякий раз оказывается, что $p_i^{k_s} \geq p_i^{k_{s-1}} + \underline{\delta} \geq p_i^{k_{s-2}} + 2\underline{\delta} \geq \ \ldots \ \geq p_i^0 + s\underline{\delta} \to \infty$, так что последовательность $\{p_i^{k_s}\}_{s=0}^{\infty}$, а значит и последовательность $\{p_i^k\}_{k=0}^{\infty}$ (будучи монотонной) действительно возрастают неограниченно, что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *Пусть хотя бы одна из последовательностей цен, например, $\{p_i^k\}_{k=0}^{\infty}$, растет неограниченно. Тогда и все прочие последовательности цен (в предположении 1) также растут неограниченно.*

Доказательство. По предположению 1 граф обмениваемости товаров $\Gamma(C)$ сильно связен, т. е. любые его две вершины связаны путем, содержащим не более $(n-1)$ дуг. Пусть исходная вершина i, для которой соответствующая цена растет неограниченно, и произвольная не совпадающая с ней вершина j связаны путем с промежуточными вершинами $i = l_0, l_1, \ldots, l_N = j$ так, что все $c_{l_s l_{s+1}} > 0$, $s = 0, 1, \ldots, N-1$. По лемме 1 неограниченный рост цены на товар $l_0 = i$ влечет неограниченный рост цены на товар l_1, а неограниченный рост цены на товар l_1 в свою очередь влечет неограниченный рост цены на товар l_2 и так далее, по цепочке. Неограниченный рост цены на товар l_{N-1} предопределит в конце концов неограниченный рост цены на товар $l_N = j$. □

Перейдем теперь к анализу поведения компонент векторов избыточного рыночного спроса.

В соответствии с законом Вальраса при неравновесных положительных ценах часть компонент $\mathbb{E}_i(p^k)$ должна быть положительна, а часть отрицательна. Мы покажем, что названные компоненты совершают волнообразное движение. Если, например, величина $\mathbb{E}_i(p^k)$ на каком-то шаге оказалась отрицательной, то вначале под воздействием цен на другие товары она постепенно начинает расти и переходит в область положительных значений. Сопровождающий этот переход рост цены уже на i-й товар заставлял затем эту величину убывать и вернуться в область отрицательных значений, после чего цена на i-й товар временно стабилизируется. Затем все повторяется сначала.

Оценим глубину погружения отдельно взятой траектории в отрицательную и положительную области.

Лемма 2. *Пусть на очередном шаге выполнено неравенство $\mathbb{E}_i(p^k) \le 0$. Тогда на следующем шаге*

$$\mathbb{E}_i(p^k) \le \mathbb{E}_i(p^{k+1}) \le n\bar{\delta}/p_i^k \to +0.$$

Доказательство. В самом деле, по условию $\mathbb{E}_i(p^k) \le 0$, так что по правилам алгоритма цена на i-й товар сохраняется на прежнем уровне, т. е. $p_i^{k+1} = p_i^k > 0$. А поскольку все прочие цены от итерации к итерации не убывают, то

$$\mathbb{E}_i(p^{k+1}) = \frac{1}{p_i^{k+1}} \sum_{s=1}^{n} c_{is} p_s^{k+1} - 1 = \frac{1}{p_i^k} \sum_{s=1}^{n} c_{is} p_s^{k+1} - 1 \ge \frac{1}{p_i^k} \sum_{s=1}^{n} c_{is} p_s^k - 1 = \mathbb{E}_i(p^k),$$

что совпадает с левой частью доказываемого неравенства. Правая часть неравенства вытекает из того, что по предположению 2 рост цен следующего шага ограничен сверху, и даже если эти цены вырастут все разом, новое значение i-й компоненты вектора избыточного рыночного спроса будет ограничено сверху

$$\mathbb{E}_i(p^{k+1}) = \frac{1}{p_i^k} \sum_{s=1}^{n} c_{is} p_s^{k+1} - 1 \le \frac{1}{p_i^k} \sum_{s=1}^{n} c_{is} (p_s^k + \bar{\delta}) - 1 \le \mathbb{E}_i(p^k) + \frac{n\bar{\delta}}{p_i^k} \le \frac{n\bar{\delta}}{p_i^k},$$

что и требовалось доказать. □

Таким образом, в процессе роста отрицательная компонента избыточного рыночного спроса может перейти в положительную область, но величина такого скачка с ростом цен становится все меньше и меньше по абсолютной величине.

Рассмотрим далее случай положительного избыточного рыночного спроса на товар.

Лемма 3. *Пусть $\mathbb{E}_i(p^k) > 0$. Тогда на следующем шаге возможное погружение этой компоненты в отрицательную область ограничено снизу $\mathbb{E}_i(p^{k+1}) > -\bar{\delta}/p_i^k \to -0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, если $\mathbb{E}_i(p^k) > 0$, то по правилам алгоритма 1 цена на i-й товар вырастет на $\delta_i^k > 0$, так что

$$\mathbb{E}_i(p^{k+1}) = \frac{1}{p_i^k + \delta_i^k} \sum_{s=1}^n c_{is} p_s^{k+1} - 1 \geq \frac{1}{p_i^k + \delta_i^k} \sum_{s=1}^n c_{is} p_s^k - 1$$

$$= \frac{p_i^k}{p_i^k + \delta_i^k} \frac{\sum\limits_{s=1}^n c_{is} p_s^k}{p_i^k} - 1 = \frac{p_i^k}{p_i^k + \delta_i^k} \mathbb{E}_i(p^k) - \frac{\delta_i^k}{p_i^k + \delta_i^k} > -\frac{\delta_i^k}{p_i^k + \delta_i^k} > -\frac{\bar{\delta}}{p_i^k} \to -0,$$

что и требовалось доказать. □

Таким образом возможное погружение каждой из положительных компонент избыточного рыночного спроса в отрицательную область происходит на все меньшую и меньшую глубину.

Следствие 2. *Пусть все последовательности цен* $\{p_i^k\}_{k=0}^\infty$, *порождаемые алгоритмом* 1, *неограниченно растут. Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} \inf\ \mathbb{E}_i(p^k) \geq 0 \quad (\forall i \in \overline{1,n}).$$

Оценим теперь возможное поведение компонент избыточного рыночного спроса внутри положительной области значений.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbb{E}_i(p^{k_1-1}) \leq 0$ *и* $\mathbb{E}_i(p^k) > 0$ *при* $k_1 \leq k < k_2$. *Тогда*

$$\gamma(k_1,k_2) = \max_{k_1 \leq k < k_2} \bigl\{\mathbb{E}_i(p^k)\bigr\} \leq n \max\bigl\{\bar{\delta}/p_i^0;\ \bar{\delta}/\underline{\delta}\bigr\} = \text{const}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возможны два случая. В первом максимум достигается на левом конце интервала, и, с учетом леммы 2, имеем

$$\gamma(k_1,k_2) = \max_{k_1 \leq k < k_2} \bigl\{\mathbb{E}_i(p^k)\bigr\} = \mathbb{E}_i(p^{k_1}) \leq n\bar{\delta}/p_i^{k_1} \leq n\bar{\delta}/p_i^0,$$

а во втором — максимум достигается внутри этого интервала, т. е.

$$\gamma(k_1,k_2) = \max_{k_1 \leq k < k_2} \bigl\{\mathbb{E}_i(p^k)\bigr\} = \mathbb{E}_i(p^{k_0}), \quad k_1 < k_0 < k_2.$$

Но так как при всех $k_1 \leq k < k_2$ верно неравенство

$$\mathbb{E}_i(p^{k+1}) = \frac{1}{p_i^{k+1}} \sum_{s=1}^n c_{is} p_s^{k+1} - 1 \leq \frac{1}{p_i^{k+1}} \sum_{s=1}^n c_{is}(p_s^k + \bar{\delta}) - 1 \leq \frac{p_i^k}{p_i^{k+1}} \frac{\sum\limits_{s=1}^n c_{is} p_s^k}{p_i^k} + \frac{n\bar{\delta}}{p_i^{k+1}} - 1$$

$$\leq \frac{p_i^k}{p_i^{k+1}}\ \mathbb{E}_i(p^k) + \frac{n\bar{\delta}}{p_i^{k+1}},$$

то во втором случае

$$\mathbb{E}_i(p^{k_0}) \leq \frac{p_i^{k_0-1}}{p_i^{k_0}}\ \mathbb{E}_i(p^{k_0-1}) + \frac{n\bar{\delta}}{p_i^{k_0}} \leq \frac{p_i^{k_0-1}}{p_i^{k_0}}\ \mathbb{E}_i(p^{k_0}) + \frac{n\bar{\delta}}{p_i^{k_0}},$$

или (после умножения обеих частей неравенства на $p_i^{k_0} > 0$ и перегруппировки слагаемых)

$$p_i^{k_0}\ \mathbb{E}_i(p^{k_0}) - p_i^{k_0-1}\ \mathbb{E}_i(p^{k_0}) \leq n\bar{\delta},$$

так что окончательно $\underline{\delta}\ \mathbb{E}_i(p^{k_0}) \leq (p_i^{k_0} - p_i^{k_0-1})\ \mathbb{E}_i(p^{k_0}) \leq n\bar{\delta}$, или

$$\gamma(k_1,k_2) = \max_{k_1 \leq k < k_2} \bigl\{\mathbb{E}_i(p^k)\bigr\} = \mathbb{E}_i(p^{k_0}) \leq n\bar{\delta}/\underline{\delta}.$$

Объединяя оба случая, получаем $\gamma(k_1,k_2) = \max\limits_{k_1\le k<k_2}\{\mathbb{E}_i(p^k)\} \le \max\{n\bar\delta/p_i^0;\ n\bar\delta/\underline{\delta}\}$, что и требовалось установить. $\square$

Итак, несмотря на то, что цены на различные товары возрастают, вообще говоря, с различной скоростью, избыточный рыночный спрос на них оказывается ограничен сверху некоторой константой. Это позволяет перейти к следующему утверждению.

Лемма 5. *Пусть последовательность $\{p^k\}_{k=0}^\infty$, генерируемая алгоритмом 1, оказалась не ограниченной. Тогда произвольная предельная точка $\bar p$ нормированной последовательности $\{p^k/\|p^k\|_1\}_{k=0}^\infty$ будет положительной, т. е. $\bar p > 0$.*

Доказательство. Все компоненты нормированной последовательности цен положительны, при этом в силу однородности избыточного рыночного спроса имеет место равенство $\mathbb{E}(p^k) = \mathbb{E}(\check p^k)$, где $\check p^k = p^k/\|p^k\|_1$. Предположим, что для некоторого товара i предельная нормированная цена $\bar p_i$ равна нулю. Тогда имеет место сходимость некоторой подпоследовательности $\check p_i^k \to +0$ (сохраним для нее исходную нумерацию). Но в силу леммы 4 избыточный спрос на i-й товар ограничен сверху некоторой константой

$$\mathbb{E}_i(p^k) = \mathbb{E}_i(\check p^k) = \frac{1}{\check p_i^k}\ \sum_{s=1}^n c_{is}\check p_s^k - 1\ \le \text{const},$$

что подразумевает, что

$$\sum_{s=1}^n c_{is}\check p_s^k \le (\text{const}+1)\check p_i^k \to +0,$$

т. е. в рамках выбранной подпоследовательности к нулю сходятся и нормированные цены $\check p_s^k$ на все те товары, на которые товар i обмениваем непосредственно (так как для них $c_{is} > 0$). Приводя такие же аргументы к нормированным ценам на товары, обмениваемые непосредственно с теми товарами, которые обмениваемы непосредственно с товаром i, получаем сходимость к нулю тех же самых подпоследовательностей, составленных из их нормированных цен. Поскольку по предположению 1 граф $\Gamma(C)$ сильно связен, мы приходим к выводу, что это верно вообще для всех товаров, так что найдена подпоследовательность нормированных цен, сходящаяся к нулю одновременно по всем компонентам. Это, однако, противоречит предположению о том, что все $\|\check p^k\|_1 = 1$. Выявленное противоречие доказывает строгое неравенство $\bar p > 0$. $\square$

Теперь можно сформулировать итоговое утверждение.

Теорема 2. *Пусть исходная экономика $\mathcal{E}(C,b)$ удовлетворяет предположению 1, а параметры алгоритма 1 группой настройки — предположению 2. Тогда возможны только следующие исходы:*

(a) *последовательность цен $\{p^k\}_{k=0}^\infty$ достигает равновесия за конечное число шагов,*

(b) *последовательность цен $\{p^k\}_{k=0}^\infty$ растет неограниченно и*

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}_i(p^k) = 0 \quad (\forall i \in \overline{1,n}).$$

При этом любая предельная точка $\bar p$ нормализованной последовательности $\{p^k\|p^k\|_1^{-1}\}_{k=0}^\infty$ положительна и является точкой равновесия экономики в смысле условий (2).

Доказательство. На самом деле осталось сделать лишь небольшой ряд комментариев, объединяющих приведенные выше леммы в одно целое.

Во-первых, если на каком-то шаге итерационного процесса 1 система цен стабилизировалась, она представляет собой точку равновесия (этот факт рассмотрен в начале раздела; см. случай 2).

Во-вторых, если стабилизации цен не происходит, то применяем последовательно все леммы из разд. 3. Мы приходим к заключению, что все цены растут неограниченно (лемма 1). При этом (см. следствие 2) в силу однородности избыточного рыночного спроса

$$\lim_{k\to\infty} \inf \mathbb{E}(p^k \|p^k\|_1^{-1}) = \lim_{k\to\infty} \inf \mathbb{E}(p^k) \geq 0. \tag{9}$$

Следовательно (см. следствие 2), по причине непрерывной зависимости избыточного рыночного спроса от цен и из-за положительности всех предельных точек $\bar{p}$ последовательности $\{p^k \|p^k\|_1^{-1}\}_{k=0}^{\infty}$ имеем неравенство $\mathbb{E}(\bar{p}) \geq 0$. Отсюда $\bar{p}^\top \mathbb{E}(\bar{p}) \geq 0$, и мы заключаем, что на самом деле все $\mathbb{E}_i(\bar{p}) = 0$. В противном случае, если бы хотя бы для одного i выполнялось неравенство $\mathbb{E}_i(\bar{p}) > 0$, то также выполнялось бы строго и неравенство $\bar{p}^\top \mathbb{E}(\bar{p}) > 0$, что противоречит закону Вальраса.

Значит, все предельные точки последовательности $\{p^k \|p^k\|_1^{-1}\}_{k=0}^{\infty}$ являются точками равновесия и потому (в усиление свойства (9)) $\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}_i(p^k) = 0$ $(\forall i \in \overline{1,n})$.

Доказательство завершено. □

Оценим теперь скорость сходимости алгоритма 1 в предположении неповторяемости элементов последовательности $p^k > 0$.

Лемма 6. *Пусть на каждой итерации алгоритма* 1 *хотя бы одна из компонент вектора текущего избыточного спроса положительна. Тогда существует такое малое* $\varepsilon > 0$, *что при всех* i *и достаточно больших* k *имеем* $p_i^k > (\varepsilon \underline{\delta}/n)k$.

Доказательство. Заметим для начала, что найдутся $\varepsilon > 0$ и номер K такие, что при всех i, j и $k > K$ выполнены неравенства $p_i^k \geq \varepsilon p_j^k$. В противном случае можно было бы выделить пару номеров i и j таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} \inf\{p_i^k/p_j^k\} = 0$, а значит существовала бы предельная точка $\bar{p}$ последовательности $\{p^k\}_{k=0}^{\infty}$, лежащая на границе неотрицательного ортанта, что противоречит лемме 5.

Далее, обозначим $\Delta p_i^k = p_i^{k+1} - p_i^k$. По предположению $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta p_i^k \geq \underline{\delta}$ при всех k. Выше мы уже установили, что

$$p_i^k \geq \varepsilon p_j^k = p_j^0 + \sum_{s=0}^{k} \Delta p_j^s$$

при всех достаточно больших k. Просуммировав это неравенство по всем j, получим

$$np_i^k \geq \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \Big(p_j^0 + \sum_{s=0}^{k-1} \Delta p_j^s \Big) = \varepsilon \|p^0\|_1 + \varepsilon \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} \Delta p_j^s \geq \varepsilon \left(\|p^0\|_1 + k\underline{\delta} \right) > \varepsilon \underline{\delta}\, k.$$

Отсюда следует искомое заключение. □

Следствие 3. *Пусть на каждой итерации алгоритма* 1 *хотя бы одна из компонент вектора текущего избыточного спроса положительна. Тогда существует такое* $\varepsilon > 0$, *что при всех достаточно больших* k *верно*

$$|\mathbb{E}_i(p^k)| < \frac{2n^2 \bar{\delta}}{\varepsilon \underline{\delta}} \cdot \frac{1}{(k-1)}.$$

Доказательство. По лемме 3 все $\mathbb{E}_i(p^k) > -\bar{\delta}/p_i^{k-1}$, так что для всех неположительных $\mathbb{E}_i(p^k)$ по лемме 6 верно неравенство

$$|\mathbb{E}_i(p^k)| < \bar{\delta}/p_i^{k-1} < n\bar{\delta}/[\varepsilon \underline{\delta}(k-1)]. \tag{10}$$

Вместе с тем по закону Вальраса $p^k\,\mathbb{E}(p^k) = \sum\limits_{i\in I_+(k)} p_i^k\,\mathbb{E}_i(p^k) + \sum\limits_{i\notin I_+(k)} p_i^k\,\mathbb{E}_i(p^k) = 0$, так что с учетом последней леммы

$$\frac{\varepsilon\underline{\delta}k}{n}\max_{i\in I_+(k)}\big\{\mathbb{E}_i(p^k)\big\} \le \sum_{i\in I_+(k)} p_i^k\,\mathbb{E}_i(p^k) = -\sum_{i\notin I_+(k)} p_i^k\,\mathbb{E}_i(p^k) < \bar{\delta}\sum_{i\notin I_+(k)}\frac{p_i^k}{p_i^{k-1}},$$

откуда уже для всех положительных $\mathbb{E}_i(p^k)$ и всех достаточно больших k имеем оценку сверху

$$|\mathbb{E}_i(p^k)| \le \max_{i\in I_+(k)}\big\{\mathbb{E}_i(p^k)\big\} < \frac{n\bar{\delta}}{\varepsilon\underline{\delta}k}\sum_{i\notin I_+(k)}\frac{p_i^k}{p_i^{k-1}} < \frac{n\bar{\delta}}{\varepsilon\underline{\delta}k}\sum_{i\notin I_+(k)}\frac{p_i^{k-1}+\bar{\delta}}{p_i^{k-1}} < \frac{n\bar{\delta}}{\varepsilon\underline{\delta}k}2n. \tag{11}$$

Для завершения доказательства осталось свести обе полученные оценки (10) и (11) вместе. □

З а м е ч а н и е. Доказательство сходимости алгоритма 2 циклического перебора может быть проведено по аналогичной схеме и здесь детально не рассматривается. Более того, приведем еще одну версию нашего алгоритма, в которой цены нормируются на каждом шаге.

А л г о р и т м 3 систематической нормировки цен

Шаг 1. Выбираем произвольно начальные цены $p^0 > 0$. Полагаем $k = 0$.
Шаг 2. Нормируем цены, полагая $p^k = p^k/\|p^k\|_1$.
Шаг 3. Определяем текущее множество $I_+(k)$ товаров повышенного спроса

$$i \in I_+(k) \iff \mathbb{E}_i(p^k) = \frac{c_{i1}p_1^k + c_{i2}p_2^k + \cdots + c_{in}p_n^k}{p_i^k} - 1 > 0.$$

Шаг 4. Корректируем цены по правилу

$$p_i^{k+1} = \begin{cases} p_i^k + \varepsilon_k, & \text{если } i \in I_+(k), \\ p_i^k & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 5. Увеличиваем номер итерации $k := k + 1$.
Шаг 6. Возвращаемся на шаг 2.

Условиями сходимости алгоритма 3 являются все то же предположение 1, бесконечная малость шаговых параметров $\varepsilon_k \to +0$ и расходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k = \infty$. Подробное доказательство сходимости алгоритма 3 имеет ту же природу, что и доказательство сходимости алгоритма 1, и также опускается.

4. Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент проводился с участием трех методов — алгоритма 1 групповой коррекции цен, алгоритма 2 циклической коррекции цен и алгоритма 4 из работы [18] (последний также сходится при слабых предположениях; см. формулы (5)). Целью эксперимента являлось сравнение выбранных алгоритмов на задачах разного типа. Тестовые задачи выбирались как из известных списков "плохих" задач, так и строились с использованием датчика случайных чисел. Стартовый вектор цен в каждом примере брался одним и тем же, менялись только параметры настройки и правила формирования очередного шага в (5) (вариант 4.1: $\alpha_{k+1} = 1/(k+1)$, вариант 4.2: $\alpha_{k+1} = \alpha_k(1-\alpha_k),\ \alpha_1 = 1/2$). Расчеты проводились в системе MATLAB.

В табл. 1 приведены данные для уже упоминавшегося выше примера циклической экономики из [18]. Пример характерен тем, что для него выполнены только необходимые условия существования равновесия. В частности, многие известные методы для этого примера

Т а б л и ц а 1

Точность получаемого решения для задачи 1

Число итераций	Алгоритм 1			Алгоритм 2			Алгоритм 4	
	$\delta = 1.0$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.01$	$\delta = 1.0$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.01$	вар. 4.1	вар. 4.2
100	0.051	0.135	3.075	0.022	0.006	1.872	0.039	0.040
500	0.197	0.012	1.120	0.002	0.008	0.003	0.048	0.037
1000	0.005	0.048	0.115	0.002	0.001	0.001	0.036	0.043
5000	0.002	0.001	0.001	0.0002	0.001	0.0005	0.0005	0.0004
10000	0.0005	0.0005	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001	0.0004	0.0004
100000	5.e–5	5.e–5	5.e–5	2.e–5	1.e–5	1.e–5	4.e–5	4.e–5

демонстрируют хаотическое поведение. В первой колонке таблицы указано число итераций, в остальных — достигнутая к этой итерации точность, оцениваемая 1-нормой вектора избыточного рыночного спроса. Исходные цены одни и те же, при них $\|\mathbb{E}(p^0)\|_1 = 4.091$.

Из приведенных в табл. 1 данных видно, что алгоритм 4 поначалу опережает алгоритм 1 и примерно эквивалентен алгоритму 2, но в дальнейшем с ростом требований по точности все три алгоритма становятся сопоставимыми друг с другом. При этом первые два алгоритма требуют меньшей информации для выбора очередного направления спуска. Что касается выбора параметров прироста цен в методах 1–2, то в краткосрочной перспективе этот выбор оказывает влияние на скорость сходимости методов 1–2, но при достаточно большом числе итераций эти различия нивелируются.

В табл. 2 приведены данные для примера размерности 10×10, построенного с помощью датчика случайных чисел. При этом матрица A формировалась трех-диагональной, а матрица B бралась единичной. Содержательный смысл данных, приведенных в табл. 2, тот же, что и в табл. 1. Исходные цены в каждом методе одни и те же, при них $\|\mathbb{E}(p^0)\|_1 = 15.42$.

Приведенные данные подтверждают предыдущие выводы.

В таблице 3 приведены данные расчетов по методам 1–2 для случая, когда предпочтения потребителей выражены функциями полезности с постоянной нормой замещения факторов (C.E.S.-функций) и для экономики Г. Скарфа из [11]. Хотя теоретического анализа для этих экономик не проводилось, результаты расчетов выглядя обнадеживающе.

Напомним, что экономика C.E.S.-функций порождается функциями полезности вида

$$u(x) = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1/r} x_j^{(r-1)/r}\Big)^{r/(r-1)},$$

Т а б л и ц а 2

Точность получаемого решения для задачи 2

Число итераций	Алгоритм 1			Алгоритм 2			Алгоритм 4	
	$\delta = 1.0$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.01$	$\delta = 1.0$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.01$	вар. 4.1	вар. 4.2
100	0.425	5.56	12.7	0.018	2.011	8.72	0.034	0.033
500	0.007	1.55	7.9	0.004	0.002	3.61	0.007	0.007
1000	0.007	0.414	5.56	0.002	0.008	2.01	0.004	0.004
10000	0.0003	0.0007	0.414	0.0001	0.0001	0.0001	0.0003	0.0003
100000	2.e–5	1.e–5	3.e–5	2.e–5	2.e–5	2.e–5	3.e–5	3.e–5

Таблица 3

Поведение алгоритма 1 для других типов экономик

Число итераций	Экономика C.E.S функций			Экономика Г.Скарфа		
	$\delta = 1.0$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.01$	$\delta = 1.0$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.01$
500	0.006	0.127	0.245	0.043	0.18	0.24
1000	0.003	0.015	0.0721	0.021	0.09	0.10
5000	0.0007	0.0016	0.0022	0.0044	0.012	0.022
10000	0.0005	0.0008	0.0011	0.0023	0.006	0.009
100000	4.e−5	4.e−5	5.e−5	0.0002	0.0002	0.0003

где все $a_j > 0$, $r < 1$. В этом случае избыточный спрос j-го участника равен

$$\mathbb{E}_j(p) = \frac{a_j}{p_j^r} \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} p_s b_s}{\sum\limits_{s=1}^{n} p_s^{1-r} a_s} - b_j \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Пусть имеется m участников рынка. Если вновь ввести матрицу параметров $A = (a_{ij})_{m\times n}$ (генерировалась случайно) и матрицу начального распределения товаров $B = (b_{ij})_{m\times n}$ (бралась единичной), то можно выразить совокупный избыточный спрос формулой

$$\mathbb{E}(p) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}^i(p) = \operatorname{diag}(p)^{-r} A^\top \big(\operatorname{diag}(A \operatorname{diag}(p)^{1-r} e)\big)^{-1} Bp - b.$$

Для экспериментов брались $m = n = 3$.

В свою очередь, для экономики Г. Скарфа имеем точную формулу

$$\mathbb{E}(p_1, p_2, p_3) = \Big(\frac{p_3}{p_1 + p_3} - \frac{p_2}{p_1 + p_2};\ \frac{p_1}{p_1 + p_2} - \frac{p_3}{p_2 + p_3};\ \frac{p_2}{p_2 + p_3} - \frac{p_1}{p_1 + p_3}\Big).$$

Этот пример имеет единственное равновесие (луч $p_1 = p_2 = p_3 > 0$), но плохо поддается анализу и является контрпримером ко многим алгоритмам "нащупывания". Здесь всего три товара и нет ни свойства глобальной валовой заменимости, ни выполнения слабой аксиомы выявленных предпочтений, ни свойства $\bar{p}\,\mathbb{E}(p) > 0$.

Начальные цены $p^0 > 0$ выбирались случайно из диапазона (0.1,10). В приведенных примерах $\|\mathbb{E}(p^0)\|_1 = 2.21$ для C.E.S.-экономики и $\|\mathbb{E}(p^0)\|_1 = 0.61$ для примера Г. Скарфа.

Особенно медленная сходимость наблюдается для примера Г. Скарфа, что, впрочем, и не удивительно.

Заключение

Предложены максимально простые методы нахождения равновесных цен в классических моделях обмена Эрроу — Дебре с мультипликативными функциями полезности участников, моделирующие наиболее простые и инстинктивные формы их поведения. Методы используют только периодическое повышение цен на дефицитные товары и сходятся при достаточно слабых начальных предположениях, имеют содержательную экономическую интерпретацию и выясняют позитивную роль умеренной инфляции в установлении равновесия. Представлены соответствующие теоремы сходимости. Проведены тестовые расчеты, в том числе для экономик других типов. Оказалось, методы могут работать и в этих случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Walras L.** Elements d'economie politique pure. Lausanne: Corbaz, 1874. 407 p.
2. **Samuelson P. A.** The stability of equilibrium: comparative statics and dynamics // Econometrica. 1941. Vol. 9, no. 2. P. 97–120. doi: 10.2307/1906872 .
3. **Arrow K. J., Debreu G.** Existence of equilibrium for a competitive economy // Econometrica. 1954. Vol. 25. P. 265–290. doi: 10.2307/1907353 .
4. **Arrow K. J., Hurwicz L.** On the stability of the competitive equilibrium // Econometrica. 1958. Vol. 26, no. 4. P. 522–552. doi: 10.2307/1907515 .
5. **Uzawa H.** Walras' tatonnenment in the theory of exchange // Review of Economic Studies. 1960. Vol. 27, no. 3. P. 182–194. doi: 10.2307/2296080 .
6. **Карлин С.** Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Москва: Мир, 1964. 835 с.
7. **Arrow K. J., Hahn F. H.** General competitive analysis. Amsterdam: North-Holland, 1971. 452 p.
8. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. Москва: Мир, 1972. 519 с.
9. **Shafer W. J., Sonnenschein H. F.** Some theorems on the existence of competitive equilibrium // J. Econ. Theory. 1975. Vol. 11, no. 1. P. 83–93. doi: 10.1016/0022-0531(75)90040-X .
10. **Eaves B. C.** Finite solution of pure trade markets with Cobb — Douglas utilities // Economic Equilibrium: Model Formulation and Solution / ed. A.S. Manne. Berlin; Heidelberg: Springer, 1985. doi: 10.1007/BFb0121035 . P. 226–239. (Math. Program. Study; vol.23).
11. **Scarf H.** Some examples of global instability of the competitive equilibrium // Internat. Econom. Rev. 1960. Vol. 1, no. 3. P. 157–172. doi: 10.2307/2556215 .
12. **Bala V., Majumdar M.** Chaotic tatonnement // Econ. Theory. 1992. Vol. 2, no. 4. P. 437–445. doi: 10.1007/BF01212469 .
13. **Mukherji A.** A simple example of complex dynamics // Econ. Theory. 1999. Vol. 14, no. 3. P. 741–749. doi: 10.1007/s001990050353 .
14. **Tuinstra J.** A discrete and symmetric price adjustment process on the simplex // J. Econ. Dynamics and Control. 2000. Vol. 24, no. 5–7. P. 881–907. doi: 10.1016/S0165-1889(99)00029-9 .
15. **Антипин А. С.** Экстрапроксимальный подход к вычислению равновесий в моделях чистого обмена // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1771–1783.
16. **Cole R., Fleischer I.** Fast-converging tatonnement algorithms for one-time and ongoing market problems // Proc. of the Fortieth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'08). N Y: ACM, 2008. P. 315–324. doi: 10.1145/1374376.1374422 .
17. **Kitti M.** Convergence of iterative tatonnement without price normalization // J. Econ. Dynamics and Control. 2010. Vol. 34, no. 6. P. 1077–1091. doi: 10.1016/j.jedc.2010.01.011 .
18. **Shikhman V., Nesterov Yu., Ginsburg V.** Power method tatonnements for Cobb – Douglas economies // J. Math. Econ. 2018. Vol. 75. P. 84–92. doi: 10.1016/J.JMATECO.2017.12.010 .

Поступила 16.03.2020
После доработки 20.04.2020
Принята к публикации 18.05.2020

Попов Леонид Денисович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор, Институт математики и компьютерных наук
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: popld@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Walras L. *Elements d'economie politique pure*. Lausanne: Corbaz, 1874, 407 p.
2. Samuelson P. A. The stability of equilibrium: comparative statics and dynamics. *Econometrica*, 1941, vol. 9, no. 2, pp. 97–120. doi: 10.2307/1906872 .

3. Arrow K.J., Debreu G. Existence of equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 1954, vol. 25, pp. 265–290. doi: 10.2307/1907353 .
4. Arrow K.J., Hurwicz L. On the stability of the competitive equilibrium. *Econometrica*, 1958, vol. 26, no. 4, pp. 522–552. doi: 10.2307/1907515 .
5. Uzawa H. Walras' tâtonnenment in the theory of exchange. *Review of Economic Studies*, 1960, vol. 27, no. 3, pp. 182–194. doi: 10.2307/2296080 .
6. Karlin S. *Mathematical methods and theory in games, programming, and economics. Vol. I, II.* London; Paris: Pergamon Press, 1959. Vol. I: 433 p. ISBN: 9781483222981 . Vol. II: 386 p. ISBN: 9781483224008 . Translated to Russian under the title *Matematicheskie metody v teorii igr, programmirovanii i ekonomike.* Moscow: Mir Publ., 1964, 835 p.
7. Arrow K.J., Hahn F.H. *General competitive analysis.* Amsterdam: North-Holland, 1971, 452 p. ISBN: 0816202753 .
8. Nikaido H. *Convex structures and economic theory.* N Y: Academic Press, 1968, 405 p. ISBN: 9781483230030 . Translated to Russian under the title *Vypuklye struktury i matematicheskaya ekonomika.* Moscow: Mir Publ., 1972, 519 p.
9. Shafer W.J., Sonnenschein H.F. Some theorems on the existence of competitive equilibrium. *J. Econ. Theory*, 1975, vol. 11, no. 1, pp. 83–93. doi: 10.1016/0022-0531(75)90040-X .
10. Eaves B.C. Finite solution of pure trade markets with Cobb — Douglas utilities. In: Manne A.S. (eds) *Economic Equilibrium: Model Formulation and Solution*, Ser. Math. Program. Studies, vol. 23. Berlin; Heidelberg: Springer, 1985, pp. 226–239. doi: 10.1007/BFb0121035 .
11. Scarf H. Some examples of global instability of the competitive equilibrium. *Internat. Econom. Rev.*, 1960, vol. 1, no. 3, pp. 157–172. doi: 10.2307/2556215 .
12. Bala V., Majumdar M. Chaotic tatonnement. *Econ. Theory*, 1992, vol. 2, no. 4, pp. 437–445. doi: 10.1007/BF01212469 .
13. Mukherji A. A simple example of complex dynamics. *Econ. Theory*, 1999, vol. 14, no. 3, pp. 741–749. doi: 10.1007/s001990050353 .
14. Tuinstra J. A discrete and symmetric price adjustment process on the simplex. *J. Econ. Dynamics and Control*, 2000, vol. 24, no. 5-7, pp. 881–907. doi: 10.1016/S0165-1889(99)00029-9 .
15. Antipin A.S. Extraproximal approach to calculating equilibriums in pure exchange models. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2006, vol. 46, no. 10, pp. 1687–1698. doi: 10.1134/S096554250610006X .
16. Cole R., Fleischer I. Fast-converging tatonnement algorithms for one-time and ongoing market problems. In: *Proc. of the Fortieth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'08).* N Y: ACM, 2008, pp. 315–324. doi: 10.1145/1374376.1374422 .
17. Kitti M. Convergence of iterative tatonnement without price normalization. *J. of Economic Dynamics and Control*, 2010, vol. 34, no. 6, pp. 1077–1091. doi: 10.1016/j.jedc.2010.01.011 .
18. Shikhman V., Nesterov Yu., Ginsburg V. Power method tatonnements for Cobb – Douglas economies. *J. Math. Econ.*, 2018, vol. 75, pp. 84–92. doi: 10.1016/J.JMATECO.2017.12.010 .

Received March 16, 2020
Revised April 20, 2020
Accepted May 18, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-07-01243).

Leonid Denisovich Popov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: popld@imm.uran.ru .

L. D. Popov. On iterative methods of finding the equilibrium in the Arrow–Debreu classical model of pure exchange with multiplicative utility functions of the participants, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 154–170 .