A. G. Chentsov, Filters and linked families of sets, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2020, Volume 30, Issue 3, 444–467

DOI: https://doi.org/10.35634/vm200307

МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 3. С. 444–467.

УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

ФИЛЬТРЫ И СЦЕПЛЕННЫЕ СЕМЕЙСТВА МНОЖЕСТВ

Исследуются свойства ультрафильтров (у/ф) и максимальных сцепленных систем (МСС) на широко понимаемом измеримом пространстве (ИП), а также некоторые представления сцепленных (не обязательно максимальных) систем и фильтров на упомянутом ИП. Исследуются условия, обеспечивающие максимальность сцепленных семейств (систем), а также естественные представления для битопологических пространств (БТП), точками которых являются у/ф и МСС. Изучаются оснащения множеств сцепленных семейств и фильтров, отвечающие схемам Волмэна и Стоуна, а также связь данных оснащений (топологиями) с аналогичными оснащениями множеств у/ф и МСС, приводящими к вышеупомянутым БТП. Исследуются свойства определяемых естественным образом произведений сцепленных семейств и МСС на двух (широко понимаемых) ИП. Показано, что МСС на произведении π-систем (то есть на семействе «измеримых» прямоугольников) исчерпываются произведениями соответствующих МСС на исходных пространствах.

Ключевые слова: максимальная сцепленная система, семейство множеств, топология, ультрафильтр.

DOI: 10.35634/vm200307

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию свойств специальных семейств множеств: фильтров и сцепленных семейств (систем). Особое внимание уделяется упомянутым семействам со свойством максимальности: ультрафильтрам (у/ф) и максимальным сцепленным системам (МСС). Исследуются соотношения между у/ф и МСС, а также между фильтрами и сцепленными системами. Следует подчеркнуть, что у/ф и МСС широко используются в общей топологии; в частности, это касается применений в конструкциях расширений топологических пространств (ТП). Процедуры с использованием МСС используются в конструкции суперрасширения ТП (см. [1–4] и др.). В этих построениях рассматривались МСС замкнутых множеств в ТП (см., например, [4, гл. VII, § 4]). В [5, 6] аналоги суперрасширения рассматривались применительно к МСС на широко понимаемом измеримом пространстве (ИП). В [6] и целом ряде последующих работ автора в качестве такого ИП использовалось непустое множество с оснащением в виде π-системы [7, с. 14] его подмножеств (п/м). Такое оснащение позволяет охватить единой схемой весьма различные случаи (измеримые в традиционном смысле пространства, ТП и целый ряд других важных случаев; «обычный» вариант суперрасширения соответствует случаю, когда в качестве π-системы используется решетка замкнутых множеств в ТП). На множестве МСС определяются две характерные топологии, которые будем называть топологиями волмэновского и стоуновского типов или, кратко, волмэновской и стоуновской соответственно. Данные топологии сравнимы. Аналогичным образом пара сравнимых топологий определяется и на множестве у/ф соответствующей π-системы. Таким образом, получаются два битопологических пространства (БТП) (в связи с конструкциями на основе БТП напомним монографию [8]); при этом у/ф являются МСС (имеются примеры МСС, не являющихся у/ф) и БТП на множестве у/ф оказывается (своеобразным) подпространством БТП с точками в виде МСС. Топология волмэновского типа на множестве МСС обладает свойством суперкомпактности; в некоторых случаях (см. [9]) данное свойство распространяется на пространство у/ф.

В связи с исследованиями пространств у/ф отметим работы А. А. Грызлова и его учеников (см. [10–12] и др.).

Многие свойства у/ф имеют место и для МСС и, по сути дела, являются свойствами упомянутых МСС. В частности, как будет показано, это касается условий, обеспечивающих максимальность у/ф и сцепленных систем. Подобное положение относится и к построению топологий. При этом, однако, топология волмэновского типа на множестве МСС обладает свойством суперкомпактности, которое при некоторых условиях на π-систему распространяется и на волмэновскую топологию на множестве у/ф. В настоящей работе оснащения, идейно соответствующие схемам Волмэна и Стоуна, распространяются на множество сцепленных (не обязательно максимальных) семейств и на множество фильтров. Наконец, в работе получено представление множества всех МСС на произведении двух π-систем в терминах естественным образом определяемых произведений МСС на исходных π-системах, отвечающих пространствам-сомножителям. Ранее подобные представления рассматривались для случая у/ф.

Автор посвящает статью светлой памяти выдающегося ученого-математика Евгения Леонидовича Тонкова.

§ 1. Общие понятия и обозначения

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. Множество, все элементы которого сами являются множествами, называем семейством. Если x и y — произвольные объекты, то через $\{x;y\}$ обозначаем единственное множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов; $\{x;y\}$ есть неупорядоченная пара упомянутых объектов. Тогда, в частности, для всякого объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z;z\}$ имеем синглетон, содержащий z, то есть $z \in \{z\}$. Если u, v и w — три объекта, то $\{u;v;w\} \triangleq \{u;v\} \cup \{w\}$ — множество, содержащее u, v и w и не содержащее никаких других элементов (следуем здесь [14, гл. II]). Для произвольных объектов p и q полагаем $(p,q) \triangleq \{\{p\};\{p;q\}\}$, получая (см. [14, гл. II, § 3]) упорядоченную пару (УП) с первым элементом p и вторым элементом q. Если же h есть какая-либо УП, то через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы h соответственно; они однозначно определяются условием $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$.

Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) H, а $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$ — семейство всех непустых п/м H; через $\mathrm{Fin}(H)$ обозначаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, то есть семейство всех непустых конечных п/м H. В качестве H может, конечно, использоваться семейство. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем (см. [14, гл. II, § 6]) множество всех отображений из A в B; выражения $f \in B^A$ и $f\colon A \longrightarrow B$ тождественны (как обычно, при $f \in B^A$ и $x \in A$ в виде $f(x) \in B$ имеем значение f в точке x). Для всяких множеств A и B, отображения $f \in B^A$ и множества $C \in \mathcal{P}(A)$ в виде $f^1(C) \triangleq \{f(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ имеем образ C при действии f, а в виде $(f|C) \in B^C$ — сужение f на множество C: $(f|C)(x) \triangleq f(x)\ \forall x \in C$.

Множеству $\mathbb{M}$ и семейству $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ его п/м сопоставляется двойственное семейство $\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M\colon M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$. Кроме того, непустому семейству (множеств) $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляется след $\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B\colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$ этого семейства на множество B. Непустому семейству $\mathfrak{X}$ сопоставляем семейства $\{\cup\}(\mathfrak{X})$, $\{\cap\}(\mathfrak{X})$, $\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{X})$ и $\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X})$, определяемые в [13, раздел 2] ($\{\cup\}(\mathfrak{X})$ — семейство всех объединений подсемейств $\mathfrak{X}$, $\{\cap\}(\mathfrak{X})$ — семейство всех пересечений непустых подсемейств $\mathfrak{X}$, $\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{X})$ и $\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X})$ — семейства всех объединений и пересечений непустых конечных подсемейств $\mathfrak{X}$ соответственно). Если $\mathcal{S}$ — непустое семейство и L — множество, то имеем,

что
$$[\mathcal{S}](L) \triangleq \{S \in \mathcal{S} | L \subset S\} \in \mathcal{P}(\mathcal{S}).$$
Если $\mathbb{X}$ — непустое множество и $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{X}))$, то
$$(\mathrm{COV})[\mathbb{X}|\mathcal{X}] \triangleq \{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{X})|\ \mathbb{X} = \bigcup_{X \in \chi} X\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{X}))$$
(семейство всех покрытий $\mathbb{X}$ множествами из $\mathcal{X}$); если $\chi \in (\mathrm{COV})[\mathbb{X}|\mathcal{X}]$ и для некоторых $\mathbb{X}_1 \in \mathcal{X}$ и $\mathbb{X}_2 \in \mathcal{X}$ имеет место равенство $\chi = \{\mathbb{X}_1; \mathbb{X}_2\}$, то покрытие χ называем бинарным.

Как обычно, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая и $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$; при $n \in \mathbb{N}$ полагаем, что $\overline{1,n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} | k \leqslant n\}$. Полагаем, что элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — не являются множествами (соглашение принимается во избежание «двойных» толкований традиционных обозначений); с учетом этого для всяких множества H и числа $k \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1,k}}$ используем более традиционное H^k для обозначения множества всех отображений из $\overline{1,k}$ в H (то есть множества всех кортежей в H «длины» k).

Специальные семейства множеств. До конца настоящего раздела фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$. Тогда
$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))|\ (\varnothing \in \mathcal{I})\&(\mathbf{I} \in \mathcal{I})\&(A \cap B \in \mathcal{I}\ \ \forall A \in \mathcal{I}\, \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{1.1}$$
есть семейство всех π-систем [7, с. 14] п/м $\mathbf{I}$ с «нулем» и «единицей». Среди всевозможных π-систем из семейства (1.1) выделяем π-системы со специальными свойствами:
$$\begin{gathered}\pi_*^\sharp[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]|\ \forall I_1 \in \mathcal{I}\, \forall I_2 \in \mathcal{I}\, \forall I_3 \in \mathcal{I} \\ ((I_1 \cap I_2 \neq \varnothing)\&(I_2 \cap I_3 \neq \varnothing)\&(I_1 \cap I_3 \neq \varnothing)) \Longrightarrow (I_1 \cap I_2 \cap I_3 \neq \varnothing)\},\end{gathered} \tag{1.2}$$
$$\tilde{\pi}^0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] | \forall I \in \mathcal{I}\, \forall x \in \mathbf{I} \setminus I\ \exists \Lambda \in \mathcal{I}\colon (x \in \Lambda)\&(\Lambda \cap I = \varnothing)\} \tag{1.3}$$
(элементы семейства (1.3) называем отделимыми π-системами),
$$(\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]|\ A \cup B \in \mathcal{I}\ \ \forall A \in \mathcal{I}\, \forall B \in \mathcal{I}\} \tag{1.4}$$
((1.4) — семейство всех непустых решеток п/м $\mathbf{I}$),
$$(\mathrm{alg})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]|\ \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{A}\, \forall A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'((\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}]) \tag{1.5}$$
(семейство всех алгебр п/м $\mathbf{I}$; при $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}]$ в виде $(\mathbf{I}, \mathcal{A})$ имеем ИП с алгеброй множеств),
$$(\mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in \pi[\mathbf{I}]|\ \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\} = \{\tau \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}]|\ \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\} \tag{1.6}$$
(семейство всех топологий на $\mathbf{I}$; при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ в виде $(\mathbf{I}, \tau)$ имеем ТП),
$$(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathbf{C_I}[\tau]\colon \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\} \in \mathcal{P}'((\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}]) \tag{1.7}$$
(элементы семейства (1.7) — замкнутые топологии П. С. Александрова; см. [15, с. 98]). Перечень (1.2)–(1.7), далеко не полный, показывает, что π-системы образуют очень общий класс подсемейств $\mathcal{P}(\mathbf{I})$ (среди π-систем, не являющихся решетками, отметим сейчас полуалгебры множеств; см. [16, гл. I]). Отметим, что, как легко проверить, $\forall \mathcal{J} \in \pi[\mathbf{I}]\ \forall J \in \mathcal{J}$
$$[\mathbf{C_I}[\mathcal{J}]](J) = \{\Lambda \in \mathbf{C_I}[\mathcal{J}]|\ J \subset \Lambda\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C_I}[\mathcal{J}]).$$

Поэтому при $\mathcal{J} \in \pi[\mathbf{I}]$ и $J \in \mathcal{J}$ определено

$$\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{J}]](J)} \Lambda \in \mathcal{P}(\mathbf{I}).$$

С учетом этого введем в рассмотрение следующее семейство

$$\pi^{\natural}[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{J} \in \pi[\mathbf{I}] | \bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{J}]](J)} \Lambda \in \mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{J}] \;\; \forall J \in \mathcal{J}\}. \tag{1.8}$$

Базы и предбазы. В дальнейшем обозначения $(\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$, $(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$, $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ и $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}]$ соответствуют [9, раздел 2] (семейства открытых и замкнутых баз, а также открытых и замкнутых предбаз; имеются в виду базы и предбазы некоторых ТП); при этом

$$(\{\cup\}(\mathcal{B}) \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \;\; \forall \mathcal{B} \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]) \& (\{\cap\}(\beta) \in (\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \;\; \forall \beta \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]). \tag{1.9}$$

В (1.9) имеем стандартные операции, связанные с построением ТП. Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то $(\tau-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}]$, $(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau]$, $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau]$ и $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I};\tau]$, также понимаемые в смысле [9, раздел 2], задают семейства открытых и замкнутых баз и предбаз конкретного ТП $(\mathbf{I},\tau)$.

Конструкции, связанные с суперкомпактностью. Введем в рассмотрение специальный тип предбаз — суперкомпактные предбазы: в виде

$$\begin{gathered}((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \triangleq \{\chi \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] | \\ \forall \mathcal{G} \in (\mathrm{COV})[\mathbf{I}|\chi] \; \exists G_1 \in \mathcal{G} \; \exists G_2 \in \mathcal{G} \colon \mathbf{I} = G_1 \cup G_2\}\end{gathered} \tag{1.10}$$

имеем семейство всех суперкомпактных предбаз на множестве $\mathbf{I}$ (точнее в (1.10) рассматриваются суперкомпактные открытые предбазы некоторого ТП с «единицей» $\mathbf{I}$; используем здесь определение в терминах бинарных подпокрытий); при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$

$$((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau] \triangleq ((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \cap (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau]$$

(семейство всех суперкомпактных открытых предбаз конкретного ТП $(\mathbf{I},\tau)$). В виде

$$((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] | \; ((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau] \neq \varnothing\} \tag{1.11}$$

имеем семейство всех топологий, превращающих $\mathbf{I}$ в суперкомпактное [1–4] ТП; сами топологии из семейства (1.11) также называем суперкомпактными. Если $\tau \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и при этом $(\mathbf{I},\tau)$ есть T_2-пространство, то именуем данное ТП суперкомпактом.

Центрированность и базы фильтров. Если $\mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, то

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{J}] \triangleq \{\mathcal{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J}) | \bigcap_{C \in \mathcal{K}} C \neq \varnothing \;\; \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{C})\}$$

есть семейство всех центрированных подсемейств $\mathcal{J}$. В качестве $\mathcal{J}$ может, конечно, использоваться π-система из семейства (1.1). С учетом этого зафиксируем до конца настоящего пункта $\mathcal{J} \in \pi[\mathbf{I}]$. В виде

$$\beta^0[\mathcal{J}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J}) | (\varnothing \notin \mathcal{I}) \& (\forall I_1 \in \mathcal{I} \; \forall I_2 \in \mathcal{I} \; \exists I_3 \in \mathcal{I} \colon I_3 \subset I_1 \cap I_2)\} \tag{1.12}$$

имеем семейство всех баз фильтров (БФ) в $(\mathbf{I},\mathcal{J})$. Легко видеть, что $\beta^0[\mathcal{J}] \subset (\mathrm{Cen})[\mathcal{J}]$ и, кроме того,

$$\{\cap\}_\sharp(\mathcal{Z}) \in \beta^0[\mathcal{J}] \;\; \forall \mathcal{Z} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{J}]. \tag{1.13}$$

Свойства (1.12), (1.13) используются без дополнительных пояснений.

Сцепленность. Непустое семейство называется сцепленным (см. [1–4]), если два любые его множества пересекаются. Для всякого непустого семейства $\mathfrak{X}$ в виде

$$\langle\mathrm{link}\rangle[\mathfrak{X}] \triangleq \{\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X})|\ X_1 \cap X_2 \neq \varnothing\ \ \forall X_1 \in \mathcal{X}\ \forall X_2 \in \mathcal{X}\} \tag{1.14}$$

имеем семейство всех сцепленных подсемейств $\mathfrak{X}$, а в виде

$$\langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathfrak{X}] \triangleq \{\mathcal{X}_0 \in \langle\mathrm{link}\rangle[\mathfrak{X}]|\ \forall \mathcal{X} \in \langle\mathrm{link}\rangle[\mathfrak{X}]\ \ (\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}) \Longrightarrow (\mathcal{X}_0 = \mathcal{X})\} \tag{1.15}$$

семейство всех максимальных сцепленных подсемейств $\mathfrak{X}$; заметим, что $\{\Sigma\} \in \langle\mathrm{link}\rangle[\mathfrak{X}]$ при $\Sigma \in \mathfrak{X} \setminus \{\varnothing\}$ (см. (1.14)). Элементы (1.15) будем также называть максимальными сцепленными системами (МСС). С использованием леммы Цорна проверяется, что (см. [17, раздел 3])

$$\forall \mathcal{E} \in \langle\mathrm{link}\rangle[\mathfrak{X}]\ \exists \mathcal{S} \in \langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathfrak{X}] \colon \mathcal{E} \subset \mathcal{S}. \tag{1.16}$$

§ 2. Фильтры и ультрафильтры

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E и π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$, получая широко понимаемое ИП $(E, \mathcal{L})$. В дальнейшем $(E, \mathcal{L})$ будет конкретизироваться (см. (1.2)–(1.7)), что всякий раз будет специально оговариваться. В виде

$$\begin{gathered}\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})|\ (\varnothing \notin \mathcal{F})\&(A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F})\&(\forall F \in \mathcal{F}\ \forall L \in \mathcal{L}\\ (F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F})\}\end{gathered} \tag{2.1}$$

имеем семейство всех фильтров ИП $(E, \mathcal{L})$; в виде $\{E\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ имеем наименьший (по включению) элемент семейства (2.1), $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \neq \varnothing$. При этом

$$\begin{gathered}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})|\ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})|\\ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \cap U \neq \varnothing\ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{U})\} = \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]|\\ \forall \mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{V}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{V})\}\end{gathered} \tag{2.2}$$

есть семейство всех у/ф ИП $(E, \mathcal{L})$. С учетом леммы Цорна подобно (1.16) проверяется, что $\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \colon \mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Тогда, в частности, $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \varnothing$. Ясно, что $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \triangleq \{L \in \mathcal{L}|\ x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ при $x \in E$ (введен тривиальный фильтр, отвечающий точке x). В силу [18, (5.9)]

$$((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \ \forall x \in E) \Longleftrightarrow (\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]) \tag{2.3}$$

(в (2.3) указано необходимое и достаточное условие максимальности всех тривиальных фильтров). С учетом (2.2) имеем, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})|\ L \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})|\ L \cap U \neq \varnothing\ \forall U \in \mathcal{U}\}\ \ \forall L \in \mathcal{L}. \tag{2.4}$$

В виде $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(L) \colon L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ имеем, в частности, открытую базу топологии стоуновского типа: $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ и при этом $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \triangleq \{\cup\}((\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$. В виде

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{2.5}$$

имеем нульмерное [19, 6.2] T_2-пространство. Из (2.4) легко следует, что все множества из $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$ открыто-замкнуты в ТП (2.5). Другое оснащение $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ связывается с множествами

$$\mathbb{F}^*_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|H] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})|\ \exists U \in \mathcal{U}\colon U \subset H\}\ \forall H \in \mathcal{P}(E). \tag{2.6}$$

Из (2.6) легко следует, что (см. [13, (3.9)])

$$\begin{gathered}\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \triangleq \{\mathbb{F}^*_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\Lambda]\colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\}\\ = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]] \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]] \cap (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})].\end{gathered} \tag{2.7}$$

Последнее свойство позволяет ввести топологию волмэновского типа:

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})];$$

при этом в виде

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle) \tag{2.8}$$

имеем компактное T_1-пространство. Топологии в (2.5) и (2.8) сравнимы [13, раздел 7]: $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$. Триплет

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle, \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) \tag{2.9}$$

рассматриваем как битопологическое пространство (БТП); в связи с исследованием БТП отметим монографию [8]. По поводу БТП (2.9) напомним, что при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ согласно (2.3) определен оператор погружения

$$x \longmapsto (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x]\colon E \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \tag{2.10}$$

реализующий следующее свойство «универсальной» плотности [20, предложение 7.1]: при $L \in \mathcal{L}$

$$\mathrm{cl}(\{(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x]\colon x \in L\}, \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle) = \mathrm{cl}(\{(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x]\colon x \in L\}, \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) = \Phi_{\mathcal{L}}(L), \tag{2.11}$$

где $\mathrm{cl}(\cdot,\tau)$ есть операция замыкания в произвольном ТП с топологией τ (как следствие имеем, что $\{(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x]\colon x \in E\}$ всюду плотно и в ТП (2.5), и в ТП (2.8)). Свойство (2.10), (2.11) используется при построении расширений абстрактных задач о достижимости.

§ 3. Сцепленные системы

Заметим, что при условии $\mathfrak{X} = \mathcal{L}$ реализуются следующие варианты (1.14)–(1.16): $\langle\mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}]$ и $\langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}]$, причем

$$\forall \mathcal{E}_1 \in \langle\mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}]\ \exists \mathcal{E}_2 \in \langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}]\colon \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2. \tag{3.1}$$

Отметим, что $\{E\} \in \langle\mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}]$, а тогда в силу (3.1) $\langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}] \neq \varnothing$. Полезно напомнить, что

$$\langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}] = \{\mathcal{E} \in \langle\mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}]|\ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \cap \Sigma \neq \varnothing\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E})\}, \tag{3.2}$$

а также следующую простую связь у/ф и МСС:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in \langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}]|\ A \cap B \in \mathcal{U}\ \ \forall A \in \mathcal{U}\ \forall B \in \mathcal{U}\} \tag{3.3}$$

(см., например, [21, § 3]). В связи с (3.3) отметим, что

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \langle\mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}]. \tag{3.4}$$

В дополнение к (3.2)–(3.4) имеем следующее простое положение.

Предложение 1. *Справедливо равенство* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \cap \langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.2) и (3.3) обоснования требует лишь вложение

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \cap \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{3.5}$$

Итак, пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \cap \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}]$. Выберем произвольно $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ со свойством $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Тогда в силу (3.4) $\mathcal{W} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}]$. Поскольку $\mathcal{V} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}]$, имеем (см. (1.15)) равенство $\mathcal{V} = \mathcal{W}$. Коль скоро выбор $\mathcal{W}$ был произвольным, установлено, что $\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{V} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{V} = \mathcal{F}). \tag{3.6}$$

Поскольку $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, имеем из (2.2),(3.6) $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, чем завершается проверка (3.5). □

Отметим, что возможен случай, когда

$$(\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \setminus \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] \neq \varnothing) \& (\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] \setminus \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \neq \varnothing). \tag{3.7}$$

Пример. Рассмотрим одну несущественную модификацию примера [4, 4.18]. Пусть $E = \{1; 2; 3\} = \overline{1,3}$ и $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$. Введем, следуя на идейном уровне [4, 4.18],

$$\mathcal{H} \triangleq \{\{1; 2\}; \{2; 3\}; \{1; 3\}\} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}],$$

а также $\tilde{\mathcal{H}} \triangleq \mathcal{H} \cup \{E\}$. Ясно, что $\tilde{\mathcal{H}} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}]$. При этом $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \forall \Sigma \in \mathcal{H}) \Longleftrightarrow (L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \forall \Sigma \in \tilde{\mathcal{H}}). \tag{3.8}$$

Простым перебором проверяется, что при выборе $L \in \mathcal{L}$ со свойством, указанным в левой части (3.8), непременно $L \in \tilde{\mathcal{H}}$ (действительно, синглетоны, отвечающие точкам E, не обладают упомянутым свойством). Стало быть, $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(L \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in \tilde{\mathcal{H}}) \Longrightarrow (L \in \tilde{\mathcal{H}}).$$

В силу (3.2) имеем, что $\tilde{\mathcal{H}} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}]$. При этом $\{1; 2\} \cap \{2; 3\} = \{2\} \notin \tilde{\mathcal{H}}$, а потому $\tilde{\mathcal{H}} \notin \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ в силу (2.1). В итоге

$$\tilde{\mathcal{H}} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] \setminus \mathbb{F}^*(\mathcal{L}).$$

С другой стороны, $\{E\} = \{\{1; 2; 3\}\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. При этом $\{E\} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}]$ и, кроме того, $\{E\} \subset \tilde{\mathcal{H}}$; ясно, однако, что $\{E\} \neq \tilde{\mathcal{H}}$. Поэтому $\{E\}$ не обладает максимальностью как сцепленное семейство (см. (1.15)), то есть

$$\{E\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \setminus \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}].$$

Итак, в нашем простейшем примере свойство (3.7) имеет место. □

Отметим, однако, что согласно (1.15) и (3.4) имеют место вложения

$$(\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}]) \& (\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] \subset \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}]).$$

Заметим, наконец, что (см. [21, (4.1)])

$$\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] |\ \exists \Sigma_1 \in \mathcal{E}\ \exists \Sigma_2 \in \mathcal{E}\ \exists \Sigma_3 \in \mathcal{E} : \ \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \varnothing\}$$

(заметим, что в вышеупомянутом примере для $\tilde{\mathcal{H}} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}]$ легко указать три множества с пустым пересечением: $\{1; 2\} \in \tilde{\mathcal{H}}$, $\{2; 3\} \in \tilde{\mathcal{H}}$, $\{1; 3\} \in \tilde{\mathcal{H}}$). Отметим, наконец, что согласно [21, (4.2)]

$$(\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \Longleftrightarrow (\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]).$$

В [9,21] указано много содержательных примеров π-систем из $\pi_*^\sharp[E]$.

Заметим, что в [22] указаны необходимые и достаточные условия максимальности фильтров на широко понимаемом ИП. Данные положения обобщают хорошо известное [16, с. 26] свойство, характеризующее у/ф алгебры множеств: если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, то

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) |\ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \in \mathcal{F}) \vee (E \setminus L \in \mathcal{F})\}. \tag{3.9}$$

В следующем параграфе мы рассмотрим аналоги положений [22] для характеризации МСС. Сейчас отметим только, что распространение (3.9) на случай МСС приведено в [23]. Отметим одно простое, но полезное свойство МСС в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$:

$$\forall \mathcal{E} \in \langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}]\ \forall \Sigma \in \mathcal{E} \quad [\mathcal{L}](\Sigma) \subset \mathcal{E}. \tag{3.10}$$

§ 4. Условия максимальности сцепленных систем

Мы продолжаем рассмотрение общего случая $(E, \mathcal{L})$: $E \neq \varnothing$, $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Рассмотрим условия, выделяющие МСС среди всевозможных сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$. Отметим следующее простое свойство.

Предложение 2. *Справедливо равенство*

$$\langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}] |\ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \in \mathcal{E}) \vee (\exists \Sigma \in \mathcal{E} \colon \Sigma \subset E \setminus L)\}. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω множество в правой части (4.1). Пусть $\mathcal{U} \in \langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}]$. Тогда, в частности, $\mathcal{U} \in \langle \mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}]$. Выберем произвольно $D \in \mathcal{L}$, получая в силу (3.2), что

$$(D \cap \Sigma \neq \varnothing\ \forall \Sigma \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (D \in \mathcal{U}). \tag{4.2}$$

Пусть $D \notin \mathcal{U}$. Тогда в силу (4.2) для некоторого $U \in \mathcal{U}$ имеем равенство $D \cap U = \varnothing$, что означает свойство $U \subset E \setminus D$. Получаем, что

$$(D \in \mathcal{U}) \vee (\exists \Sigma \in \mathcal{U} \colon \Sigma \subset E \setminus D).$$

Поскольку выбор D был произвольным, установлено, что $\mathcal{U} \in \Omega$. Итак,

$$\langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}] \subset \Omega. \tag{4.3}$$

Пусть $\mathcal{V} \in \Omega$. Тогда $\mathcal{V} \in \langle \mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}]$ и при этом $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(L \in \mathcal{V}) \vee (\exists \Sigma \in \mathcal{V} \colon \Sigma \subset E \setminus L). \tag{4.4}$$

Выберем произвольно $\mathcal{W} \in \langle \mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}]$, для которого $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Покажем, что $\mathcal{V} = \mathcal{W}$. В самом деле, допустим противное: пусть $\mathcal{V} \neq \mathcal{W}$. Тогда $\mathcal{W} \setminus \mathcal{V} \neq \varnothing$. С учетом этого выберем $W \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{V}$. В частности, имеем $W \in \mathcal{L}$. С учетом (4.4) и того, что $W \notin \mathcal{V}$, получаем, что для некоторого $V \in \mathcal{V}$ имеет место

$$V \subset E \setminus W. \tag{4.5}$$

Однако, $V \in \mathcal{W}$ по выбору $\mathcal{W}$, а потому $V \cap W \neq \varnothing$ (используется сцепленность $\mathcal{W}$), что противоречит (4.5). Полученное противоречие доказывает равенство $\mathcal{V} = \mathcal{W}$. Импликация

$$(\mathcal{V} \subset \mathcal{W}) \Longrightarrow (\mathcal{V} = \mathcal{W})$$

установлена. Поскольку выбор $\mathcal{W}$ был произвольным, максимальность $\mathcal{V}$ установлена: $\mathcal{V} \in \langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}]$. Итак, $\Omega \subset \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}]$, а потому (см. (4.3)) $\langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}] = \Omega$. $\square$

Введем в рассмотрение квазиокрестности множеств из $\mathcal{L}$ (см. [22]): более общим образом получаем при $L \in \mathcal{P}(E)$

$$[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L) = \{\Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}] | L \subset \Lambda\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]) \tag{4.6}$$

(отметим, что $E \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)$). Из (4.6) и предложения 2 легко следует, что

$$\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}] |\ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \in \mathcal{E}) \vee (\exists \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)\colon E \setminus \Lambda \in \mathcal{E})\}. \tag{4.7}$$

Напомним здесь же, что (см. (1.8)) при $\mathcal{L} \in \pi^{\natural}[E]$ и $L \in \mathcal{L}$

$$\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L). \tag{4.8}$$

Таким образом (см. (1.8), (4.8)), при $\mathcal{L} \in \pi^{\natural}[E]$ имеем π-систему с наименьшими квазиокрестностями всех своих множеств. Полезно учесть (см. [22]), что

$$((\mathrm{alg})[E] \subset \pi^{\natural}[E])\&((\mathrm{top})[E] \subset \pi^{\natural}[E]). \tag{4.9}$$

Предложение 3. *Если $\mathcal{L} \in \pi^{\natural}[E]$, то справедливо равенство*

$$\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}] |\ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \in \mathcal{E}) \vee (E \setminus (\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \Lambda) \in \mathcal{E})\}. \tag{4.10}$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (3.10), (4.7) и (4.8). В связи с (4.9) отметим, что

$$(\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]) \Longrightarrow (L = \bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \Lambda\ \ \forall L \in \mathcal{L}) \tag{4.11}$$

(используется замкнутость каждой алгебры множеств относительно дополнений). Из (4.10), (4.11) имеем, как следствие, свойство, отмеченное в [23]: при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$

$$\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}] |\ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \in \mathcal{E}) \vee (E \setminus L \in \mathcal{E})\} \tag{4.12}$$

(свойство, подобное (3.9)). Напомним, что при $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ и $H \in \mathcal{P}(E)$ через $\mathrm{cl}(H, \tau)$ обозначается замыкание H в ТП (E, τ). Далее (см. (4.9)) отметим легкопроверяемое свойство: если $\mathcal{L} = \tau$, где $\tau \in (\mathrm{top})[E]$, то

$$\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](G)} \Lambda = \mathrm{cl}(G, \tau)\ \ \forall G \in \tau. \tag{4.13}$$

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{L} = \tau$, где $\tau \in (\mathrm{top})[E]$. Тогда*

$$\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] = \langle \mathrm{link} \rangle_0[\tau] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\tau] |\ \forall G \in \tau\ \ (G \in \mathcal{E}) \vee (E \setminus \mathrm{cl}(G, \tau) \in \mathcal{E})\}.$$

Доказательство сводится к непосредственной комбинации (4.13) и предложения 3. Отметим, что при $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ и $H \in \mathcal{P}(E)$ в виде $[\tau](H)$ имеем семейство всех открытых в (E, τ) окрестностей множества H. В этой связи отметим еще один полезный частный случай предложения 2.

Предложение 5. *Если $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau \in (\mathrm{top})[E]$, то*

$$\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] = \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathbf{C}_E[\tau]] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathbf{C}_E[\tau]] |\ \forall F \in \mathbf{C}_E[\tau]$$
$$(F \in \mathcal{E}) \vee (\exists G \in [\tau](F)\colon E \setminus G \in \mathcal{E})\}.$$

Заметим, что из (4.12) вытекает при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ равенство

$$\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}] |\ E \setminus L \in \mathcal{E} \ \ \forall L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{E}\}.$$

Предложение 6. *Если* $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ *и* $\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}]$, *то* $\{\mathcal{E}; \mathbf{C}_E[\mathcal{E}]\}$ *есть разбиение алгебры* $\mathcal{L}$:

$$(\mathcal{L} = \mathcal{E} \cup \mathbf{C}_E[\mathcal{E}])\&(\mathcal{E} \cap \mathbf{C}_E[\mathcal{E}] = \varnothing). \tag{4.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое равенство в (4.14) вытекает из (4.12). Проверим второе равенство. Допустим противное: пусть $\mathcal{E} \cap \mathbf{C}_E[\mathcal{E}] \neq \varnothing$. Выберем $M \in \mathcal{E} \cap \mathbf{C}_E[\mathcal{E}]$ и подберем $U \in \mathcal{E}$ со свойством $M = E \setminus U$. Тогда $M \cap U \neq \varnothing$ в силу сцепленности $\mathcal{E}$. С другой стороны, $M \cap U = (E \setminus U) \cap U = \varnothing$. Получили противоречие, доказывающее второе равенство в (4.14). □

Свойство, определяемое предложением 2, допускает в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$ простую переформулировку:

$$\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}] |\ \forall L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{E}\ \exists \Sigma \in \mathcal{E} \colon \Sigma \subset E \setminus L\}.$$

Аналогичным образом, из предложения 3 получаем, что при $\mathcal{L} \in \pi^{\natural}[E]$

$$\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}] |\ E \setminus (\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \Lambda) \in \mathcal{E} \ \ \forall L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{E}\}.$$

Аналогичные переформулировки имеют место и в прочих приводимых ранее предложениях; сейчас отметим только переформулировку (3.9), касающуюся представления у/ф: при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) |\ E \setminus L \in \mathcal{U}\ \forall L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{U}\}.$$

Вышеупомянутые представления множества $\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}]$ (то есть представления свойства максимальности сцепленных систем) вполне аналогичны представлениям для у/ф в работе [22] и могут рассматриваться как полезное дополнение последних.

§ 5. Битопологическая структура и свойство суперкомпактности

Напомним два характерных оснащения множества $\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}]$, отвечающих топологиям волмэновского и стоуновского типов, имея в виду общий случай $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Для этого сначала введем множества

$$\begin{gathered}(\langle \mathrm{link} \rangle^0[\mathcal{L}|L] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] | L \in \mathcal{E}\}\ \forall L \in \mathcal{L}),\\ (\langle \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|H] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] |\ \exists \Sigma \in \mathcal{E} \colon \Sigma \subset H\}\ \forall H \in \mathcal{P}(E)).\end{gathered} \tag{5.1}$$

С использованием множеств (5.1) определяем упомянутые топологии. Для этого прежде всего заметим, что

$$\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\langle \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|\Lambda] \colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}]],$$

а потому определяется (суперкомпактная, см. [20, § 5]) топология

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}])) \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}]], \tag{5.2}$$

удовлетворяющая аксиоме T_1; итак,

$$(\langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle) \tag{5.3}$$

есть суперкомпактное T_1-пространство со следующим свойством (см. [20, (5.9)])

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle)|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}. \tag{5.4}$$

В (5.2) имеем топологию волмэновского типа на множестве МСС. Кроме того,

$$\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}] \triangleq \{\langle \mathrm{link}\rangle^0[\mathcal{L}|L]\colon L \in \mathcal{L}\} \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}]]. \tag{5.5}$$

Посредством (5.5) определяется [20, § 5] топология

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}]]$$

стоуновского типа, превращающая $\langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}]$ в нульмерное T_2-пространство

$$(\langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}], \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle) \tag{5.6}$$

со следующим весьма очевидным свойством (см. [20, § 5])

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}. \tag{5.7}$$

Известно (см. [20, (5.12)]), что вышеупомянутые топологии сравнимы:

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle.$$

Получающийся в итоге триплет

$$(\langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle, \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle) \tag{5.8}$$

рассматриваем как БТП. В силу (5.4) и (5.7) БТП (2.9) может рассматриваться как подпространство БТП (5.8). В [13, раздел 8] указаны условия, при которых вышеупомянутые БТП вырождены в смысле совпадения своих топологий и, напротив, условия, когда такого вырождения нет.

В заключение параграфа совсем кратко коснемся вопроса о том, когда ТП (5.3) удовлетворяет аксиоме T_2 и является, следовательно, суперкомпактом. В этой связи напомним, что (см. [13, раздел 8], [23, раздел 7]) при вышеупомянутых условиях вырождения БТП (5.8) мы получаем суперкомпакт: если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] \cup (\mathrm{top})[E]$, то

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle), \tag{5.9}$$

а тогда в силу сказанного выше указанная «единая» топология (5.9) превращает $\langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}]$ в суперкомпакт (комбинируем (5.2) и свойство T_2-отделимости ТП (5.6)). Итак (см. (5.9)), нетривиальные случаи реализации в виде (5.3) T_2-пространства имеются. Ниже мы рассмотрим одно достаточно общее условие, гарантирующее упомянутое свойство ТП (5.3).

Условимся прежде всего о том, что для произвольного ТП (X,τ) и точки $x \in X$ $N^0_\tau(x) \triangleq \{G \in \tau | x \in G\}$; тогда (X,τ) есть T_2-пространство, если и только если

$$\forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X \setminus \{x_1\}\ \exists G_1 \in N^0_\tau(x_1)\ \exists G_2 \in N^0_\tau(x_2)\colon G_1 \cap G_2 = \varnothing.$$

Мы рассмотрим случай $X = \langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}]$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{L} \in \pi[E]$ удовлетворяет условию*

$$\begin{gathered}\forall L_1 \in \mathcal{L}\ \forall L_2 \in \mathcal{L}\ \ (L_1 \cap L_2 = \varnothing) \Longrightarrow (\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_1)\ \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_2)\\ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \subset \Lambda_1 \cap \Lambda_2) \Longrightarrow (L = \varnothing)).\end{gathered} \tag{5.10}$$

Тогда (5.3) есть T_2-пространство.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть π-система $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию (5.10). Выберем произвольно $\mathcal{U} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}]$ и $\mathcal{V} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] \setminus \{\mathcal{U}\}$. В силу максимальности $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ получаем, что $(\mathcal{U} \setminus \mathcal{V} \neq \varnothing)\&(\mathcal{V} \setminus \mathcal{U} \neq \varnothing)$. Пусть $V \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. Тогда в силу (3.2) для некоторого $U \in \mathcal{U}$ имеет место равенство $U \cap V = \varnothing$. При этом $U \in \mathcal{L}$ и $V \in \mathcal{L}$. В силу (5.10) для некоторых $W_1 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](U)$ и $W_2 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](V)$ получаем, что $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(L \subset W_1 \cap W_2) \Longrightarrow (L = \varnothing). \tag{5.11}$$

Иными словами, семейство $\mathcal{T} \triangleq \{L \in \mathcal{L} | L \subset W_1 \cap W_2\}$ содержит только пустое множество (см. (5.11)): $\mathcal{T} = \{\varnothing\}$. При этом (см. (5.2)), как легко видеть,

$$(\langle \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|W_1] \in N^0_{\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\mathcal{U}))\&(\langle \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|W_2] \in N^0_{\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\mathcal{V})). \tag{5.12}$$

Покажем, что окрестности (5.12) не пересекаются. В самом деле, допустим противное: пусть

$$\langle \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|W_1] \cap \langle \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|W_2] \neq \varnothing. \tag{5.13}$$

С учетом (5.13) выберем $\mathcal{M} \in \langle \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|W_1] \cap \langle \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|W_2]$. Тогда для некоторых $M_1 \in \mathcal{M}$ и $M_2 \in \mathcal{M}$

$$(M_1 \subset W_1)\&(M_2 \subset W_2), \tag{5.14}$$

причем $M_1 \cap M_2 \neq \varnothing$ в силу сцепленности $\mathcal{M}$. Поскольку $M_1 \in \mathcal{L}$ и $M_2 \in \mathcal{L}$, то $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{T}$ в силу (5.14), а тогда по свойствам $\mathcal{T}$ имеем, что $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, что невозможно. Полученное при условии (5.13) противоречие показывает, что на самом деле

$$\langle \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|W_1] \cap \langle \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|W_2] = \varnothing. \tag{5.15}$$

Из (5.12) и (5.15) получаем требуемое свойство, а именно:

$$\exists \mathbb{G}_1 \in N^0_{\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\mathcal{U})\ \exists \mathbb{G}_2 \in N^0_{\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\mathcal{V})\colon \mathbb{G}_1 \cap \mathbb{G}_2 = \varnothing.$$

Поскольку выбор $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ со свойством $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$ был произвольным, требуемое свойство отделимости установлено. □

Как нетрудно проверить, при $\mathcal{L} \in (\mathrm{top})[E]$ свойство (5.10) истинно, что согласуется с упомянутым ранее следствием (5.9). С учетом теоремы 1 получаем также в силу (5.4), что для $\mathcal{L} \in \pi[E]$ со свойством (5.10) в виде (2.8) реализуется T_2-пространство и, как следствие, компакт. В связи с теоремой 1 отметим очевидное следствие.

Следствие 1. *Пусть π-система $\mathcal{L} \in \pi[E]$ такова, что*

$$\begin{gathered}\forall L_1 \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}\ \forall L_2 \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}\ \ (L_1 \cap L_2 = \varnothing) \Longrightarrow (\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_1) \\ \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_2)\ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \subset \Lambda_1 \cap \Lambda_2) \Longrightarrow (L = \varnothing)).\end{gathered} \tag{5.16}$$

Тогда ТП (5.3) *является суперкомпактом.*

Замечание 1. Отметим совсем кратко один простой «нестандартный» пример суперкомпакта, фиксируя $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ со свойством $a < b$. Полагаем в данном замечании, что $E =]a,b[$. Пусть $\mathcal{L} = \{]\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)[\colon z \in [a,b] \times [a,b]\}$; иными словами, $\mathcal{L}$ (в данном замечании) есть семейство всех (открытых) интервалов $]c,d[$, $c \in [a,b]$, $d \in [a,b]$; пустое множество также реализуется в виде интервала: $\varnothing =]b,a[$. Тогда $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и выполнено условие (5.16), а потому в виде ТП (5.3) имеем (в данном примере) непустой суперкомпакт. □

§ 6. Иерархия подпространств

В настоящем параграфе мы дополним построения § 3 топологическими оснащениями, имея в виду уже не только пространства у/ф и МСС. Эти новые построения начнем с анализа сцепленных (не обязательно максимальных) систем, сохраняя общие предположения относительно $(E, \mathcal{L})$: $E \neq \varnothing$, $\mathcal{L} \in \pi[E]$. При этом $\langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}] \neq \varnothing$. Полагаем, что

$$\langle \overline{\mathrm{link}} \rangle[\mathcal{L}|L] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}] | L \in \mathcal{E}\} \ \ \forall L \in \mathcal{L}. \tag{6.1}$$

Ясно, что $\langle \mathrm{link} \rangle^0[\mathcal{L}|L] = \langle \overline{\mathrm{link}} \rangle[\mathcal{L}|L] \cap \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}]$ при $L \in \mathcal{L}$. Кроме того, полагаем, что

$$\langle \overline{\mathrm{link}} \rangle_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|H] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}] |\ \exists \Sigma \in \mathcal{E} :\ \Sigma \subset H\} \ \ \forall H \in \mathcal{P}(E). \tag{6.2}$$

При этом, как и для множеств (6.1), имеем свойство: $\langle \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|H] = \langle \overline{\mathrm{link}} \rangle_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|H] \cap$ $\cap\ \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}]$ при $H \in \mathcal{P}(E)$. Множества (6.1), (6.2) будут использоваться далее при построении предбаз на множестве $\langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}]$. Сейчас отметим одно свойство, подобное рассматриваемым в § 3.

Предложение 7. *Справедливо равенство*

$$\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}] = \bigcap_{L \in \mathcal{L}} (\langle \overline{\mathrm{link}} \rangle[\mathcal{L}|L] \cup \langle \overline{\mathrm{link}} \rangle_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|E \setminus L]).$$

Доказательство легко следует из предложения 2. Введем в рассмотрение открытую предбазу

$$\hat{\mathfrak{C}}^*[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\langle \overline{\mathrm{link}} \rangle[\mathcal{L}|L] \colon L \in \mathcal{L}\} \in (\mathrm{p-BAS})[\langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}]], \tag{6.3}$$

для которой, как легко видеть, имеет место

$$\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E; \mathcal{L}] = \hat{\mathfrak{C}}^*[E; \mathcal{L}]|_{\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}]}. \tag{6.4}$$

Аналогичным образом имеем, что (см. (6.2)) для открытой предбазы

$$\hat{\mathfrak{C}}_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\langle \overline{\mathrm{link}} \rangle_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|\Lambda] \colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} \in (\mathrm{p-BAS})[\langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}]], \tag{6.5}$$

справедливо следующее очевидное равенство

$$\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}] = \hat{\mathfrak{C}}_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}]|_{\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{L}]}. \tag{6.6}$$

В силу (6.3) определена топология $\hat{\mathbf{t}}^*(E; \mathcal{L}) \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*[E; \mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}]]$. Получили ТП

$$(\langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}], \hat{\mathbf{t}}^*(E; \mathcal{L})); \tag{6.7}$$

при этом, конечно (см. (6.3)), $\langle \overline{\mathrm{link}} \rangle[\mathcal{L}|\Sigma] \in N^0_{\hat{\mathbf{t}}^*(E;\mathcal{L})}(\mathcal{E}) \ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}]\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}$.

Предложение 8. *В виде* (6.7) *реализуется* T_0*-пространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{V} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}]$ и $\mathcal{W} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{L}] \setminus \{\mathcal{V}\}$. Тогда $\mathcal{V} \neq \mathcal{W}$, а потому

$$(\mathcal{V} \setminus \mathcal{W} \neq \varnothing) \vee (\mathcal{W} \setminus \mathcal{V} \neq \varnothing). \tag{6.8}$$

Пусть $\mathcal{V} \setminus \mathcal{W} \neq \varnothing$. Выберем с учетом этого $V \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{W}$ и рассмотрим окрестность $\langle \overline{\mathrm{link}} \rangle[\mathcal{L}|V] \in N^0_{\hat{\mathbf{t}}^*(E;\mathcal{L})}(\mathcal{V})$ сцепленного семейства $\mathcal{V}$. В силу (6.1) имеем по выбору V, что $\mathcal{W} \notin \langle \overline{\mathrm{link}} \rangle[\mathcal{L}|V]$. Получили, что

$$(\mathcal{V} \setminus \mathcal{W} \neq \varnothing) \Longrightarrow (\exists \mathbb{G} \in N^0_{\hat{\mathbf{t}}^*(E;\mathcal{L})}(\mathcal{V}) \colon \mathcal{W} \notin \mathbb{G}). \tag{6.9}$$

Аналогичным образом устанавливается истинность импликации

$$(\mathcal{W} \setminus \mathcal{V} \neq \varnothing) \Longrightarrow (\exists \mathbb{G} \in N^0_{\hat{\mathbf{t}}^*(E;\mathcal{L})}(\mathcal{W})\colon \mathcal{V} \notin \mathbb{G}). \tag{6.10}$$

Поскольку выбор $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ со свойством $\mathcal{V} \neq \mathcal{W}$ был произвольным, из (6.8)–(6.10) вытекает требуемое утверждение. □

Предложение 9. *В виде* (5.6) *реализуется подпространство ТП* (6.7):

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle = \hat{\mathbf{t}}^*(E;\mathcal{L})|_{\langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}]}.$$

Доказательство вытекает из (6.4). С учетом (6.5) введем топологию

$$\hat{\mathbf{t}}^0(E;\mathcal{L}) \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\langle \mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}]],$$

получая ТП

$$(\langle \mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}], \hat{\mathbf{t}}^0(E;\mathcal{L})). \tag{6.11}$$

В свою очередь, из (6.6) вытекает, что справедливо равенство

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle = \hat{\mathbf{t}}^0(E;\mathcal{L})|_{\langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}]}. \tag{6.12}$$

Из (6.12) следует, что (5.3) есть подпространство ТП (6.11). В связи с (5.3) отметим одно простое представление:

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle = \{\mathbb{G} \in \mathcal{P}(\langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}])|$$
$$\forall \mathcal{E} \in \mathbb{G}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists (\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{E}^m\ \exists (\Lambda_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \prod_{i=1}^m [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\Sigma_i)\colon \bigcap_{i=1}^m \langle \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|\Lambda_i] \subset \mathbb{G}\}.$$

Аналогичным образом для топологии $\hat{\mathbf{t}}^0(E;\mathcal{L})$ имеем представление

$$\hat{\mathbf{t}}^0(E;\mathcal{L}) = \{\mathbb{G} \in \mathcal{P}(\langle \mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}])|$$
$$\forall \mathcal{E} \in \mathbb{G}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists (\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{E}^m\ \exists (\Lambda_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \prod_{i=1}^m [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\Sigma_i)\colon \bigcap_{i=1}^m \langle \overline{\mathrm{link}}\rangle_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|\Lambda_i] \subset \mathbb{G}\}.$$

Отметим два очевидных представления для локальных баз ТП (6.7) и (6.11): если выполнено включение $\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}]$, то

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left\{\bigcap_{i=1}^m \langle \overline{\mathrm{link}}\rangle[\mathcal{L}|\Sigma_i]\colon (\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{E}^m\right\}$$

есть локальная база (фундаментальная система окрестностей) ТП (6.7) в точке $\mathcal{E}$ и

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\ \bigcup_{(\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m}}\in\mathcal{E}^m} \left\{\bigcap_{i=1}^m \langle \overline{\mathrm{link}}\rangle_{\mathrm{op}}[\mathcal{L}|\Lambda_i]\colon (\Lambda_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \prod_{i=1}^m [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\Sigma_i)\right\}$$

есть локальная база ТП (6.11) в той же точке.

Рассмотрим теперь непустое множество $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, полагая, что

$$\mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})|L \in \mathcal{F}\}\ \ \forall L \in \mathcal{L}. \tag{6.13}$$

Ясно, что $\mathbb{F}_*(\mathcal{L}|\varnothing) = \varnothing$ и $\mathbb{F}_*(\mathcal{L}|E) = \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Кроме того, $\forall L_1 \in \mathcal{L}\ \forall L_2 \in \mathcal{L}$

$$(L_1 \subset L_2) \Longrightarrow (\mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L_1) \subset \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L_2)). \tag{6.14}$$

Предложение 10. *Если* $L_1 \in \mathcal{L}$ *и* $L_2 \in \mathcal{L}$, *то* $\mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L_1 \cap L_2) = \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L_1) \cap \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $L_1 \in \mathcal{L}$ и $L_2 \in \mathcal{L}$. Тогда (см. (1.1)) $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}$ и в силу (6.14)

$$\mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L_1 \cap L_2) \subset \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L_1) \cap \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L_2). \tag{6.15}$$

Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L_1) \cap \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L_2)$. Тогда $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$; при этом $L_1 \in \mathcal{V}$ и $L_2 \in \mathcal{V}$. В силу (2.1) $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{V}$, а потому (см. (6.13)) $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L_1 \cap L_2)$. Получили вложение, противоположное (6.15). В итоге имеем требуемое равенство множеств. □

Замечание 2. Отметим, что при $L_1 \in \mathcal{L}$ и $L_2 \in \mathcal{L}$ справедливо равенство $\Phi_{\mathcal{L}}(L_1 \cap L_2) = \Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \cap \Phi_{\mathcal{L}}(L_2)$. Проверка аналогична доказательству предложения 10.

Из (6.13) и предложения 10 легко следует, что

$$\mathfrak{F}_*^0[\mathcal{L}] \triangleq \{\mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L)\colon L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}^*(\mathcal{L})] \tag{6.16}$$

и, в частности, $\mathfrak{F}_*^0[\mathcal{L}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}^*(\mathcal{L})]$, а потому определена топология

$$\mathbf{t}_{\mathcal{L}}^*[E] \triangleq \{\cup\}(\mathfrak{F}_*^0[\mathcal{L}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*(\mathcal{L})]. \tag{6.17}$$

Сейчас, однако, мы рассмотрим еще одно представление у/ф ИП $(E, \mathcal{L})$ в терминах множеств (6.13). Для этого заметим сначала, что при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ определено пересечение всех множеств $\mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L)$, $L \in \mathcal{F}$, и при этом

$$\mathcal{F} \in \bigcap_{L \in \mathcal{F}} \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L); \tag{6.18}$$

кроме того, как легко видеть, в силу (6.13) справедливо равенство

$$\bigcap_{L \in \mathcal{F}} \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L) = \{\tilde{\mathcal{F}} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) | \mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}\}. \tag{6.19}$$

Предложение 11. *Имеет место цепочка равенств*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) | \exists \mathcal{S} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\colon \bigcap_{L \in \mathcal{F}} \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L) = \{\mathcal{S}\}\} = \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) | \bigcap_{L \in \mathcal{F}} \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L) = \{\mathcal{F}\}\}.$$

Доказательство очевидно (см. (6.18), (6.19)). Вернемся к (6.16). Из определений следует, что $\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L)\ \ \forall L \in \mathcal{L}$. Как следствие получаем очевидное равенство

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] = \mathfrak{F}_*^0[\mathcal{L}]|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})} \tag{6.20}$$

(получили естественную связь открытых баз). Из (6.20) вытекает полезное утверждение.

Предложение 12. *В виде* (2.5) *реализуется подпространство ТП*

$$(\mathbb{F}^*(\mathcal{L}), \mathbf{t}_{\mathcal{L}}^*[E]), \tag{6.21}$$

а именно: справедливо равенство $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \mathbf{t}_{\mathcal{L}}^*[E]|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$.

Доказательство следует из (6.20). В связи с ТП (6.21) отметим, что топология (6.17) допускает следующее представление:

$$\mathbf{t}^*_{\mathcal{L}}[E] = \{\mathbb{G} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*(\mathcal{L}))|\ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{G}\ \exists F \in \mathcal{F}\colon \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|F) \subset \mathbb{G}\}.$$

Заметим, что $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \in \mathcal{P}'(\langle\text{link}\rangle[\mathcal{L}])$ и мы можем рассматривать $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ как подпространство ТП (6.7). Согласно (6.13) $\mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L) = \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \cap \langle\overline{\text{link}}\rangle[\mathcal{L}|L]\ \forall L \in \mathcal{L}$. Как следствие получаем очевидное равенство (см. (6.13), (6.16))

$$\mathfrak{F}^0_*[\mathcal{L}] = \hat{\mathfrak{C}}^*[E;\mathcal{L}]|_{\mathbb{F}^*(\mathcal{L})}. \tag{6.22}$$

С учетом предложения 10 свойство (6.22) можно дополнить. В самом деле (см. (1.1)), при $m \in \mathbb{N}$ и $(L_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{L}^m$ пересечение всех множеств L_i, $i \in \overline{1,m}$, содержится в $\mathcal{L}$ и определено множество $\mathbb{F}_*(\mathcal{L}|\bigcap\limits_{i=1}^m L_i) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*(\mathcal{L}))$; более того, из предложения 10 по индукции следует, что

$$\bigcap_{i=1}^m \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|L_i) = \mathbb{F}_*(\mathcal{L}|\bigcap_{i=1}^m L_i).$$

Как следствие получаем очевидное теперь равенство

$$\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*[E;\mathcal{L}])|_{\mathbb{F}^*(\mathcal{L})} = \mathfrak{F}^0_*[\mathcal{L}], \tag{6.23}$$

где (см. (6.3)) $\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*[E;\mathcal{L}]) \in (\text{BAS})[\langle\text{link}\rangle[\mathcal{L}]]$. Из (6.17), (6.23) и определения топологии $\hat{\mathbf{t}}^*(E;\mathcal{L})$ вытекает следующее предложение.

Предложение 13. *В виде* (6.21) *реализуется подпространство T_0-пространства* (6.7), *а именно:* $\mathbf{t}^*_{\mathcal{L}}[E] = \hat{\mathbf{t}}^*(E;\mathcal{L})|_{\mathbb{F}^*(\mathcal{L})}$.

Доказательство очевидно.

Замечание 3. Отметим в связи с (6.23) естественный аналог для МСС и у/ф, используя замечание 2. Здесь мы учитываем легкопроверяемое свойство: при $m \in \mathbb{N}$ и $(L_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{L}^m$

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \cap (\bigcap_{i=1}^m \langle\text{link}\rangle^0[\mathcal{L}|L_i]) = \Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{i=1}^m L_i).$$

Как следствие получаем для «стоуновской» базы $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$ представление

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] = \{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}])|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}, \tag{6.24}$$

где $\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}]) \in (\text{BAS})[\langle\text{link}\rangle_0[\mathcal{L}]]$. Отметим, кстати, что равенство (5.7) непосредственно следует из (6.24).

С целью исследования соотношений для топологий волмэновского типа введем при $H \in \mathcal{P}(E)$

$$\mathbb{F}^\natural[\mathcal{L}|H] \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})|\exists F \in \mathcal{F}\colon F \subset H\}. \tag{6.25}$$

В частности, (6.25) определено при $H \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$. Ясно также, что

$$(\mathbb{F}^\natural[\mathcal{L}|\varnothing] = \varnothing)\&(\mathbb{F}^\natural[\mathcal{L}|E] = \mathbb{F}^*(\mathcal{L})).$$

Зависимость $H \longmapsto \mathbb{F}^{\natural}[\mathcal{L}|H]: \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{F}^*(\mathcal{L}))$ изотонна и при этом, как легко видеть, $\mathbb{F}^{\natural}[\mathcal{L}|H_1] \cap \mathbb{F}^{\natural}[\mathcal{L}|H_2] = \mathbb{F}^{\natural}[\mathcal{L}|H_1 \cap H_2]$ $\forall H_1 \in \mathcal{P}(E)$ $\forall H_2 \in \mathcal{P}(E)$. Введем в рассмотрение семейство

$$\mathfrak{F}^{\natural}\langle\mathcal{L}\rangle \triangleq \{\mathbb{F}^{\natural}[\mathcal{L}|\Lambda]\colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}^*(\mathcal{L}))),$$

для которого естественным образом будет установлена связь с (2.7). В самом деле, из (2.6) и (6.25) вытекает, что $\mathbb{F}^*_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\Lambda] = \mathbb{F}^{\natural}[\mathcal{L}|\Lambda] \cap \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ $\forall \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$. Как следствие получаем, что

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] = \mathfrak{F}^{\natural}\langle\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}. \tag{6.26}$$

Вместе с тем, $\mathfrak{F}^{\natural}\langle\mathcal{L}\rangle \in (\mathrm{p-BAS})[\mathbb{F}^*(\mathcal{L})]$, а потому определена топология $\hat{\mathbf{t}}^{\natural}_0(\mathcal{L}) \triangleq$ $\triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}^{\natural}\langle\mathcal{L}\rangle)) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*(\mathcal{L})]$ волмэновского типа. Справедливо следующее предложение.

Предложение 14. *В виде* (2.8) *реализуется подпространство ТП*

$$(\mathbb{F}^*(\mathcal{L}), \hat{\mathbf{t}}^{\natural}_0(\mathcal{L})), \tag{6.27}$$

а именно: $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \hat{\mathbf{t}}^{\natural}_0(\mathcal{L})|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}$.

Доказательство непосредственно следует из (6.26). Напомним сейчас (6.5) и (6.11), тогда $\hat{\mathfrak{C}}_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p-BAS})_0[\langle\mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}]; \hat{\mathbf{t}}^0(E;\mathcal{L})]$; см. [13, раздел 2]. При этом $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \in \mathcal{P}'(\langle\mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}])$. Легко видеть, что

$$\mathfrak{F}^{\natural}\langle\mathcal{L}\rangle = \hat{\mathfrak{C}}_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]|_{\mathbb{F}^*(\mathcal{L})}. \tag{6.28}$$

Предложение 15. *В виде* (6.27) *реализуется подпространство ТП* (6.11):

$$\hat{\mathbf{t}}^{\natural}_0(\mathcal{L}) = \hat{\mathbf{t}}^0(E;\mathcal{L})|_{\mathbb{F}^*(\mathcal{L})}.$$

Доказательство является непосредственным следствием равенства (6.28). Заметим, что построения настоящего параграфа реализованы применительно к следующим двум цепочкам вложений:

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \subset \langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{L}] \subset \langle\mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}], \tag{6.29}$$

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \langle\mathrm{link}\rangle[\mathcal{L}]. \tag{6.30}$$

При этом с (6.29) связываются свойства (5.4), (5.7), (6.12) и предложение 9. В свою очередь, с (6.30) связываются предложения 12–15. Итак, (6.29) и (6.30) определяют два естественных варианта иерархии подпространств.

§ 7. Произведения сцепленных систем

В настоящем параграфе фиксируются непустые множества X и Y, а также π-системы $\mathcal{X} \in \pi[X]$ и $\mathcal{Y} \in \pi[Y]$. При $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))$ полагаем, что

$$\mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B} \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) \times \mathrm{pr}_2(z)\colon z \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}, \tag{7.1}$$

получая непустое подсемейство $\mathcal{P}(X \times Y)$. Рассматриваем $X \times Y$ и π-систему

$$\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y} = \{\mathrm{pr}_1(z) \times \mathrm{pr}_2(z)\colon z \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}\} \in \pi[X \times Y]$$

(семейство «измеримых» прямоугольников; см. [24, предложение 5.2.1]). Используем предыдущие конструкции для следующих вариантов ИП $(E,\mathcal{L})$: $(E,\mathcal{L}) = (X,\mathcal{X})$, $(E,\mathcal{L}) =$ $= (Y,\mathcal{Y})$, $(E,\mathcal{L}) = (X \times Y, \mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y})$.

Предложение 16. *Если* $\mathcal{A} \in \langle\mathrm{link}\rangle[\mathcal{X}]$ *и* $\mathcal{B} \in \langle\mathrm{link}\rangle[\mathcal{Y}]$, *то*

$$\mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B} \in \langle\mathrm{link}\rangle[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}].$$

Доказательство очевидным образом следует из определения декартова произведения и [24, (5.2.2)]. Также очевидно следующее положение (свойство единственности представления непустых прямоугольников).

Предложение 17. *Если* $M \in (\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}) \setminus \{\varnothing\}$, *то* $\exists! z \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}\colon M = \mathrm{pr}_1(z) \times \mathrm{pr}_2(z)$.

С учетом предложения 17 введем отображение $\varphi\colon (\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ посредством следующего правила: если $H \in (\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}) \setminus \{\varnothing\}$, то

$$H = \mathrm{pr}_1(\varphi(H)) \times \mathrm{pr}_2(\varphi(H)). \tag{7.2}$$

С учетом (7.2) определены «координатные» отображения

$$\varphi_1 \triangleq (\mathrm{pr}_1(\varphi(H)))_{H \in (\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}) \setminus \{\varnothing\}} \in (\mathcal{X} \setminus \{\varnothing\})^{(\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}) \setminus \{\varnothing\}}, \tag{7.3}$$

$$\varphi_2 \triangleq (\mathrm{pr}_2(\varphi(H)))_{H \in (\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}) \setminus \{\varnothing\}} \in (\mathcal{Y} \setminus \{\varnothing\})^{(\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}) \setminus \{\varnothing\}}. \tag{7.4}$$

Из (7.2), (7.3) и (7.4) получаем при $S \in (\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}) \setminus \{\varnothing\}$, что $S = \varphi_1(S) \times \varphi_2(S)$. При этом $\langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}] \subset \mathcal{P}'((\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}) \setminus \{\varnothing\})$, а потому определены семейства-образы: при $\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}]$

$$((\varphi_1)^1(\mathcal{E}) \in \mathcal{P}'(\mathcal{X} \setminus \{\varnothing\}))\&((\varphi_2)^1(\mathcal{E}) \in \mathcal{P}'(\mathcal{Y} \setminus \{\varnothing\})). \tag{7.5}$$

Предложение 18. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}]$, *то*

$$((\varphi_1)^1(\mathcal{E}) \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{X}])\&((\varphi_2)^1(\mathcal{E}) \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{Y}]). \tag{7.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}]$. Тогда $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y})$ и при этом

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing \quad \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E}\ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}. \tag{7.7}$$

Введем в рассмотрение семейства-образы (см. (7.5))

$$(\mathcal{A} \triangleq (\varphi_1)^1(\mathcal{E}) \in \mathcal{P}'(\mathcal{X} \setminus \{\varnothing\}))\&(\mathcal{B} \triangleq (\varphi_2)^1(\mathcal{E}) \in \mathcal{P}'(\mathcal{Y} \setminus \{\varnothing\})).$$

Пусть $A' \in \mathcal{A}$ и $A'' \in \mathcal{A}$. Тогда для некоторых $\Sigma' \in \mathcal{E}$ и $\Sigma'' \in \mathcal{E}$ имеем равенства

$$(A' = \varphi_1(\Sigma'))\&(A'' = \varphi_1(\Sigma'')). \tag{7.8}$$

При этом, конечно, $\Sigma' \in (\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}) \setminus \{\varnothing\}$ и $\Sigma'' \in (\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}) \setminus \{\varnothing\}$ (см (7.7)). Поэтому согласно (7.8) имеем, что $\Sigma' = A' \times \varphi_2(\Sigma')$ и $\Sigma'' = A'' \times \varphi_2(\Sigma'')$. Тогда получаем, что (см. (7.7))

$$\Sigma' \cap \Sigma'' = (A' \cap A'') \times (\varphi_2(\Sigma') \cap \varphi_2(\Sigma'')) \neq \varnothing,$$

откуда следует свойство $A' \cap A'' \neq \varnothing$. Поскольку выбор A', A'' был произвольным, установлено, что $\mathcal{A} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{X}]$. Второе положение в (7.6) устанавливается совершенно аналогично. □

Предложение 19. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}]$, *то* $\mathcal{E} \subset (\varphi_1)^1(\mathcal{E})\{\times\}(\varphi_2)^1(\mathcal{E})$.

Доказательство следует из определений.

Предложение 20. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}]$, *то справедливо равенство*

$$\mathcal{E} = (\varphi_1)^1(\mathcal{E}) \times (\varphi_2)^1(\mathcal{E}).$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией предложений 16, 18, 19, а также (1.15).

Предложение 21. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}]$, *то*

$$((\varphi_1)^1(\mathcal{E}) \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{X}])\&((\varphi_2)^1(\mathcal{E}) \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{Y}]).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}]$. Рассмотрим $(\varphi_1)^1(\mathcal{E}) \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{X}]$ (см. предложение 18). Воспользуемся представлением (3.2). Пусть $\mathbb{L} \in \mathcal{X}$ таково, что

$$\mathbb{L} \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in (\varphi_1)^1(\mathcal{E}). \tag{7.9}$$

Рассмотрим множество $\mathbb{L} \times Y \in \mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}$. Покажем, что

$$(\mathbb{L} \times Y) \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in \mathcal{E}. \tag{7.10}$$

В самом деле, пусть $\Sigma_* \in \mathcal{E}$. Тогда, в частности, $\Sigma_* \in (\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}) \setminus \{\varnothing\}$. Поэтому $\varphi_1(\Sigma_*) \in$ $\in \mathcal{X} \setminus \{\varnothing\}$ и $\varphi_2(\Sigma_*) \in \mathcal{Y} \setminus \{\varnothing\}$ таковы, что

$$\Sigma_* = \varphi_1(\Sigma_*) \times \varphi_2(\Sigma_*), \tag{7.11}$$

где $\varphi_1(\Sigma_*) \in (\varphi_1)^1(\mathcal{E})$ по выбору Σ_*. Тогда согласно (7.9)

$$\mathbb{L} \cap \varphi_1(\Sigma_*) \neq \varnothing. \tag{7.12}$$

При этом согласно (7.11) и того, что $\varphi_2(\Sigma_*) \subset Y$, получаем равенство

$$(\mathbb{L} \times Y) \cap \Sigma_* = (\mathbb{L} \cap \varphi_1(\Sigma_*)) \times \varphi_2(\Sigma_*). \tag{7.13}$$

Поскольку в силу (7.4) $\varphi_2(\Sigma_*) \neq \varnothing$ получаем из (7.12) и (7.13), что $(\mathbb{L} \times Y) \cap \Sigma_* \neq \varnothing$. Так как выбор Σ_* был произвольным, свойство (7.10) установлено. Это означает (см. (3.2)), что

$$\mathbb{L} \times Y \in \mathcal{E} \tag{7.14}$$

(учли свойство максимальности $\mathcal{E}$), а потому в силу (7.5) имеем

$$\varphi_1(\mathbb{L} \times Y) \in (\varphi_1)^1(\mathcal{E}). \tag{7.15}$$

По выбору $\mathcal{E}$ имеем из (7.14), $\mathbb{L} \times Y \neq \varnothing$, а тогда $\mathbb{L} \neq \varnothing$. Поэтому $\mathbb{L} \in \mathcal{X} \setminus \{\varnothing\}$ и $Y \in \mathcal{Y} \setminus \{\varnothing\}$. С учетом предложения 17 получаем равенство $\varphi_1(\mathbb{L} \times Y) = \mathbb{L}$. В силу (7.15) $\mathbb{L} \in (\varphi_1)^1(\mathcal{E})$ (при условии (7.9)). Итак, истинна импликация

$$(\mathbb{L} \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in (\varphi_1)^1(\mathcal{E})) \Longrightarrow (\mathbb{L} \in (\varphi_1)^1(\mathcal{E})).$$

Коль скоро выбор $\mathbb{L}$ был произвольным, установлено, что $\forall L \in \mathcal{X}$

$$(L \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in (\varphi_1)^1(\mathcal{E})) \Longrightarrow (L \in (\varphi_1)^1(\mathcal{E})). \tag{7.16}$$

Поскольку семейство $(\varphi_1)^1(\mathcal{E})$ сцеплено, имеем из (3.2) и (7.16), что

$$(\varphi_1)^1(\mathcal{E}) \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{X}].$$

Свойство $(\varphi_2)^1(\mathcal{E}) \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{Y}]$ устанавливается аналогично. □

Из предложений 20, 21 вытекает, что

$$\forall \mathcal{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}] \ \exists \mathcal{A} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{X}] \ \exists \mathcal{B} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{Y}] \colon \mathcal{E} = \mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}.$$

Предложение 22. *Если* $\mathcal{A} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{X}]$ *и* $\mathcal{B} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{Y}]$, *то* $\mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем МСС $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в соответствии с условиями. В силу предложения 16 имеем

$$\mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}], \tag{7.17}$$

где $\mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}$ определено в (7.1). Пусть $M \in \mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}$ таково, что

$$M \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in \mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}. \tag{7.18}$$

Из (7.18) имеем, в частности, что $M \in (\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}) \setminus \{\varnothing\}$, а потому определены множества $\varphi_1(M) \in \mathcal{X} \setminus \{\varnothing\}$ и $\varphi_2(M) \in \mathcal{Y} \setminus \{\varnothing\}$, для которых реализуется равенство

$$M = \varphi_1(M) \times \varphi_2(M). \tag{7.19}$$

Пусть $A_0 \in \mathcal{A}$. С учетом того, что $\mathcal{B} \neq \varnothing$, выберем $B_0 \in \mathcal{B}$, получая в силу (7.1), что $A_0 \times B_0 \in \mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}$. Тогда, как легко видеть (см. (7.18), (7.19)),

$$(\varphi_1(M) \cap A_0) \times (\varphi_2(M) \cap B_0) = M \cap (A_0 \times B_0) \neq \varnothing.$$

Это означает, в частности, справедливость следующего свойства: $\varphi_1(M) \cap A_0 \neq \varnothing$. Поскольку выбор A_0 был произвольным, установлено, что

$$\varphi_1(M) \cap A \neq \varnothing \quad \forall A \in \mathcal{A}. \tag{7.20}$$

Используя максимальность $\mathcal{A}$, получаем в силу (3.2) и (7.20), что

$$\varphi_1(M) \in \mathcal{A}. \tag{7.21}$$

Пусть $B^0 \in \mathcal{B}$. С учетом непустоты семейства $\mathcal{A}$ выберем произвольно $A^0 \in \mathcal{A}$. Тогда $A^0 \times B^0 \in \mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}$ в силу (7.1). С учетом (7.18) и (7.19) получаем, что

$$(\varphi_1(M) \cap A^0) \times (\varphi_2(M) \cap B^0) = M \cap (A^0 \times B^0) \neq \varnothing.$$

Тогда, в частности, $\varphi_2(M) \cap B^0 \neq \varnothing$. Поскольку выбор B^0 был произвольным, установлено, что

$$\varphi_2(M) \cap B \neq \varnothing \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

С учетом (3.2) и максимальности $\mathcal{B}$ получаем, что

$$\varphi_2(M) \in \mathcal{B}. \tag{7.22}$$

Из (7.1), (7.21) и (7.22) следует, что $\varphi_1(M) \times \varphi_2(M) \in \mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}$. Тогда с учетом (7.19) получаем (при условии (7.18)), что $M \in \mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}$. Итак, установлена (см. (7.18)) импликация

$$(M \cap \Sigma \neq \varnothing \ \forall \Sigma \in \mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}) \Longrightarrow (M \in \mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}).$$

Поскольку выбор M был произвольным, получаем, что $\forall L \in \mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}$

$$(L \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in \mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}). \tag{7.23}$$

Из (3.2), (7.17) и (7.23) следует требуемое свойство $\mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}]$. □

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}] = \{\mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B} \colon (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{X}] \times \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{Y}]\}. \tag{7.24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω выражение в правой части доказываемого равенства (7.24):

$$\Omega \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z)\{\times\}\mathrm{pr}_2(z)\colon z \in \langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{X}] \times \langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{Y}]\}. \tag{7.25}$$

Пусть $\mathcal{E}_0 \in \langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}]$. Тогда согласно предложению 21

$$((\varphi_1)^1(\mathcal{E}_0) \in \langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{X}])\&((\varphi_2)^1(\mathcal{E}_0) \in \langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{Y}]). \tag{7.26}$$

При этом согласно предложению 20

$$\mathcal{E}_0 = (\varphi_1)^1(\mathcal{E}_0)\{\times\}(\varphi_2)^1(\mathcal{E}_0). \tag{7.27}$$

Из (7.25)–(7.27) вытекает, что $\mathcal{E}_0 \in \Omega$, а потому (поскольку выбор $\mathcal{E}_0$ был произвольным)

$$\langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}] \subset \Omega. \tag{7.28}$$

Выберем произвольно $\mathcal{E}^0 \in \Omega$. Тогда $\mathcal{E}^0 = \mathcal{A}^0\{\times\}\mathcal{B}^0$, где $\mathcal{A}^0 \in \langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{X}]$ и $\mathcal{B}^0 \in \langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{Y}]$. В силу предложения 22 $\mathcal{E}^0 = \mathcal{A}^0\{\times\}\mathcal{B}^0 \in \langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}]$, чем и завершается проверка вложения

$$\Omega \subset \langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}]. \tag{7.29}$$

Из (7.28) и (7.29) следует требуемое равенство $\langle\mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{X}\{\times\}\mathcal{Y}] = \Omega$. $\square$

Итак, множество всех МСС на произведении двух π-систем исчерпывается произведениями МСС на пространствах-сомножителях.

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18–01–00410.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. de Groot J. Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. P. 89–90.
2. van Mill J. Supercompactness and Wallman spaces // Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977.
3. Strok M., Szymański A. Compact metric spaces have binary bases // Fundamenta Mathematicae. 1975. Vol. 89. No. 1. P. 81–91. https://doi.org/10.4064/fm-89-1-81-91
4. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006.
5. Ченцов А. Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 365–388. https://doi.org/10.20537/vm170307
6. Chentsov A. G. To a question on the supercompactness of ultrafilter spaces // Ural Math. J. 2019. Vol. 5. No. 1. P. 31–47. https://doi.org/10.15826/umj.2019.1.004
7. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
8. Dvalishvili B. P. Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications. Amsterdam: North-Holland, 2005.
9. Ченцов А. Г. Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 2. С. 240–257. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-240-257
10. Gryzlov A. A. On convergent sequences and copies of βN in one compactification of N // XI Prague Symposium on General Topology. Prague, Czech. Rep., 2011. P. 29.
11. Грызлов А. А., Бастрыков Е. С., Головастов Р. А. О точках одного бикомпактного расширения N // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17. https://doi.org/10.20537/vm100302

12. Грызлов А. А., Головастов Р. А. О пространствах Стоуна некоторых булевых алгебр // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 11–16. https://doi.org/10.20537/vm130102
13. Ченцов А. Г. Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 257–272. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272
14. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
15. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004.
16. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
17. Ченцов А. Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С. 274–292. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-1-274-292
18. Ченцов А. Г. Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Изв. вузов. Матем. 2013. № 11. С. 33–50. http://mi.mathnet.ru/ivm8844
19. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
20. Ченцов А. Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы: основные свойства и топологические конструкции // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 52. С. 86–102. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-07
21. Ченцов А. Г. О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 74–101. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-07
22. Ченцов А. Г. Некоторые свойства ультрафильтров широко понимаемых измеримых пространств // Доклады Академии наук. 2019. Т. 486. № 1. С. 24–29.
23. Ченцов А. Г. Максимальные сцепленные системы и ультрафильтры: основные представления и топологические свойства // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 68–84. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2020-25-129-68-84
24. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008.

Поступила в редакцию 03.08.2020

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Цитирование: А. Г. Ченцов. Фильтры и сцепленные семейства множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 3. С. 444–467.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2020. Vol. 30. Issue 3. Pp. 444–467.

A. G. Chentsov

Filters and linked families of sets

Keywords: maximal linked system, family of sets, topology, ultrafilter.

MSC2010: 93C83

DOI: 10.35634/vm200307

Properties of ultrafilters (u/f) and maximal linked systems (MLS) on the widely understood measurable space (MS) and representations of linked (not necessarily maximal) families and filters on this MS are investigated. Conditions realizing maximality of linked families (systems) and natural representations for bitopological spaces (BTS) of u/f and MLS are established. Equipments of sets of linked families and filters corresponding to Wallman and Stone schemes are studied; the connection of these equipments with analogous equipments (with topologies) for u/f and MLS leading to above-mentioned BTS is studied too. Properties of linked family products for two (widely understood) MS are investigated. It is shown that MLS on the π-system product (that is, on the family of «measurable» rectangles) are limited to products of corresponding MLS on initial spaces.

Funding. The study was funded by RFBR, project number 18–01–00410.

REFERENCES

1. de Groot J. Superextensions and supercompactness, *Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications*, Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969, pp. 89–90.
2. van Mill J. *Supercompactness and Wallman spaces*, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977.
3. Strok M., Szymański A. Compact metric spaces have binary bases, *Fundamenta Mathematicae*, 1975, vol. 89, no. 1, pp. 81–91. https://doi.org/10.4064/fm-89-1-81-91
4. Fedorchuk V. V., Filippov V. V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii* (General topology. Base constructions), Moscow: Fizmatlit, 2006.
5. Chentsov A. G. Ultrafilters and maximal linked systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 365–388 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170307
6. Chentsov A. G. To a question on the supercompactness of ultrafilter spaces, *Ural Math. J.*, 2019, vol. 5, no. 1, pp. 31–47. https://doi.org/10.15826/umj.2019.1.004
7. Bulinskii A. V., Shiryaev A. N. *Teoriya sluchainykh protsessov* (Theory of random processes), Moscow: Fizmatlit, 2005.
8. Dvalishvili B. P. *Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications*, Amsterdam: North-Holland, 2005.
9. Chentsov A. G. Supercompact spaces of ultrafilters and maximal linked systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 240–257 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-240-257
10. Gryzlov A. A. On convergent sequences and copies of βN in one compactification of N, *XI Prague Symposium on General Topology*, Prague, Czech. Rep., 2011, p. 29.
11. Gryzlov A. A., Bastrykov E. S., Golovastov R. A. About points of compactification of N, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2010, issue 3, pp. 10–17 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm100302
12. Gryzlov A. A., Golovastov R. A. The Stone spaces of Boolean algebras, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 1, pp. 11–16 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm130102
13. Chentsov A. G. Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 257–272 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272

14. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1967.
Translated under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow: Mir, 1970.
15. Aleksandrov P. S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* (Introduction to set theory and general topology), Moscow: Editorial URSS, 2004.
16. Neve Zh. *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostei* (Mathematical foundations of probability theory), Moscow: Mir, 1969.
17. Chentsov A. G. Ultrafilters and maximal linked systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 274–292 (in Russian).
https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-1-274-292
18. Chentsov A. G. Attraction sets in abstract attainability problems: Equivalent representations and basic properties, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, no. 11, pp. 28–44.
https://doi.org/10.3103/S1066369X13110030
19. Engelking R. *General topology*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1985.
Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Mir, 1986.
20. Chentsov A. G. Ultrafilters and maximal linked systems: basic properties and topological constructions, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 52, pp. 86–102 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-07
21. Chentsov A. G. On the supercompactness of ultrafilter space with the topology of Walman type, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 74–101. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-07
22. Chentsov A. G. Some properties of ultrafilters of widely understood measurable spaces, *Doklady Akademii Nauk*, 2019, vol. 486, no. 1, pp. 24–29.
23. Chentsov A. G. Maximal linked systems and ultrafilters: basic rerpesentations and topological properties, *Vestnik Rossiiskikh Universitetov. Matematika*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 68–84.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2020-25-129-68-84
24. Chentsov A. G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, I* (Elements of finitely additive measure theory, I), Yekaterinburg: USTU-UPI, 2008.

Received 03.08.2020

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Citation: A. G. Chentsov. Filters and linked families of sets, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 3, pp. 444–467.