ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 3 2020

УДК 519.17+512.54

# ОТКРЫТЫЕ ПРОБЛЕМЫ, СФОРМУЛИРОВАННЫЕ НА XIII ШКОЛЕ-КОНФЕРЕНЦИИ ПО ТЕОРИИ ГРУПП, ПОСВЯЩЕННОЙ 85-ЛЕТИЮ В.А. БЕЛОНОГОВА

**Н. В. Маслова, И. Н. Белоусов, Н. А. Минигулов**

В статье представлены обзор основных событий XIII Школы-конференции по теории групп, которая прошла 3–7 августа 2020 г. в онлайн формате, и список открытых проблем с комментариями к ним. Открытые вопросы были сформулированы участниками школы-конференции на часе открытых проблем, состоявшемся в конце ее работы. Среди поставленных проблем серия вопросов о характеризации конечной группы ее арифметическими инвариантами, такими как спектр, граф Грюнберга — Кегеля, граф разрешимости, степени неприводимых комплексных характеров (Л. С. Казарин, А. С. Кондратьев, Н. В. Маслова), вопрос о сопряженности силовских 2-подгрупп в локально конечных группах с дополнительными условиями на силовские 2-подгруппы (В. Д. Мазуров), серия проблем о характеризации дистанционно регулярных графов их массивами пересечений (А. А. Махнев), вопрос о нильпотентной длине конечной разрешимой группы, у которой подгруппа Картера совпадает с подгруппой Гашюца (В. С. Монахов), серия проблем о строении сопряженно бипримитивно конечных групп или групп Шункова (А. И. Созутов), вопрос о строении некоторых матричных групп над кольцом вычетов $\mathbb{Z}_n$, где $n$ — натуральное число (В. А. Романьков), вопрос о характеризации мазуровских троек в конечных группах (А. В. Тимофеенко) и другие открытые вопросы современной теории групп и ее приложений. Также в статье представлены краткая биография и список основных трудов В. А. Белоногова.

Ключевые слова: конечная группа, спектр, граф Грюнберга — Кегеля, граф разрешимости, локально конечная группа, периодическая группа, силовская 2-подгруппа, подгруппа Картера, подгруппа Гашюца, сопряженно бипримитивно конечная группа (группа Шункова), мазуровская тройка.

**N. V. Maslova, I. N. Belousov, N. A. Minigulov. Open questions formulated at the 13th School–Conference on Group Theory Dedicated to V. A. Belonogov's 85th Birthday.**

A review of the main events of the 13th School–Conference on Group Theory, which was held online on August 3–7, 2020, is presented, and a list of open questions with comments is given. Open questions were formulated by the participants at the Open Problems Session held at the end of the school–conference. Among the posed problems there are a series of questions on the characterization of a finite group by its arithmetic invariants such as the spectrum, the Gruenberg–Kegel graph, the solvabile graph, and the degrees of irreducible complex characters (L. S. Kazarin, A. S. Kondrat'ev, and N. V. Maslova); the question of the conjugacy of the Sylow 2-subgroups in locally finite groups with additional conditions on these subgroups (V. D. Mazurov); a series of problems on the characterization of distance-regular graphs by their intersection arrays (A. A. Makhnev); the question of the nilpotent length of a finite solvable group whose Carter subgroup coincides with the Gaschütz subgroup (V. S. Monakhov); a series of problems about the structure of conjugately biprimitively finite groups or Shunkov groups (A. I. Sozutov); a question on the structure of some matrix groups over a residue ring $\mathbb{Z}_n$ for a positive integer $n$ (V. A. Roman'kov); a question on the characterization of Mazurov triples in finite groups (A. V. Timofeenko); and other open questions of the modern group theory and its applications. V. A. Belonogov's brief biography and the list of his main publications are also presented.

Keywords: finite group, spectrum, Gruenberg–Kegel graph, solvabile graph, locally finite group, periodic group, Sylow 2-subgroup, Carter subgroup, Gaschütz subgroup, conjugately biprimitively finite group (Shunkov group), Mazurov triple.

**MSC:** 20-06 (Primary), 05C25, 05C50, 11R29, 20C15, 20C20, 20Dxx, 20E15, 20F50, 20F99, 52B10 (Secondary)

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-275-285

XIII Школа-конференция по теории групп посвящена 85-летию доктора физико-математических наук, профессора В. А. Белоногова.

Белоногов Вячеслав Александрович родился 24 октября 1935 г. в поселке Зерновом Ростовской области. В 1942 г. его маме удалось переехать с тремя детьми из-под Сталинграда в г. Курган к родственникам; отец был на фронте. Завершив в 1953 г. обучение в средней школе города Шадринска, В. А. Белоногов поступил на механико-математический факультет Томского государственного университета. Окончив его, занимал должность ассистента и затем был аспирантом в том же университете.

После защиты в 1963 г. кандидатской диссертации В. А. Белоногов работал доцентом Томского инженерно-строительного института. Одним из его оппонентов по кандидатской диссертации был Альберт Иванович Старостин, по приглашению которого Вячеслав Александрович в 1966 г. устроился на работу в Институт математики и механики (ИММ) УрО РАН (называвшийся в то время Свердловским отделением Математического Института им. В. А. Стеклова АН СССР) в отдел алгебры и логики. В 1992 г. он защитил докторскую диссертацию, с 1 октября того же года по настоящее время работает в должности ведущего научного сотрудника отдела алгебры и топологии ИММ УрО РАН. Область его научных интересов — конечные группы и их представления. В 1984 г. он начал разрабатывать новое научное направление теории представлений групп — теорию взаимодействий и D-блоков, актуальность и важность которого подтверждены отзывами ведущих специалистов по теории групп как отечественных, так и зарубежных. Также В. А. Белоногов занимался теорией характеров групп лиева типа и симметрических групп. Эти исследования были связаны с одной из основных проблем теории представлений конечных групп — взаимосвязи свойств группы со свойствами ее таблицы характеров. В этом направлении Вячеславом Александровичем получено существенное продвижение в доказательстве своей гипотезы: полупропорциональные неприводимые характеры любой конечной группы имеют одинаковые степени. В последнее время он изучает абстрактные свойства конечных групп, в том числе используя свою идею контроля простого спектра группы. Исследования В. А. Белоногова поддержаны грантами Российского фонда фундаментальных исследований, а также грантами зарубежных научных фондов.

По совместительству с 1993 по 2012 гг. В. А. Белоногов работал профессором в УГТУ- УПИ, имеет ученое звание профессора по кафедре “Автоматика и информационные технологии”. Он член совета но защитам докторских диссертаций. Долгое время был членом Американского математического общества, референтом реферативных журналов “Математика” ВИНИТИ и “Mathematical Reviews”. Имеет почетное звание “Заслуженный деятель науки Российской Федерации”.

В списке трудов В. А. Белоногова более 130 названий, в том числе 4 монографии (одна — совместно с А. Н. Фоминым).

*СПИСОК ОСНОВНЫХ ТРУДОВ В. А. БЕЛОНОГОВА*

1. О максимальных подгруппах I // Изв. вузов. Математика. 1962. № 4. С. 13–18; II. № 5. С. 3–11.

2. Конечные группы с единственным классом ненильпотентных максимальных подгрупп // Сиб. мат. журн. 1964. Т. 5, № 5. С. 987–995.

3. Конечные группы с парой несопряженных нильпотентных максимальных подгрупп // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161. № 6. С. 1255–1256.

4. Один признак разрешимости групп четного порядка // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 2. С. 58–459.

5. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами // Мат. заметки. 1968. Т. 3, № 1. Р. 21–32.

6. О конечных группах, насыщенных $(\pi, \pi')$-разложимыми подгруппами // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 3. С. 494–506.

7. Конечные группы с единственным классом максимальных неинвариантных подгрупп // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1969. № 3. С. 114–117.

8. Характеризация простых групп $PSL(2, 2^n)$ и $Sz(q)$ бипримарными подгруппами // Мат. заметки. 1970. Т. 8, № 1. Р. 85–93.

9. Характеризация некоторых конечных простых групп // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1971. Т. 35, № 4. С. 789–799.

10. Характеризация некоторых конечных простых групп бипримарными подгруппами I // Алгебра и логика. 1971. Т. 10, № 6. С. 603–619; II. Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1973. Т. 37, № 5. С. 988–1009.

11. Характеризация групп типа Ри бипримарными подгруппами // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 317–324.

12. Конечные группы с бипримарными подгруппами определенного вида // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 6. С. 853–857.

13. Матричные представления в теории конечных групп. Наука, 1976. 126 с. (совм. с А.Н. Фоминым).

14. Нормальные дополнения и сопряженность инволюций в конечной группе // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 1. С. 22–38.

15. Признаки непростоты конечной группы на языке характеров // Алгебра и логика. 1982. Т. 21, № 4. С. 386–401.

16. Конечные группы с тремя классами максимальных подгрупп // Мат. сб. 1986. Т. 131, № 2. С. 225–239.

17. $D$-blocks of characters of a finite group // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1989. Vol. 143, no. 2. P. 103–128.

18. Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990. 379 с.

19. Новый метод вычисления $p$-блоков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 3–12.

20. О малых взаимодействиях в конечных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 3–18.

21. Признаки непростоты конечной группы на языке характеров // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1995. Т. 3. С. 3–18.

22. Малые взаимодействия в группах $GL_3(q), GU_3(q), PGL_3(q), PGU_3(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 17–47.

23. Малые взаимодействия в группах $SL_3(q), SU_3(q), PSL_3(q)$ и $PSU_3(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 3–27.

24. Задачник по теории групп. М.: Наука, 2000. 239 с.

25. Одно свойство таблицы характеров конечной группы // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3. С. 273–279.

26. О минимальности активного фрагмента таблицы характеров конечной группы // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 992–997.

27. Взаимодействия и активные фрагменты таблицы характеров конечной группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 2. С. 34–54.

28. A characterization of the Janko group $J_1$ by an active fragment of its character table // Publ. Math. 2001. Vol. 59, no. 1-2. P. 195–202.

29. Восстановление стертой строки или стертого столбца таблицы характеров конечной группы // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 299–314.

30. О неприводимых характерах групп $S_n$ и $A_n$ // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 977–994.

31. К гипотезе о полупропорциональных характерах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 233–245.

32. О нулях в таблице характеров групп $S_n$ и $A_n$ // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 24–43; II. № 6. С. 643–663.

33. О равнокорневых неприводимых характерах групп $S_n$ и $A_n$ // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 1. С. 3–25.

34. О некоторых парах неприводимых характеров групп $S_n$ и $A_n$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 1. С. 11–43.

35. О некоторых парах неприводимых характеров групп $S_n$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 13–32.

36. Диаграммы Юнга без крюков длины четыре и характеры группы $S_n$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 30–40.

37. О неприводимых характерах группы $S_n$, полупропорциональных на $A_n$ // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 135–156.

38. О диаграммах Юнга пары неприводимых характеров группы $S_n$, равнокоренных на $S_n$ // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 992–1006.

39. О неприводимых характерах группы $S_n$, полупропорциональных на $A_n$ или на $S_n \setminus A_n$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 143–163; II. № 3. С. 58–68; III. № 4. С. 12–30; IV. 2009. Т. 15, № 2. С. 12–33; V. 2010. Т. 16, № 2. С. 13–34; VI. № 3. С. 25–44; VII. 2011. Т. 17, № 1. С. 3–16.

40. Теория кодирования. Учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2009. 161 с.

41. Конечные группы с $D$-блоком мощности 3 // Фунд. прикл. математики. 2009. Т. 15, № 2. С. 23–33.

42. Малые взаимодействия в группах $Sp_4(q)$ при четных $q$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 19–37.

43. К гипотезе о полупропорциональных характерах в группах $Sp_4(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 30–46.

44. Полупропорциональные неприводимые характеры групп $Sp_4(q)$ и $PSp_4(q)$ при нечетных $q$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 25–40.

45. О контроле простого спектра конечной простой группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 29–44.

46. Конечные группы, все 2-максимальные подгруппы которых $\pi$-разложимы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 29–43.

47. Конечные группы, все максимальные подгруппы которых $\pi$-замкнуты. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 25–34; II, 2016. Т. 22, № 3. С. 12–22.

48. О полупропорциональных столбцах таблицы характеров групп $Sp_4(q)$ и $PSp_4(q)$ при нечетном $q$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 46–53.

49. Условие для конечной группы быть группой Шмидта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 81–86.

50. Конечные группы с четырьмя классами сопряженных максимальных подгрупп. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 4. С. 52–62; II. Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15, С. 86–91.

Школа-конференция была организована сотрудниками отдела алгебры и топологии Института математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН) в г. Екатеринбурге и прошла в онлайн-формате 03–07 августа 2020 г. Председатель Оргкомитета — главный научный сотрудник ИММ УрО РАН д. ф.-м. н. В. В. Кабанов, председатель Программного комитета — член-корр. РАН А. А. Махнев, заместитель председателя Программного комитета — ведущий научный сотрудник ИММ УрО РАН д. ф.-м. н. Н. В. Маслова, ученый секретарь Оргкомитета — младший научный сотрудник ИММ УрО РАН Н. А. Минигулов.

Школа-конференция собрала ведущих специалистов в области теории групп и ее приложений. Программа работы школы-конференции состояла из двадцати двух 45-минутных лекций/пленарных докладов приглашенных докладчиков:

В. А. Белоногов, “О конечных группах, имеющих точно 4 класса сопряженных максимальных подгрупп”;

Г. П. Егорычев, С. Г. Колесников, цикл из двух лекций “Комбинаторные задачи, связанные с собирательным процессом и вычислениями в группах Шевалле”;

В. И. Зенков, “Об одной гипотезе для конечных групп”;

Л. С. Казарин, “Размеры классов сопряженных элементов и факторизации”;

А. С. Кондратьев, “Распознаваемость конечных групп по графу Грюнберга — Кегеля”;

Н. В. Маслова, “О графах Грюнберга — Кегеля конечных групп”;

С. В. Матвеев, “Табулирование трехмерных многообразий до сложности 13”;

А. А. Махнев, цикл из трех лекций “К теории графов Шилла”;

Я. Н. Нужин, “Порождающие множества элементов групп лиева типа”;

А. Ю. Ольшанский, ”Группы, конечно определенные в многообразиях Бернсайда”;

В. А. Романьков, две лекции “Теоремы вложения для разрешимых групп” и ”Традиционные и принципиально новые схемы алгебраической криптографии;

А. И. Созутов, две лекции “Точно кратно транзитивные группы и связанные с ними структуры” и ”Группы с симплектическими 3-транспозициями и связанные с ними структуры”;

А. В. Тимофеенко, цикл из трех лекций “Порожденные инволюциями группы и многогранники с условиями симметричности”;

А. А. Трофимук, “Признаки сверхразрешимости факторизуемой группы с частично перестановочными подгруппами из сомножителей”;

А. А. Шлепкин, “О группах, насыщенных полными линейными группами”; а также шестнадцати 20-минутных выступлений других участников конференции.

В последний день работы конференции состоялся час **открытых проблем**, вызвавший оживленную дискуссию. Участники школы-конференции представили следующие открытые вопросы (вопросы вместе с комментариями к ним приводятся в порядке, позволяющем избежать дублирования определений).

**1.** Пусть $P = \langle 1-\alpha^k \mid k \in \{1,2\ldots,2^n-1\}\rangle \leqslant \mathbb{Q}^*_{2^n}$ — подгруппа по умножению мультипликативной группы $\mathbb{Q}^*_{2^n}$ кругового поля $\mathbb{Q}_{2^n}$ степени $2^n$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Тогда *группой круговых единиц* поля $\mathbb{Q}_{2^n}$ называется группа $K(\alpha) = P \cap Un\,(\mathbb{Z}[\alpha])$, где $Un\,(\mathbb{Z}[\alpha])$ обозначает группу единиц (обратимых элементов) кольца $\mathbb{Z}[\alpha]$. Положим $h(n) := |Un\,(\mathbb{Z}[\alpha]) : K(\alpha)|$ (см. [25]). Решить проблему Вебера о числе классов (Weber class number problem), доказав, что число классов $h(n)$ равно 1 для любого натурального числа $n$. На данный момент известно, что $h(n) = 1$ для $n \leqslant 8$, а при допущении обобщенной гипотезы Римана $h(9) = 1$ (см. [13; 14; 20; 21]), более того, если простое число $\ell$ меньше, чем $10^9$, или $\ell \not\equiv \pm 1 \pmod{32}$, то $\ell$ не делит $h(n)$ для всех $n \geqslant 1$ (см. [11]). Кроме того, известно [1, следствие 4], что если $p > 3$ — простое число, то

$$Un\,\big((\mathbb{Z}[\alpha] \cap \mathbb{R})/p^i(\mathbb{Z}[\alpha] \cap \mathbb{R})\big) = \frac{p-1}{2}p^{i-1}.$$

*Р. Ж. Алеев*

**2.** Спектром $\omega(G)$ конечной группы $G$ называется множество всех порядков ее элементов. Конечная группа $G$ называется распознаваемой по спектру, если для любой конечной группы $H$ из равенства $\omega(G) = \omega(H)$ следует изоморфизм групп $G$ и $H$. Верно ли, что для любого натурального числа $k$ найдется конечная группа $G = G(k)$ такая, что прямое произведение $k$ копий группы $G$ распознаваемо по спектру? Для каждой конечной простой группы $G$ найти наибольшее число $k = k(G)$ такое, что прямое произведение $k$ копий группы $G$ распознаваемо по спектру. Известно, что многие конечные неабелевы простые группы распознаваемы по спектру (этот результат получен в нескольких десятках работ, более подробно см., например, [27]), более того, тривиальность разрешимого радикала конечной группы является необходимым условием ее распознаваемости по спектру (см., например, [7]). В работах [16] и [12] доказана распознаваемость по спектру групп $Sz(2^7) \times Sz(2^7)$ и $J_4 \times J_4$ соответственно. В то же время, для любой конечной группы $G$ существует натуральное число $n$ такое, что прямое произведение $n$ (и более) копий группы $G$ имеет тот же спектр, что и некоторая конечная абелева группа, поэтому такое прямое произведение не может быть распознаваемо по спектру. Также если прямое произведение $m$ копий группы $G$ распознаваемо по спектру, то и для любого $i \leq m$ прямое произведение $i$ копий группы $G$ распознаваемо по спектру.

*Н. В. Маслова*

**3.** Пусть $G$ — конечная группа, обладающая неприводимым комплексным характером $\chi$ степени $p^m$, где $p$ — простое число и $m$ — натуральное число. Описать строение группы $G$ при условии, что $|G| \leq 2p^{2m}$.

*Л. С. Казарин*

**4.** Простым спектром $\pi(G)$ конечной группы $G$ называется множество всех простых делителей ее порядка. Граф Грюнберга — Кегеля (или граф простых чисел) $\Gamma(G)$ конечной группы $G$ — это обыкновенный граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины $p$ и $q$ смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Классифицировать конечные простые группы, распознаваемые по порядку и графу Грюнберга — Кегеля. Заметим, что распознаваемость любой конечной неабелевой простой группы по порядку и спектру была доказана в [2], при этом простые группы $B_n(q)$ и $C_n(q)$ имеют одинаковые порядки и графы Грюнберга — Кегеля, но не изоморфны, если $q$ нечетно и $n \geq 3$.

*А. С. Кондратьев*

**5.** Пусть $G$ — конечная неразрешимая группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля, $F(G) \neq 1$ и $\overline{G} := G/F(G)$, где $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы $G$. Описать главные факторы группы $G$ как $\overline{G}$-модули. Решение этой проблемы, в частности, повлечет решение проблемы распознаваемости по графу Грюнберга — Кегеля конечных почти простых групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля.

*А. С. Кондратьев*

**6.** Существует ли конечная группа $G$, отличная от групп $J_4$, ${}^2G_2(27)$ и $E_8(q)$, где $q \in \{2,3,4,5,7,8,9,17\}$, такая, что для любой конечной группы $H$ если графы Грюнберга — Кегеля $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ изоморфны как абстрактные графы, то $G \cong H$. Для группы $J_4$ указанное свойство было доказано А. В. Заварнициным [4, теорема Б]; для группы ${}^2G_2(27)$ это свойство следует из основного результата работы [15] и [4, теорема А]; недавно Н. В. Масловой при участии М. Р. Зиновьевой было показано[1], что если $G \cong E_8(q)$, где $q \in \{2,3,4,5,7,8,9,17\}$, и $H$ — конечная группа, то из изоморфизма графов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ как абстрактных графов следует изоморфизм групп $G$ и $H$. Отметим также, что существуют неизоморфные конечные группы с одинаковым простым спектром, графы Грюнберга — Кегеля которых изоморфны как абстрактные графы, но не равны. Например, таким свойством обладают группы $Alt(10)$ и $Aut(J_2)$.

*Н. В. Маслова*

**7.** Граф разрешимости $\Gamma_{sol}(G)$ конечной группы $G$ — это обыкновенный граф, вершинами которого являются элементы ее простого спектра $\pi(G)$, и две различные вершины $p$ и $q$ смежны тогда и только тогда, когда в $G$ найдется разрешимая подгруппа, порядок которой делится на $pq$. Понятие графа разрешимости конечной группы было введено С. Абе и Н. Йиори [10] как обобщение понятия графа Грюнберга — Кегеля. Легко понять, что граф Грюнберга — Кегеля $\Gamma(G)$ группы $G$ является подграфом графа $\Gamma_{sol}(G)$ с тем же множеством вершин, при этом граф разрешимости конечной простой группы всегда связен [10]. Центром графа разрешимости $Z(\Gamma_{sol}(G))$ группы $G$ называется множество вершин, смежных со всеми врешинами $\Gamma_{sol}(G)$. Верно ли, что порядок центра $Z(\Gamma_{sol}(G))$ графа $\Gamma_{sol}(G)$ не превосходит $q-1$, если $G$ — конечная простая группа лиева типа с базовым полем $GF(q)$? Описать конечные простые группы $G$ лиева типа, у которых центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ не пуст. Известно, что если $|\pi(G)| = 3$, то центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ простой группы $G$ не пуст, порядки центров графов разрешимости знакопеременных групп не ограничены в совокупности, а у спорадической простой группы, как правило, центр ее графа разрешимости пуст.

*Л. С. Казарин*

**8.** Группа, порожденная множеством $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ с соотношениями $a_0^p = 1, a_i^p = a_{i-1}, i > 0$, называется квазициклической $p$-группой (здесь $p$ — простое число). Расширение прямого произведения конечного числа квазициклических $p$-групп с помощью конечной $p$-группы называется черниковской $p$-группой. Например, каждая $p$-подгруппа линейной группы над локально конечным полем характеристики, отличной от $p$, является черниковской. Предположим, что $G$ — периодичекая группа, у которой все силовские 2-подгруппы (т.е. максимальные 2-подгруппы) черниковские. Верно ли, что любые две силовские 2-подгруппы сопряжены в $G$? Хорошо известно, что в периодической группе с конечной силовской 2-подгруппой все силовские 2-подгруппы сопряжены. Тот же самый вопрос для локально конечной группы $G$, у которой все силовские 2-подгруппы черниковские.

*В. Д. Мазуров*

**9.** Имеются ли бесконечные серии допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов среди следующих серий:

$$\{2u^2-1, 2u^2-2, u^2+1; 1, 2, u^2-1\},$$

[1]Результат анонсирован в пленарном докладе Н. В. Масловой на данной конференции.

$$\{(q^2+q-1)(q^2+q+1),(q^2+q)q^2,q^3;1,(q^2+q),q^2(q^2+q+1)\},$$

$$\{(r^2+2r-1)(r+2)/2,(r+3)r^2/2,(r+1)r/2;1,(r+3)r/2,(r+2)(r+1)r/2\},\ \text{где } r\not\equiv 3 \pmod 4?$$

*А. А. Махнев*

**10.** Верно ли, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7(n-1),6(n-2),4(n-4);1,6,28\}$ не существует, если $n$ не является степенью числа 2? Это верно, если $n\geq 71$ (см. [18; 19]). Более того, если $n\geq 71$ является степенью числа 2, то любой дистанционно регулярный граф с таким массивом пересечений является графом билинейных форм $H_2(3,e)$. Последнее утверждение было доказано в [19] для $n\geq 134$, недавно И. Н. Белоусовым, М. П. Голубятниковым и А. А. Махневым соответствующее утверждение было доказано для $n\geq 71$.

*А. А. Махнев*

**11.** Существует ли дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{q(q-1),(q+1)(q-2),q+1;1,1,q(q-2)\}$, если $q$ не является степенью простого числа? Если $q$ является степенью простого числа, то дистанционно регулярный граф с такими параметрами существует — это унитарный неизотропный граф.

*А. А. Махнев*

**12.** Подгруппой Гашюца конечной группы $G$ называется подгруппа $W$, удовлетворяющая следующим двум условиям: (1) $W$ сверхразрешима; (2) если $W\leq A<B\leq G$, то $|B:A|$ — не простое число. Какова нильпотентная длина конечной разрешимой группы, в которой подгруппа Картера совпадает с подгруппой Гашюца?

*В. С. Монахов*

**13.** Пусть $p$ и $q$ — простые числа. Число $m$ называется показателем $p$ по модулю $q$, если $q$ делит $p^m-1$ и $q$ не делит $p^k-1$ при любом $k<m$. Существует ли натуральное число $m$, для которого имеется бесконечно много пар простых чисел $p$ и $q$ таких, что $m$ является показателем $p$ по модулю $q$ и показателем $q$ по модулю $p$? Например, для $m\in\{1,2\}$ таких пар нет. Для $m=3$ известна пара $(3,61)$. Для $m=4$ известны пары $(5,13)$ и $(89,233)$. Показатель $m$ является рангом $\{p,q\}$-группы Шмидта с нормальной силовской $p$-подгруппой. Здесь ранг понимается как ранг разрешимой группы. Поэтому эта задача тесно связана с теорией групп.

*В. С. Монахов*

**14.** Пусть $\mathbb{Z}_n$ – кольцо вычетов по модулю $n$. Рассмотрим коммутативную группу $G$ матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix},\quad a,b\in\mathbb{Z}_n,\quad a^2-b^2\in\mathbb{Z}_n^*.$$

Описать строение группы $G$. Найти для нее минимальное число порождающих элементов. Эта группа фигурирует в некоторых работах С. К. Росошека в качестве платформы криптографических протоколов (см. [23; 24]).

*В. А. Романьков*

**15.** Будет ли произвольная полициклическая группа $G$ ступени разрешимости $l$ вложима в 4-порожденную полициклическую группу ступени разрешимости $l+1$? Если $G$ конечна, то ответ на этот вопрос положительный.[2]

*В. А. Романьков*

[2] Результат анонсирован в пленарном докладе В. А. Романькова на данной конференции.

**16.** Сопряженно бипримитивно конечной группой, или группой Шункова, называется группа $G$ такая, что для любой ее конечной подгруппы $H$ в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу. Смешанная группа $G$ обладает периодической частью, если все ее элементы конечных порядков в $G$ составляют подгруппу, которую обычно обозначают через $T(G)$. Группа $G$ насыщена группами из множества $\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп), если любая конечная подгруппа из $G$ содержится в подгруппе группы $G$, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Периодические группы и смешанные группы Шункова, насыщенные различными множествами конечных простых неабелевых групп, изучаются более 20 лет. В связи с вопросами 14.100 и 14.101 А.К. Шлепкина из "Коуровской тетради" [26] естественным образом возникает вопрос: верно ли, что группа Шункова, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, обладает периодической частью, изоморфной простой группе лиева типа над локально конечным полем?

*А. И. Созутов*

**17.** Пусть $G$ — (периодическая) группа Шункова, содержащая инволюцию $i$, и силовские 2-подгруппы группы $G$ являются либо локально циклическими группами, либо обобщенными группами кватернионов. Будет ли инволюция $iO_{2'}(G)$ центральным элементом в $G/O_{2'}(G)$? Другими словами, верна ли теорема Бернсайда — Брауэра — Сузуки для (периодических) групп Шункова? Вопрос является частным случаем вопроса 4.75 В. П. Шункова из "Коуровской тетради" [26]. Для бинарно конечных и сопряженно бинарно конечных групп данный вопрос решен положительно в [3].

*А. И. Созутов*

**18.** Пусть $p$ — простое число и элемент $a$ группы Шункова $G$ порождает с каждым своим сопряженным элементом конечную $p$-подгруппу. Верно ли, что $a \in O_p(G)$? Другими словами, верна ли теорема Бэра — Сузуки в классе (периодических) групп Шункова? Вопрос является частным случаем вопроса А. В. Боровика 11.11 из "Коуровской тетради" [26], решенного отрицательно в [6]. Заметим, что для произвольных групп, но при дополнительном условии артиновости централизатора $C_G(a)$, ответ положительный [9].

*А. И. Созутов*

**19.** Тройка $(i_1, i_2, i_3)$ инволюций конечной группы $G$, порождающих ее, и таких, что $i_1 i_2 = i_2 i_1$, называется $(2\times 2, 2)$-тройкой или мазуровской тройкой (см. [17]). Каждую $(2\times 2, 2)$-тройку характеризует пятерка $(m, n, C_1, C_2, C_3)$, где $m$ и $n$ — порядки произведений $i_1 i_3$ и $i_2 i_3$ соответственно, при этом $m \leq n$, а $C_k$ — класс сопряженных инволюций, содержащего инволюцию $i_k$, где $k = 1, 2, 3$. Однозначна ли такая характеризация, т. е. существуют ли для одной пятерки две такие $(2\times 2, 2)$-тройки, что любой (любой внутренний) автоморфизм группы $G$ не переводит одну тройку в другую?

*А. В. Тимофеенко*

**20.** Паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного числа и более одного равноугольных многоугольников. Описание всех типов паркетных многоугольников можно найти в [8]. Паркетогранником называется выпуклый многогранник, обладающий паркетными и, быть может, правильными гранями. Каковы все типы паркетогранников? Верно ли, что существует только четыре равнореберных паркетогранника, обладающих граневыми фиктивными вершинами? Каковы все разбиения икосаэдра на паркетогранники? Информацию по исследованию последнего вопроса можно найти в [5].

*А. В. Тимофеенко*

Авторы благодарят д.-ра физ.-мат. наук А. С. Кондратьева и чл.-корр. РАН А. А. Махнева за полезные консультации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Алеев Р.Ж. Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп // Мат. тр. 2000. Т. 3, № 1. С. 3–37.
2. Васильев А.В., Гречкосеева М.А., Мазуров В.Д. Характеризация конечных простых групп спектром и порядком // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 6. С. 685–728.
3. Дураков Б.Е. О некоторых группах 2-ранга один // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. С. 64–68. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-64-68 .
4. Заварницин А.В. О распознавании конечных групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 390–408. doi: 10.1007/s10469-006-0020-9 .
5. Карпова Е.С., Тимофеенко А.В. О разбиениях усеченного икосаэдра на паркетогранники // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 446–474. doi: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-452-480 .
6. Мазуров В.Д., Ольшанский А.Ю., Созутов А.И. О бесконечных группах конечного периода // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 2. С. 243–251. doi: 10.17377/alglog.2015.54.207 .
7. Мазуров В.Д., Ши В. Признак нераспознаваемости конечной группы по спектру // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 2. С. 239–243. doi: 10.1007/s10469-012-9179-4 .
8. Пряхин Ю.А. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных // Зап. науч. семинара ЛОМИ. 1974. Т. 45. С. 111–112.
9. Созутов А.И. О группах с конечным энгелевым элементом // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 3. С. 376–396. doi: 10.33048/alglog.2019.58.307 .
10. Abe S., Iiyori N. A generalization of prime graphs of finite groups // Hokkaido Math. J. 2000. Vol. 29, no. 2. P. 391–407. doi:10.14492/hokmj/1350912979 .
11. Fukuda T., Komatsu K. Weber's class number problem in the cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extension of $\mathbb{Q}$, III // Int. J. Number Theory. 2011. Vol. 7, no. 6. P. 1627–1635. doi: 10.1142/S1793042111004782 .
12. Gorshkov I.B., Maslova N.V. The group $J_4 \times J_4$ is recognizable by spectrum // J. Algebra Its Appl. doi: 10.1142/S0219498821500614 .
13. Linden F.J. van der. Class number computations of real abelian number fields // Math. Comput. 1982. Vol. 39, no. 160. P. 693–707. doi: 10.2307/2007347 .
14. Masley J.M. Solution of small class number problems for cyclotomic fields // Compositio Math. 1976. Vol. 33, iss. 2. P. 179–186.
15. Maslova N.V., Pagon D. On the realizability of a graph as the Gruenberg–Kegel graph of a finite group // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Vol. 13. P. 89–100. doi: 10.17377/semi.2016.13.007 .
16. Mazurov V.D. A characterizations of finite nonsimple groups by the set of orders of their elements // Algebra and Logic. 1997. Vol. 36, no. 3. P. 182–192. doi: 10.1007/BF02671616 .
17. Mazurov V.D. On generation of sporadic simple groups by three involutions two of which commute // Siberian Math. J. 2003. Vol. 44, no. 1. P. 160–164. doi: 10.1023/A:1022028807652 .
18. Metsch K. Improvement of Bruck's completion theorem // Designs Codes and Cryptography. 1991. Vol. 1., no. 2. P. 99–116. doi: 10.1007/BF00157614 .
19. Metsch K. On a characterization of bilinear forms graphs // Europ. J. Comb. 1999. Vol. 20, iss. 4. P. 293–306. doi: 10.1006/eujc.1998.0280 .
20. Miller J.C. Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem // Acta Arithmetica. 2014. Vol. 164. P. 381–397. doi: 10.4064/aa164-4-4 .
21. Miller J.C. Class numbers of real cyclotomic fields of composite conductor // LMS J. Comput. Math. 2014. Vol. 17, iss. A (Algorithmic Number Theory Symposium XI). P. 404–417. doi: 10.1112/S1461157014000382 .
22. Robinson D.J.S. Finiteness conditions and generalized soluble groups. Part 2. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1972. 254 p. doi 10.1007/978-3-662-11747-7 .
23. Rososhek SK. Modified matrix modular cryptosystems // British J. Math. & Computer Science. 2015. Vol. 5, no. 5. P. 613–636. doi: 10.9734/BJMCS/2015/14321 .
24. Rososhek SK. Fast and secure modular matrix based digital signature // British J. Math. & Computer Science. 2016. Vol. 13, no. 1. P. 1–20. doi: 10.9734/BJMCS/2016/22319 .
25. Sinnott W. On the Stickelberger ideal and circular units of a cyclotomic field // Ann. Math. 1978. Vol. 108, no. 1. P. 107–134. doi: 10.2307/1970932 .
26. Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook. No. 19 / eds. Evgeny Khukhro and Victor Mazurov [e-resource]. Novosibirsk, 2020. 250 p. URL: http://kourovka-notebook.org .
27. Vasil'ev A.V. On finite groups isospectral to simple classical groups // J. Algebra. 2015. Vol. 423. P. 318–374. doi: 10.1016/j.jalgebra.2014.10.013

28. Wehrfritz B.A.F. Infinite linear groups. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1973. 229 p. doi: 10.1007/978-3-642-87081-1 .

Поступила 12.08.2020
После доработки 17.08.2020
Принята к публикации 24.08.2020

Маслова Наталья Владимировна
д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: butterson@mail.ru

Белоусов Иван Николаевич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: i_belousov@mail.ru

Минигулов Николай Александрович
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
email: nikola-minigulov@mail.ru

## REFERENCES

1. Aleev R.Zh. The units of character fields and the central units of integer group rings of finite groups. *Siberian Adv. Math.*, 2001, vol. 11, no. 1, pp. 1–33.
2. Vasil'ev A.V., Grechkoseeva M.A., Mazurov V.D. Characterization of the finite simple groups by spectrum and order. *Algebra and Logic*, 2009, vol. 48, no. 6, pp. 385–409. doi: 10.1007/s10469-009-9074-9 .
3. Durakov B.E. On some groups of 2-rank one. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 64–68 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-64-68 .
4. Zavarnitsin A.V. Recognition of finite groups by the prime graph. *Algebra and Logic*, 2006, vol. 45, no. 4, pp. 220–231. doi: 10.1007/s10469-006-0020-9 .
5. Karpova E.S., Timofeenko A.V. On the partitions of a truncated icosahedron for parquet-hedra. *Chebyshevskii Sb.*, 2018, vol. 19, no. 2, pp. 447–476 (in Russian). doi: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-447-476 .
6. Mazurov V.D., Ol'shanskii A.Yu., Sozutov A.I. Infinite groups of finite period. *Algebra and Logic*, 2015, vol. 54, no. 2, pp. 161–166. doi: 10.1007/s10469-015-9335-8 .
7. Mazurov V.D., Shi W.J. A criterion of unrecognizability by spectrum for finite groups. *Algebra and Logic*, 2012, vol. 51, no. 2, pp. 160–162. doi: 10.1007/s10469-012-9179-4 .
8. Pryakhin Yu.A. Convex polyhedra with faces having equal angles or constructed of these ones. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1974, vol. 45, pp. 111–112 (in Russian).
9. Sozutov A.I. Groups with finite Engel element. *Algebra Logika*, 2019, vol. 58, no. 3, pp. 376–396 (in Russian). doi: 10.33048/alglog.2019.58.307 .
10. Abe S., Iiyori N. A generalization of prime graphs of finite groups. *Hokkaido Math. J.*, 2000, vol. 29, no. 2, pp. 391–407. doi: 10.14492/hokmj/1350912979 .
11. Fukuda T., Komatsu K. Weber's class number problem in the cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extension of $\mathbb{Q}$, III. *Int. J. Number Theory*, 2011, vol. 7, no. 6, pp. 1627–1635. doi: 10.1142/S1793042111004782 .
12. Gorshkov I.B., Maslova N.V. The group $J_4 \times J_4$ is recognizable by spectrum. *J. Algebra Its Appl.* doi: 10.1142/S0219498821500614 .

13. van der Linden F.J. Class number computations of real abelian number fields. *Math. Comput.*, 1982, vol. 39, no. 160, pp. 693–707. doi: 10.2307/2007347 .
14. Masley J.M. Solution of small class number problems for cyclotomic fields. *Compositio Math.*, 1976, vol. 33, no. 2, pp. 179–186.
15. Maslova N.V., Pagon D. On the realizability of a graph as the Gruenberg–Kegel graph of a finite group. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 89–100. doi: 10.17377/semi.2016.13.007 .
16. Mazurov V.D. A characterizations of finite nonsimple groups by the set of orders of their elements. *Algebra and Logic*, 1997, vol. 36, no. 3, pp. 182–192. doi: 10.1007/BF02671616 .
17. Mazurov V.D. On generation of sporadic simple groups by three involutions two of which commute. *Siberian Math. J.*, 2003, vol. 44, no. 1, pp. 160–164. doi: 10.1023/A:1022028807652 .
18. Metsch K. Improvement of Bruck's completion theorem. *Designs, Codes and Cryptography*, 1991, vol. 1, no. 2, pp. 99–116. doi: 10.1007/BF00157614 .
19. Metsch K. On a characterization of bilinear forms graphs. *Europ. J. Comb.*, 1999, vol. 20, no. 4, pp. 293–306. doi: 10.1006/eujc.1998.0280 .
20. Miller J.C. Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem. *Acta Arithmetica*, 2014, vol. 164, pp. 381–397. doi: 10.4064/aa164-4-4 .
21. Miller J.C. Class numbers of real cyclotomic fields of composite conductor. *LMS J. Comput. Math.*, 2014, vol. 17, no. A (Algorithmic Number Theory Symposium XI), pp. 404–417. doi: 10.1112/S1461157014000382 .
22. Robinson D.J.S. *Finiteness conditions and generalized soluble groups. Part 2.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1972, 254 p. doi: 10.1007/978-3-662-11747-7 .
23. Rososhek S.K. Modified matrix modular cryptosystems. *British J. Math. & Computer Science*, 2015, vol. 5, no. 5, pp. 613–636. doi: 10.9734/BJMCS/2015/14321 .
24. Rososhek S.K. Fast and secure modular matrix based digital signature. *British J. Math. & Computer Science*, 2016, vol. 13, no. 1, pp. 1–20. doi: 10.9734/BJMCS/2016/22319 .
25. Sinnott W. On the Stickelberger ideal and circular units of a cyclotomic field. *Ann. Math.*, 1978, vol. 108, no. 1, pp. 107–134. doi: 10.2307/1970932 .
26. *Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook.* No. 19 / eds. Evgeny Khukhro and Victor Mazurov [e-resource], Novosibirsk, 2020, 250 p. Available at:http://kourovka-notebook.org .
27. Vasil'ev A.V. On finite groups isospectral to simple classical groups. *J. Algebra*, 2015, vol. 423, pp. 318–374. doi: 10.1016/j.jalgebra.2014.10.013 .
28. Wehrfritz B.A.F. *Infinite linear groups.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1973, 229 p. doi: 10.1007/978-3-642-87081-1 .

Received August 12, 2020
Revised August 17, 2020
Accepted August 24, 2020

*Natalia Vladimirovna Maslova*, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: butterson@mail.ru .

*Ivan Nikolaevich Belousov,* Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: i_belousov@mail.ru .

*Nikolai Aleksandrovich Minigulov,* doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: nikola-minigulov@mail.ru .

Cite this article as: N. V. Maslova, I. N. Belousov, N. A. Minigulov. Open questions formulated at the 13th School–Conference on Group Theory Dedicated to V. A. Belonogov's 85th Birthday, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 275–285 .