A. G. Chentsov, A. N. Sesekin, Relaxation of the attainability problem for a linear control system of neutral type, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2021, Volume 31, Issue 1, 70–88

DOI: https://doi.org/10.35634/vm210106

МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 70–88.

УДК 517.977

© *А. Г. Ченцов, А. Н. Сесекин*

РЕЛАКСАЦИЯ ЗАДАЧИ О ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассматривается задача управления линейной системой нейтрального типа с импульсными ограничениями. Кроме того, предполагается заданной система промежуточных условий. Исследуется постановка, в которой допускается исчезающе малое ослабление упомянутых ограничений. В этой связи область достижимости (ОД) в фиксированный момент окончания процесса заменяется естественным асимптотическим аналогом — множеством притяжения (МП). Для построения последнего используется конструкция расширения в классе конечно-аддитивных (к.-а.) мер, используемых в качестве обобщенных управлений. Показано, что МП совпадает с ОД системы в классе обобщенных управлений — к.-а. мер. Исследуется структура упомянутого МП.

Ключевые слова: линейные системы с последействием нейтрального типа, множества притяжения, конечно-аддитивные меры.

DOI: 10.35634/vm210106

§ 1. Введение и постановка задачи

В работе рассматриваются линейные уравнения нейтрального типа (см. [1, гл. 10], [2, с. 45–47]), в которых управляющее воздействие является интегрально ограниченным. Заметим, что уравнения нейтрального типа широко используются при моделировании различных процессов в природе, технике и экономике (см. [3]). При наличии интегральных ограничений могут возникать управляющие воздействия, аппроксимирующие импульсные воздействия. В связи с этим возникает задача описания замыкания множества обычных решений.

В работах [4–6] для систем без запаздывания такое замыкание строилось в пространстве функций ограниченной вариации. Для линейных систем с запаздыванием аналогичное замыкание рассматривалось в [7]. Там же была обоснована формула Коши для линейных систем с запаздыванием и импульсным воздействием в правой части. К сожалению, для систем нейтрального типа построить аналогичное расширение не удается. Это связано с невозможностью осуществить предельный переход в интеграле Лебега–Стилтьеса в случае, когда интегрируемая и интегрирующая функции являются разрывными. В связи с этим в работе расширение строится в классе конечно-аддитивных (к.-а.) мер.

Рассмотрим линейную систему нейтрального типа:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-\tau) + A_2(t)\dot{x}(t-\tau) + b(t)u(t), \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in [t_0 - \tau, t_0]. \tag{1.2}$$

Здесь $A(s),\ A_1(s),\ A_2(s)$ — непрерывные на $[t_0, \vartheta_0]$ $n \times n$ матрицы-функции, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 < \vartheta_0 < \infty$, $\tau \in \mathbb{R}$ $(0 < \tau < \infty)$ — запаздывание, $b(t)$ — непрерывная на $[t_0, \vartheta_0]$ n-вектор-функция, $x \in \mathbb{R}^n$, n-мерная вектор-функция $\varphi(\cdot)$ на $[t_0 - \tau, t_0]$ является непрерывно-дифференцируемой функцией. Скалярную функцию $u = (u(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta_0)$ рассматриваем в качестве управления; полагаем ее простейшей — кусочно-постоянной и непрерывной справа.

Уравнение (1.1) в интегральной форме будет выглядеть следующим образом:

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} A_1(s)x(s-\tau)\,ds + \int_{t_0}^{t} A_2(s)\dot{x}(s-\tau)\,ds + \int_{t_0}^{t} b(s)\,u(s)\,ds.$$

При сделанных предположениях на $u(t)$, согласно [2, с. 45], решение уравнения (1.1) с начальным условием (1.2) существует и единственно.

Обозначим через D квадрат на плоскости s и t; $D = [t_0, \vartheta_0] \times [t_0, \vartheta_0]$. При сделанных предположениях, согласно [2, с. 45–47], решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$x(t) = [F(t,t_0) + F(t,t_0+\tau)A_2(t_0+\tau)]\varphi(t_0) +$$
$$+ \int_{t_0-\tau}^{t_0} F(t,s+\tau)[A_1(s+\tau)\varphi(s) + A_2(s+\tau)\dot{\varphi}(s)]\,ds + \int_{t_0}^{t} F(t,s)b(s)\,u(s)\,ds.$$

Функция $F(t,s)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial F(t,s)}{\partial s} = -F(t,s)A(s) - F(t,s+\tau)A_1(s+\tau) + \frac{\partial F(t,s+\tau)A_2(s+\tau)}{\partial s}$$

с начальными условиями

$$F(t,t-0) = \mathbb{E}, \;\; F(t,s) \equiv 0, \;\; s > t, \tag{1.3}$$

где $\mathbb{E}$ — единичная матрица, и удовлетворяет дополнительному требованию, состоящему в том, что выражение

$$F(t,s) - F(t,s+\tau)A_2(s+\tau) \tag{1.4}$$

определяет функцию, непрерывную по переменной $s \in [t_0, t]$.

Полагаем, что выбор u стеснен ограничением

$$\int_{t_0}^{\vartheta_0} |u(s)|\,ds \leqslant \mathbf{c}, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{c} > 0$, т. е. что выбор функции $u(\cdot)$ в (1.5) стеснен ограничением: импульс силы не должен превосходить заданной константы $\mathbf{c} \in [0, \infty[$. Исследуем вопрос о достижимости в заданный момент времени ϑ_0, где $t_0 < \vartheta_0$, при ограничениях в виде конечной системы промежуточных условий, определяемых замкнутыми множествами в фазовом пространстве. В данной задаче достаточно типичным является следующее свойство неустойчивости: при ослаблении промежуточных условий область достижимости (ОД) может скачкообразно расширяться. При этом предел ОД для ослабленных вариантов промежуточных условий может не совпадать с замыканием исходной ОД. Упомянутый предел, имеющий смысл множества притяжения (МП), в этих случаях представляет самостоятельный интерес как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения практической реализации. Точки данного МП (а их может быть больше, чем в исходной ОД) можно рассматривать как достижимые в практических условиях, т. е. при соблюдении ограничений с высокой, но все же конечной степенью точности. В связи с данной особенностью отметим подход Дж. Варги [8, гл. III], связанный с применением приближенных решений — последовательностей в задачах оптимизации. В связи с распространением данного подхода на задачи о достижимости отметим работы Н. Н. Красовского и А. И. Субботина по теории дифференциальных игр: при решении дифференциальной игры сближения–уклонения в классе позиционных стратегий допускаются малые «люфты» при движении в окрестностях множества позиционного поглощения.

Возвращаясь к рассматриваемой задаче, отметим, что вопрос о построении МП при ослаблении ограничений импульсного и моментного характера подробно рассматривался в [9–11] (еще более общие вопросы, связанные с ограничениями асимптотического характера, см. в [12, 13]). Важную роль в упомянутых исследованиях играли конструкции расширений (исходной задачи) в классе конечно-аддитивных (к.-а.) мер, используемых в качестве обобщенных элементов и, в частности, в качестве обобщенных управлений (ОУ). В настоящем исследовании для построения МП также используется расширение (пространства обычных управлений) в классе к.-а. мер ограниченной вариации для простейшего варианта измеримой структуры промежутка управления; а именно используется полуалгебра так называемого пространства-стрелки (см. [14, § 3.9]). Применение именно к.-а. мер связано с «обработкой» разрывных зависимостей, формализуемых посредством ярусных функций (имеются в виду элементы пространств типа $B(S, \Sigma)$ в монографии [15, гл. V]). Речь идет фактически об использовании в качестве ОУ линейных непрерывных функционалов на банаховом пространстве ярусных функций и условий компактности, определяемых теоремой Алаоглу [15, гл. V].

В связи с использованием пространства-стрелки, а не «традиционной» σ-алгебры измеримых множеств, отметим, что это связано с отсутствием конструктивных представлений для к.-а. мер на σ-алгебре множеств в случае применения положений функционального анализа, использующих аксиому выбора (в этой связи напомним работу [16]). В то же время для пространства-стрелки удается получать конструктивное описание весьма важного класса к.-а. нормированных $(0, 1)$-мер (см. [14, § 3.9], [17, (10.5.57)] и [18]). Поскольку и само пространство ярусных функций допускает в случае пространства-стрелки достаточно простое описание [14, § 3.9], целесообразно, на наш взгляд, сосредоточиться на построениях для данного измеримого пространства (ИП).

§ 2. Общие понятия и обозначения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); $\triangleq$ — равенство по определению, $\exists!$ заменяет фразу «существует и единственно», $\varnothing$ — пустое множество. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Если x и y — объекты, то через $\{x; y\}$ обозначаем (единственное) множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Тогда для каждого объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ имеем синглетон, содержащий z. Если a и b — объекты, то $(a, b) \triangleq \{\{a\}; \{a; b\}\}$ есть [19, с. 87] упорядоченная пара (УП) с первым элементом a и вторым элементом b. Если же h — произвольная УП, то через $pr_1(h)$ и $pr_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы h; $h = (pr_1(h), pr_2(h))$.

Через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) множества H, $\mathcal{P}'(H) \triangleq \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$, а $\mathrm{Fin}(H)$ есть семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м H. Для всякого множества M в виде $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(M))$ имеем семейство всех непустых подсемейств $\mathcal{P}(M)$. Если же $\mathcal{S}$ — непустое семейство, а T — множество, то

$$\mathcal{S}|_T \triangleq \{S \cap T \colon S \in \mathcal{S}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(T)). \tag{2.1}$$

Тогда, в частности, для множества $\mathbf{S}$, семейства $\mathcal{S} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{S}))$ и $T \in \mathcal{P}(\mathbf{S})$ определено семейство (2.1).

Если A и B — непустые множества, то, следуя [19, гл. II], через B^A обозначаем множество всех отображений, действующих из A в B; высказывание $f \in B^A$ тождественно выражению $f \colon A \longrightarrow B$. Если $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x) \colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ множества C при действии f. Здесь A — область определения f — находится (по f) однозначно. В этой связи условимся об обозначении операции склеивания: если A_1, A_2 и B — непустые множества, причем $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то для всяких отображений $u \in B^{A_1}$

и $v \in B^{A_2}$ полагаем, что $u\Box v \in B^{A_1 \cup A_2}$ определяется правилами

$$((u\Box v)(x) \triangleq u(x) \ \ \forall x \in A_1)\&((u\Box v)(x) \triangleq v(x) \ \ \forall x \in A_2). \tag{2.2}$$

В дальнейшем $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая. Полагаем, что $(\overline{p,q} \triangleq \{k \in \mathbb{N} | (p \leqslant k)\&(k \leqslant q)\} \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall q \in \mathbb{N})$ и $(\overrightarrow{m,\infty} \triangleq \{k \in \mathbb{N} | m \leqslant k\} \in \in \mathcal{P}'(\mathbb{N}) \ \forall m \in \mathbb{N})$. Если (X,τ), $X \neq \varnothing$, есть топологическое пространство, то через $\mathbb{C}(X,\tau)$ обозначаем множество всех непрерывных вещественнозначных (в/з) функций на X. Через $\tau_{\mathbb{R}}$ обозначаем обычную $|\cdot|$-топологию $\mathbb{R}$. Нам потребуются подпространства ТП. В этой связи полагаем, что для всякого ТП (X,τ) и множества $Y \in \mathcal{P}(X)$ $\mathrm{cl}(Y,\tau)$ есть замыкание Y в (X,τ), а $\tau|_Y$ есть (см. (2.1)) топология множества Y, индуцированная из (X,τ); $(Y,\tau|_Y)$ есть подпространство (X,τ). В частности, при $H \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ в виде $(H,\tau_{\mathbb{R}}|_H)$ имеем подпространство $(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$. Для всяких ТП (X,τ) и точки $x \in X$ полагаем, что $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau | x \in G\}$ и $N_\tau(x) \triangleq \{S \in \mathcal{P}(X) | \exists G \in N_\tau^0(x) \colon G \subset S\}$.

Для обозначения промежутков $\mathbb{R}$ (открытых, полуоткрытых и замкнутых) будем использовать только квадратные скобки (см. [14, § 1.3]). Полагаем, что элементы $\mathbb{N}$, т. е. натуральные числа, не являются множествами; с учетом этого для всякого множества T и числа $m \in \mathbb{N}$ вместо $T^{\overline{1,m}}$ используем более традиционное обозначение T^m, получая множество всех кортежей $(t_i)_{i \in \overline{1,m}}$ со свойством $t_j \in T \ \ \forall j \in \overline{1,m}$.

§ 3. Ярусные функции и конечно-аддитивные меры

В настоящем параграфе приведена краткая сводка понятий из конечно-аддитивной (к.-а.) теории меры; в этой связи см. [9, гл. III, IV], [14] и др. Для большей краткости в обозначениях зафиксируем сейчас непустое множество S. Тогда

$$\pi[S] \triangleq \{\mathcal{S} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S)) | (\varnothing \in \mathcal{S})\&(S \in \mathcal{S})\&(A \cap B \in \mathcal{S} \ \ \forall A \in \mathcal{S} \ \forall B \in \mathcal{S})\}$$

есть семейство π-систем п/м S с «нулем» и «единицей»; если $\mathcal{S} \in \pi[S]$, $B \in \mathcal{P}(S)$ и $m \in \mathbb{N}$, то

$$\triangle_m(B,\mathcal{S}) \triangleq \{(S_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{S}^m | (A = \cup_{i=1}^m S_i)\&(S_p \cap S_q = \varnothing \ \ \forall p \in \overline{1,m} \ \forall q \in \overline{1,m} \setminus \{p\})\}$$

есть множество всех $\mathcal{S}$-разбиений множества B порядка m. Тогда

$$\Pi[S] \triangleq \{\mathcal{S} \in \pi[S] | \forall A \in \mathcal{S} \ \exists m \in \mathbb{N} \colon \Delta_m(S \setminus A, \mathcal{S}) \neq \varnothing\} \in \mathcal{P}'(\pi[S])$$

есть семейство всех полуалгебр п/м S (каждая полуалгебра есть полукольцо с «единицей»). Тогда $(\mathrm{alg})[S] \triangleq \{\mathcal{L} \in \pi[S] | S \setminus L \in \mathcal{L} \ \forall L \in \mathcal{L}\} = \{\mathcal{L} \in \Pi[S] | S \setminus L \in \mathcal{L} \ \forall L \in \mathcal{L}\}$ есть семейство всех алгебр п/м S. Если $\mathcal{U} \in \Pi[S]$, то

$$a_S^0(\mathcal{U}) \triangleq \{V \in \mathcal{P}(S) | \exists m \in \mathbb{N} \colon \ \triangle_m \ (V,\mathcal{U}) \neq \varnothing\} \in (\mathrm{alg})[S]$$

есть алгебра п/м S, порожденная полуалгеброй $\mathcal{U}$. Если $\mathcal{S} \in \Pi[S]$, то $(S,\mathcal{S})$ есть измеримое пространство (ИП) с полуалгеброй множеств; если же $S \in (\mathrm{alg})[S]$, то $(S,\mathcal{S})$ есть ИП с алгеброй множеств.

Через $\mathbb{B}(S)$ обозначаем множество всех ограниченных функций из $\mathbb{R}^S$, оснащаемое (как линейное пространство) sup-нормой $||\cdot||_S$; см. [14, (2.6.3)], [15, с. 261]. Если $A \in \mathcal{P}(S)$, то индикатор $\chi_A[S] \in \mathbb{R}^S$ множества A (как п/м S) определяется стандартными условиями $(\chi_A[S](x) \triangleq 1 \ \forall x \in A)\&(\chi_A[S](y) \triangleq 0 \ \forall y \in S \setminus A)$. Для случая $\mathcal{S} \in \Pi[S]$ определяем $B_0(S,\mathcal{S})$ как линейную оболочку множества $\{\chi_L[S] \colon L \in \mathcal{S}\}$ (см. [9, 4.3.5]). Легко видеть, что множество $B_0(S,\mathcal{S})$ есть линейное многообразие в $\mathbb{B}(S)$, а потому определено его замыкание $B(S,\mathcal{S})$ в топологии равномерной сходимости $\mathbb{B}(S)$, порождаемой нормой $||\cdot||_S$; ясно, что $B(S,\mathcal{S})$ с нормой, индуцированной из $(\mathbb{B}(S), ||\cdot||_S)$, есть банахово пространство (см. [15, гл. IV]), в котором $B_0(S,\mathcal{S})$ является всюду плотным п/м. Функции из $B(S,\mathcal{S})$ называем ярусными. Через $B^*(S,\mathcal{S})$ обозначаем пространство линейных ограниченных функционалов на $B(S,\mathcal{S})$ с нормой, определяемой стандартно (см. [9, с. 155]). Элементы $B^*(S,\mathcal{S})$ исчерпывающим образом описываются (при $\mathcal{S}\in\Pi[S]$) к.-а. мерами ограниченной вариации, определенными на $\mathcal{S}$.

Конечно-аддитивные меры. Полагаем до конца параграфа, что $\mathcal{S}\in\Pi[S]$. Тогда

$$(\mathrm{add})[\mathcal{S}] \triangleq \{\mu\in\mathbb{R}^{\mathcal{S}} | \mu(L)=\sum_{i=1}^{m}\mu(L_i)\ \ \forall L\in\mathcal{S}\ \forall m\in\mathbb{N}\ \forall (L_i)_{i\in\overline{1,m}}\in\Delta_m(L,\mathcal{S})\}$$

есть линейное многообразие всех в/з к.-а. мер на $\mathcal{S}$, через $(\mathrm{add})_+[\mathcal{S}]$ обозначим конус всех неотрицательных к.-а. мер из $(\mathrm{add})[\mathcal{S}]$. Наконец, через $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ обозначаем множество всех в/з к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{S}$. Как линейное пространство $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ оснащается сильной нормой-вариацией (см. [9, (4.2.16)] при условии $\mathcal{S}\in\Pi[S]$). При упомянутом оснащении $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ и $B^*(S,\mathcal{S})$ изометрически изоморфны; конкретный изометрический изоморфизм определяется (см. [9, теорема 4.3.1]; в случае $\mathcal{S}\in(\mathrm{alg})[S]$ см. [15, гл. IV]) правилом

$$\mu\mapsto \Big(\int_S f\,d\mu\Big)_{f\in B(S,\mathcal{S})} : \mathbf{A}(\mathcal{S})\longrightarrow B^*(S,\mathcal{S})$$

(где операция интегрирования соответствует схеме [14, гл. III]). Итак, $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ и $B^*(S,\mathcal{S})$ отождествимы, что позволяет ввести на $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ «обычную» *-слабую топологию (см. [9, 4.6.6]) $\tau_*(\mathcal{S})$. Условия компактности в топологическом пространстве (ТП)

$$(\mathbf{A}(\mathcal{S}),\tau_*(\mathcal{S})) \tag{3.1}$$

определяются известной теоремой Алаоглу (см. [15, гл. V]). Пример п/м $\mathbf{A}(\mathcal{S})$, компактного в ТП (3.1), доставляет замкнутый шар в сильной норме

$$\mu\mapsto V_\mu[\mathcal{S}]: \mathbf{A}(\mathcal{S})\longrightarrow [0,\infty[,$$

где $V_\nu[\mathcal{S}]$ есть полная вариация к.-а. меры $\nu\in\mathbf{A}(\mathcal{S})$; см. [9, (4.2.12)]. При $c\in[0,\infty[$ шар

$$\mathbf{B}(\mathcal{S},c)\triangleq\{\mu\in\mathbf{A}(\mathcal{S}) | V_\mu[\mathcal{S}]\leqslant c\}$$

радиусом c является множеством, компактным в смысле (3.1), т. е. *-слабо компактным. Напомним, что в $\mathbb{R}^S$ линейные операции, умножение и порядок определяем поточечно, задействуя аналогичные понятия для $\mathbb{R}$. При этом [14, предложение 2.7.4] $fg\in B_0(S,\mathcal{S})$ $\forall f\in B_0(S,\mathcal{S})$ $\forall g\in B_0(S,\mathcal{S})$. Как следствие, $uv\in B(S,\mathcal{S})$ $\forall u\in B(S,\mathcal{S})$ $\forall v\in B(S,\mathcal{S})$ (см. [14, предложение 2.7.7]). В частности, определено $f\chi_L[S]\in B(S,\mathcal{S})$ $\forall f\in B(S,\mathcal{S})$ $\forall L\in\mathcal{S}$. Как обычно,

$$\int_L f\,d\mu = \int_S f\chi_L[S]\,d\mu\in\mathbb{R} \tag{3.2}$$

при $f\in B(S,\mathcal{S})$ и $L\in\mathcal{S}$. С учетом (3.2) при $f\in B(S,\mathcal{S})$ и $\mu\in\mathbf{A}(\mathcal{S})$ определяется [14, § 3.7]

$$f*\mu\triangleq\Big(\int_L f\,d\mu\Big)_{L\in\mathcal{S}}\in\mathbf{A}(\mathcal{S})$$

(неопределенный μ-интеграл f) и при этом

$$\int_S uf\,d\mu=\int_S u\,d(f*\mu)\quad\forall u\in B(S,\mathcal{S}).$$

§ 4. Склеивание измеримых пространств с полуалгебрами множеств

Фиксируем в данном параграфе непустое множество E и полуалгебру $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ его п/м. Кроме того, фиксируем (непустое) множество $\widetilde{E} \in \mathcal{L}\backslash\{\varnothing\}$, для которого $\widehat{E} \triangleq E\backslash\tilde{E} \in \in \mathcal{L}\backslash\{\varnothing\}$. Итак, $\{\widetilde{E}; \widehat{E}\}$ — суть (нетривиальное) бинарное разбиение E множествами из $\mathcal{L}$. При этом (см. [9, предложение 2.3.1])

$$(\widetilde{\mathcal{L}} \triangleq \mathcal{L}|_{\widetilde{E}} \in \Pi[\widetilde{E}])\&(\widehat{\mathcal{L}} \triangleq \mathcal{L}|_{\widehat{E}} \in \Pi[\widehat{E}]).$$

Поскольку полуалгебры множеств являются π-системами, то [9, (2.3.2)] $(\widetilde{\mathcal{L}} = \{L \in \mathcal{L}| L \subset \widetilde{E}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}))\&(\widehat{\mathcal{L}} = \{L \in \mathcal{L}|L \subset \widehat{E}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}))$. Рассмотрим сейчас применение (2.2) к построению склеенных ступенчатых функций на E. Учитываем при этом, что $\widetilde{E}$ и $\widehat{E}$ суть непустые множества, для которых $E = \widetilde{E} \cup \widehat{E}$ и $\widetilde{E} \cap \widehat{E} = \varnothing$. Тогда согласно (2.2) при $u \in B_0(\widetilde{E}, \widetilde{\mathcal{L}})$ и $v \in B_0(\widehat{E}, \widehat{\mathcal{L}})$ определена склеенная функция $u\Box v \in \mathbb{R}^E$, которая, как легко видеть, ступенчата: $u\Box v \in B_0(E, \mathcal{L})$. Как следствие (см. определения § 3)

$$p\Box q \in B(E, \mathcal{L}) \quad \forall p \in B(\widetilde{E}, \widetilde{\mathcal{L}})\ \forall q \in B(\widehat{E}, \widehat{\mathcal{L}}); \tag{4.1}$$

получили свойство склеиваемости (ярусных) функций, являющихся равномерными пределами ступенчатых.

Предложение 1. *Пусть* $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a, \infty[$, *и* $g \in \mathbb{C}([a, b[, \tau_{\mathbb{R}}|_{[a,b[})$, *причем* g *имеет предел слева в точке* b, *т.е.* $\exists c \in \mathbb{R}\,\forall \epsilon \in]0, \infty[\ \exists \delta \in]0, \infty[: |g(t) - c| < \epsilon\ \forall t \in]b - \delta, b[\cap[a, b[$. *Тогда функция* g *равномерно непрерывна на* $[a, b[$.

Доказательство очевидно.

Напомним, что (см. [14, гл. 3]) при $a \in \mathbb{R}$ и $b \in]a, \infty[$

$$\mathcal{J}_a^b \triangleq \{[pr_1(z), pr_2(z)[: z \in [a, b] \times [a, b]\} \in \Pi[[a, b[]. \tag{4.2}$$

Предложение 2. *Если* $a \in \mathbb{R}$ *и* $b \in]a, \infty[$, *а функция* $g \in C([a, b[, \tau_{\mathbb{R}}|_{[a,b[})$ *удовлетворяет свойству, отмеченному в предложении 4.1, то* $g \in B([a, b[, \mathcal{J}_a^b)$.

Доказательство легко следует из определений (см. § 3) с учетом предложения 1. Напомним, что $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_0 \in]t_0, \infty[$. Пусть $I_0 \triangleq [t_0, \vartheta_0]$ и $I \triangleq [t_0, \vartheta_0[$.

Полагаем сейчас заданным число $N \in \mathbb{N}$ и кортеж

$$(\theta_i)_{i\in\overline{0,N}} : \overline{0, N} \longrightarrow I_0, \tag{4.3}$$

для которого выполнены условия

$$(\theta_0 = t_0)\&(\theta_j < \theta_{j+1} \quad \forall j \in \overline{0, N-1})\&(\theta_N = \vartheta_0). \tag{4.4}$$

В терминах кортежа (4.3), (4.4) вводим следующее множество $\mathbb{F}, \mathbb{F} \subset \mathbb{R}^I$:

$$\mathbb{F} \triangleq \{s \in \mathbb{R}^I|((s|[\theta_j, \theta_{j+1}[) \in C([\theta_j, \theta_{j+1}[, \tau_{\mathbb{R}}|_{[\theta_j,\theta_{j+1}[})) \,\&$$
$$\& \ (\forall j \in \overline{1, N}\ \exists c \in \mathbb{R}\ \forall \epsilon \in]0, \infty[\,\exists \delta \in]0, \infty[: |s(t) - c| < \epsilon\ \forall t \in I\cap]\theta_j - \delta, \theta_j[)\}.$$

Итак, $\mathbb{F}$ есть множество всех в/з функций на I, сужения которых на полуинтервалы $[\theta_j, \theta_{j+1}[$, $j \in \overline{1, N-1}$, непрерывны, а сами эти функции имеют предел слева в каждой точке кортежа (4.3). В дальнейшем в качестве элементов $\mathbb{F}$ будут использоваться сечения компонент фундаментальной матрицы решений (ФМР) рассматриваемой системы, где точки $\theta_1, \ldots, \theta_N$ есть точки разрыва фундаментальной матрицы, появляющиеся в силу условий (1.3), (1.4), порожденных наличием запаздывания в системе. Всюду в дальнейшем полагаем, что $\mathcal{J} \triangleq \mathcal{J}_{t_0}^{\vartheta_0}$, откуда следует, что $\mathcal{J} \in \Pi[I]$.

Предложение 3. *Все функции из множества* $\mathbb{F}$ *ярусны относительно полуалгебры* $\mathcal{J}$: $\mathbb{F} \subset B(I, \mathcal{J})$.

Доказательство получается достаточно простой комбинацией (4.1) и предложения 2 с применением конечной индукции; по соображениям объема оно опущено.

§ 5. Задача об исследовании области достижимости при наличии промежуточных условий

В настоящем параграфе мы возвращаемся к постановке, содержательно изложенной во введении. Используя линейность управляемой системы, привлекаем формулу Коши [2, с. 46], в которой используется ФМР, отображающая $I_0 \times I$ в множество всевозможных $n \times n$-матриц, имеющая своими компонентами в/з функции $F_{i,j}$, $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,n}$, определенные каждая на $I_0 \times I$. При этом

$$F(t,s) = (F_{i,j}(t,s))_{(i,j) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n}}.$$

В последующих построениях существенны свойства сечений $F_{i,j}(t,\cdot)$, $t \in I_0$, $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,n}$. Заметим, что из способа построения фундаментальной матрицы $F(t,s)$ (см. (1.3), (1.4)) следует, что ее элементы есть кусочно-непрерывные функции. С учетом построений [2, с. 46] можно полагать, что

$$F_{i,j}(t,\cdot) \in \mathbb{F} \quad \forall t \in I_0 \; \forall i \in \overline{1,n} \; \forall j \in \overline{1,n}. \tag{5.1}$$

Кроме того (см. введение), предполагаем, что n-вектор-функция $b = b(\cdot)$, $b \in \mathbb{R}^I$, такова, что все ее компоненты ярусны:

$$b_j \in B(I, \mathcal{J}) \quad \forall j \in \overline{1,n}; \tag{5.2}$$

при этом, конечно, справедливы равенства $b(t) = (b_i(t))_{i \in \overline{1.n}} \quad \forall t \in I$. Из (5.1) и предложения 3 вытекает, что

$$F_{i,j}(t,\cdot) \in B(I, \mathcal{J}) \quad \forall t \in I_0 \; \forall i \in \overline{1,n} \; \forall j \in \overline{1,n}. \tag{5.3}$$

Из (5.2) и (5.3) вытекает (см. [14, гл. 2]), что

$$F_{i,j}(t,\cdot) b_j = (F_{i,j}(t,s) b_j(s))_{s \in I} \in B(I, \mathcal{J}) \quad \forall i \in \overline{1,n} \; \forall j \in \overline{1,n} \; \forall t \in I. \tag{5.4}$$

В свою очередь, из (5.4) следует понятное (см. [14, гл. 2]) свойство

$$F_{i,j}(t,\cdot) b_j f \in B(I, \mathcal{J}) \quad \forall f \in B(I, \mathcal{J}) \; \forall t \in I_0 \; \forall i \in \overline{1,n} \; \forall j \in \overline{1,n}. \tag{5.5}$$

В § 3 рассматривались вопросы, связанные с интегрированием функций из $B(I, \mathcal{J})$ относительно к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{J}$. Через λ условимся обозначать сужение меры Лебега на полуалгебру $\mathcal{J}$ (4.2); иными словами, λ есть функция длины, являющаяся, конечно, неотрицательной счетно-аддитивной мерой на полуалгебре $\mathcal{J}$. Из (5.5) следует, в частности, что в/з функции

$$F_{i,j}(t,\cdot) b_j f, f \in B(I, \mathcal{J}), \; t \in I_0, \; i \in \overline{1,n}, \; j \in \overline{1,n}, \tag{5.6}$$

являются ограниченными и измеримыми относительно σ-алгебры п/м I, измеримых относительно меры Лебега. Тогда лебеговские интегралы функций (5.6) совпадают в силу (5.5) с соответствующими «ярусными» интегралами, отвечающими схеме [14, гл. 3]. Имея в виду последующее использование к.-а. мер на $\mathcal{J}$ в качестве обобщенных управлений, в представлении траекторий системы по формуле Коши мы будем применять вышеупомянутую простейшую схему интегрирования [14, гл. 3]. Полагаем, как обычно,

$$\int_{[t_0,t[} f(s)F(t,s)b(s)\lambda(ds) \triangleq (\sum_{j=1}^{n} \int_{[t_0,t[} F_{i,j}(t,s)b_j(s)f(s)\lambda(ds))_{i\in\overline{1,n}} \quad \forall f \in B(I,\mathcal{J})\ \forall t \in I_0; \tag{5.7}$$

в (5.7) получаем, как результат интегрирования, элемент $\mathbb{R}^n$. Кроме того, полагаем, что вектор-функция $\Phi\colon I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ определяется условиями: при $t \in I_0$

$$\Phi(t) \triangleq [F(t,t_0) + F(t,t_0+\tau)A_2(t_0+\tau)]\varphi(t_0) +$$
$$+ \int_{[t_0-\tau,t_0[} F(t,s+\tau)[A_1(s+\tau)\varphi(s) + A_2(s+\tau)\dot{\varphi}(s)]\,\lambda(ds).$$

Введем в рассмотрение множество обычных программных управлений

$$\mathbf{F} \triangleq \{f \in B_0(I,\mathcal{J}) |\ \int_I |f(t)|\lambda(dt) \leqslant \mathbf{c}\}, \tag{5.8}$$

где $\mathbf{c} \in]0,\infty[$. Элементы $\mathbf{F}$ (см. [15, § 3.9]) есть кусочно-постоянные и непрерывные справа на I в/з функции (они и только они «составляют» множество $B_0(I,\mathcal{J})$), они используются далее в качестве обычных управлений, стесненных естественным импульсным ограничением ($\mathbf{c}$ — ресурсная константа). Заметим, в частности, что $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(B(I,\mathcal{J}))$, а поэтому функции из $\mathbf{F}$ могут использоваться в (5.7). Тогда при $f \in \mathbf{F}$ определена обычная траектория $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}_f(\cdot)$ на I_0 посредством правила: $\forall t \in I_0$

$$\mathbf{x}_f(t) \triangleq \Phi(t) + \int_{[t_0,t[} f(s)F(t,s)b(s)\lambda(ds). \tag{5.9}$$

Помимо (обычных) траекторий (5.9), будут использоваться обобщенные траектории, порожденные к.-а. управлениями-мерами из множества

$$\mathbf{B}(\mathcal{J},\mathbf{c}) = \{\mu \in \mathbf{A}(\mathcal{J}) | V_\mu[\mathcal{J}] \leqslant \mathbf{c}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{A}(\mathcal{J})). \tag{5.10}$$

Обычные управления погружаются при этом в множество (5.10) посредством отображения $\mathbf{m}$ следующего вида

$$f \mapsto f * \lambda\colon \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{B}(\mathcal{J},\mathbf{c}); \tag{5.11}$$

при этом множество-образ $\tilde{\mathbf{F}} \triangleq \{f*\lambda\colon f \in \mathbf{F}\} = \mathbf{m}^1(\mathbf{F})$ оказывается всюду плотным в (5.10) (см. [10, теорема 4.3]):

$$\mathbf{B}(\mathcal{J},\mathbf{c}) = \mathrm{cl}(\widetilde{\mathbf{F}}, \tau_*(\mathcal{J})) = \mathrm{cl}(\widetilde{\mathbf{F}}, \widetilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J})), \tag{5.12}$$

где (здесь и ниже) $\widetilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J}) \triangleq \tau_*(\mathcal{J})|_{\mathbf{B}(\mathcal{J},\mathbf{c})}$ есть топология, индуцированная из локально выпуклого σ-компакта

$$(\mathbf{A}(\mathcal{J}), \tau_*(\mathcal{J})).$$

Замечание 1. В связи с (5.12) напомним пример [10, пример 4.4.1]: рассматриваемое пространство $(I,\mathcal{J},\lambda)$ подобно пространству $(E,\mathcal{L},\eta)$ упомянутого примера. Дело в том, что $\forall \Lambda \in \mathcal{J}$

$$(\lambda(\Lambda) = 0) \Longleftrightarrow (\Lambda = \varnothing).$$

Это означает, что

$$\mathbf{A}(\mathcal{J}) = \{\mu \in \mathbf{A}(\mathcal{J}) | \forall L \in \mathcal{J} \quad (\lambda(L) = 0) \Rightarrow (\mu(L) = 0)\};$$

последнее отвечает представлению [9, (4.9.4)] множества всех слабо абсолютно непрерывных относительно λ к.-а. мер на $\mathcal{J}$, имеющих ограниченную вариацию.

В связи с (5.12) отметим, что

$$(\mathbf{B}(\mathcal{J},\mathbf{c}),\widetilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J})) \tag{5.13}$$

является непустым компактом, содержащим $\mathbf{m}^1(\mathbf{F})$ в виде всюду плотного множества.

§ 6. Задача о достижимости с промежуточными условиями и ее релаксация

Рассмотрим асимптотический вариант задачи о достижимости системы (1.1) при наличии, наряду с импульсным ограничением, конечной системы промежуточных условий. В вопросах представления терминальных состояний системы будем использовать (5.9) при $t=\vartheta_0$. Точки $\mathbf{x}_f(\vartheta_0)$, где $f\in\mathbf{F}$ — допустимое управление, составляют область достижимости (ОД). Полагаем заданными $r\in\mathbb{N}$ и моменты времени

$$\mathbf{t}_1\in I_0,\ldots,\mathbf{t}_r\in I_0, \tag{6.1}$$

а также замкнутые в $\mathbb{R}^n$ с обычной топологией покоординатной сходимости множества

$$M_1\in\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n),\ldots,M_r\in\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n). \tag{6.2}$$

Посредством (6.1) и (6.2) определяется следующая система промежуточных условий:

$$\mathbf{x}_f(\mathbf{t}_1)\in M_1,\ldots,\mathbf{x}_f(\mathbf{t}_r)\in M_r. \tag{6.3}$$

Допустимыми предполагаются управления $f\in\mathbf{F}$ со свойством (6.3). В качестве особенности условий (6.3) отметим то, что при их ослаблении возможны скачки ОД, что, по сути, является положительным фактором (ОД расширяется). Важно, однако, чтобы данное ослабление условий было «исчезающе малым»; это отвечает замене множеств (6.2) «малыми» окрестностями, что с практической точки зрения вполне допустимо во многих инженерных задачах. Используемый ниже подход может рассматриваться как (несеквенциальный в части построения обобщенных управлений) аналог конструкции Дж. Варги в части построения приближенных решений [8, гл. IV]. Мы полагаем, что

$$M_j^{(\epsilon)}\triangleq\{x\in\mathbb{R}^n|\ \exists y\in M_j\colon ||x-y||<\epsilon\}\quad\forall j\in\overline{1,r}\ \forall\epsilon\in]0,\infty[. \tag{6.4}$$

Тогда ослабленная версия условий (6.3) имеет вид

$$\mathbf{x}_f(\mathbf{t}_1)\in M_1^{(\epsilon)},\ldots,\mathbf{x}_f(\mathbf{t}_r)\in M_r^{(\epsilon)}, \tag{6.5}$$

где $\epsilon\in]0,\infty[$. Модифицируется также определение допустимых управлений (напомним, что в наших построениях они допускаются простейшими: кусочно-постоянными и непрерывными справа). Набору условий (6.5) соответствует при $\epsilon\in]0,\infty[$ множество

$$\mathbf{F}_\epsilon\triangleq\{f\in\mathbf{F}|\mathbf{x}_f(t_j)\in M_j^{(\epsilon)}\quad\forall j\in\overline{1,r}\}. \tag{6.6}$$

В соответствии с (6.6) мы определяем «новые» ОД:

$$\mathbb{G}_\epsilon\triangleq\{\mathbf{x}_f(\vartheta_0)\colon f\in\mathbf{F}_\epsilon\}\quad\forall\epsilon\in]0,\infty[. \tag{6.7}$$

Соответственно, возникает предел ОД (6.7) при $\epsilon\longrightarrow 0$. Таковым является МП:

$$\mathrm{AS}\triangleq\bigcap_{\epsilon\in]0,\infty[}\mathrm{cl}(\mathbb{G}_\epsilon,\tau_n), \tag{6.8}$$

где τ_n — топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$. Для представления (6.8) как МП введем семейство
$$\mathfrak{F} \triangleq \{\mathbf{F}_\epsilon \colon \varepsilon \in]0,\infty[\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{F})),$$
которое является направленным в следующем смысле:
$$\forall F_1 \in \mathfrak{F}\ \forall F_2 \in \mathfrak{F}\ \exists F_3 \in \mathfrak{F} \colon F_3 \subset F_1 \cap F_2$$
(используется направление, двойственное к вложению). Кроме того, отметим свойство, используемое в [11, (3.3.17)], а именно, у нас
$$\exists (F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}\ \forall F \in \mathfrak{F}\ \exists k \in \mathbb{N} F_k \subset F. \tag{6.9}$$
При этом, конечно, $(\mathbb{R}^n, \tau_n)$ есть метризуемое пространство и, в частности, удовлетворяет первой аксиоме счетности. Тогда искомое представление (6.8) как МП можно извлечь из [11, (3.3.1)]. Для этого, кроме того, введем (целевое) отображение
$$\mathbf{h} \triangleq (\mathbf{x}_f(\vartheta_0))_{f\in\mathbf{F}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbf{F}}. \tag{6.10}$$
Тогда $\mathbb{G}_\epsilon = \mathbf{h}^1(\mathbf{F}_\epsilon)$ при $\epsilon \in]0,\infty[$. С учетом этого (см. (6.8)) в виде
$$\mathrm{AS} = \cap_{\epsilon\in]0,\infty[}\mathrm{cl}(\mathbb{G}_\epsilon, \tau_n) = \cap_{\epsilon\in]0,\infty[}\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{F}_\epsilon), \tau_n) = \cap_{F\in\mathfrak{F}}\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(F), \tau_n)$$
имеем МП, для которого, согласно (6.9) и [11, с. 38], имеет место представление
$$\begin{gathered}\mathrm{AS} = \{y \in \mathbb{R}^n | \exists (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}} \colon (\forall F \in \mathfrak{F}\ \exists m \in \mathbb{N} \colon f_k \in F \quad \forall k \in \overrightarrow{m,\infty}) \ \& \\ \& \ ((||\mathbf{h}(f_i) - y||)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0)\} = \{y \in \mathbb{R}^n |\ \exists (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}} \colon (\forall \epsilon \in]0,\infty[\ \exists m \in \mathbb{N} \colon \\ f_k \in \mathbf{F}_\epsilon \quad \forall k \in \overrightarrow{m,\infty})\&((||\mathbf{x}_{f_i}(\vartheta_0) - y||)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0)\}.\end{gathered} \tag{6.11}$$
Для построения МП (6.11) ниже используется схема [20], включающая в качестве основного элемента компактификатор задачи.

§ 7. Компактификатор в классе конечно-аддитивных мер и построение множества притяжения

Напомним, что посредством (5.11) определено правило погружения множества $\mathbf{F}$ в компакт. В самом деле, с учетом замечания 1 и [10, теорема 4.3.3] получаем цепочку равенств (5.12), где $\widetilde{\mathbf{F}} = \mathbf{m}^1(\mathbf{F})$. С учетом (5.12) логично ввести обобщенные траектории, а также траектории нашей системы (1.1), порожденные к.-а. управлениями-мерами из компакта (5.13). Данные к.-а. меры рассматриваем в качестве обобщенных управлений (ОУ). Впрочем, упомянутые обобщенные траектории можно ввести и для произвольных к.-а. мер из $\mathbf{A}(\mathcal{J})$; если $\mu \in \mathbf{A}(\mathcal{J})$, то
$$\widetilde{\mathbf{x}}_\mu \colon I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{7.1}$$
определяется следующим образом:
$$\widetilde{\mathbf{x}}_\mu(t) \triangleq \Phi(t) + \int_{[t_0,t[} F(t,s)b(s)\,\mu(ds) \quad \forall t \in I_0, \tag{7.2}$$
где интеграл по μ определяется покомпонентно, подобно (5.7). В частности, в (7.2) можно использовать меру $\mathbf{m}(f) = f * \lambda$ (см. (5.11)), где $f \in \mathbf{F}$. Легко видеть, что
$$\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}(f)} = \widetilde{\mathbf{x}}_{f*\lambda} = \mathbf{x}_f \quad \forall f \in \mathbf{F}. \tag{7.3}$$

Заметим, что в основной задаче нам требуются лишь значения $\widetilde{\mathbf{x}}_\mu(\vartheta_0)$, $\mu \in \mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c})$. Однако рассмотрение соотношений, связывающих обычные (см. (5.9)) и обобщенные траектории (7.1) представляет самостоятельный интерес, и мы этого вопроса также коснемся, определяя в виде $\otimes^{I_0}(\tau_n)$ топологию тихоновской степени $(\mathbb{R}^n, \tau_n)$ при использовании I_0 в качестве индексного множества; иными словами, $\otimes^{I_0}(\tau_n)$ есть топология поточечной сходимости множества $(\mathbb{R}^n)^{I_0}$ всех n-вектор-функций на I_0.

Предложение 4. *Отображение*

$$\mu \mapsto \widetilde{\mathbf{x}}_\mu \colon \mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^{I_0} \tag{7.4}$$

непрерывно в смысле топологий $\widetilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J})$ и $\otimes^{I_0}(\tau_n)$.

Доказательство. Воспользуемся свойством [21, предложение 1.6.6]. Пусть $(D, \preceq\, , l)$ есть направленность [21, 1.6] в шаре $\mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c})$ ($(D, \preceq)$ — непустое направленное [21, 1.3] множество, $l \in \mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c})^D$), $\mu_* \in \mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c})$ и при этом $(D, \preceq, l)$ сходится к μ_* в топологии $\tilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{L})$. Заметим, что при $d_1 \in D$ и $d_2 \in D$ выражение $d_1 \preceq d_2$ эквивалентно включению $(d_1, d_2) \in \preceq$ (напомним, что $\preceq$ есть непустое отношение: $\preceq \subset D \times D$). В обозначениях, связанных с направленностями, мы следуем [9, раздел 2.2]; тогда для всякого непустого множества X и отображения $g \in X^D$ в виде $(D, \preceq, g)$ имеем направленность в X. Если при этом τ есть топология на X и $x^0 \in X$, то

$$((D, \preceq, g) \xrightarrow{\tau} x^0) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall S \in N_\tau(x^0)\ \exists d_S \in D\ \forall d \in D\ (d_S \preceq d) \Rightarrow (g(d) \in S)). \tag{7.5}$$

В частности (см. (7.5)), имеет место свойство $(D, \preceq, l) \xrightarrow{\tilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J})} \mu_*$. Заметим, что $(D, \preceq, l)$ есть направленность в $\mathbf{A}(\mathcal{J})$, $\mu_* \in \mathbf{A}(\mathcal{J})$, и при этом

$$(D, \preceq, l) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{J})} \mu_*. \tag{7.6}$$

В свою очередь, из (7.6) и [9, (4.6.16)] следует, что при $g \in B(I, \mathcal{J})$

$$\Big(D, \preceq, (\int_I g\, dl(S))_{S \in D}\Big) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} \int_I g\, d\mu_*. \tag{7.7}$$

Из (7.7) вытекает, что при $g \in B(I, \mathcal{J})$ и $t \in I_0$

$$\Big(D, \preceq, (\int_{[t_0, t[} g\, dl(S))_{S \in D}\Big) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} \int_{[t_0, t[} g\, d\mu_*; \tag{7.8}$$

используем представление [14, (3.7.3)]. Тогда (см. (7.8) и естественное покомпонентное определение интеграла ярусной вектор-функции) получаем, что при $t \in I_0$

$$\Big(D, \preceq, (\int_{[t_0, t[} F(t,s) b(s) l(\mathcal{S})\, (ds))_{\mathcal{S} \in D}\Big) \xrightarrow{\tau_n} \int_{[t_0, t[} F(t,s) b(s)\, \mu_*(ds). \tag{7.9}$$

В силу (7.2) и (7.9) получаем

$$\Big(D, \preceq, (\tilde{\mathbf{x}}_{l(S)}(t))_{S \in D}\Big) \xrightarrow{\tau_n} \tilde{\mathbf{x}}_{\mu_*}(t) \quad \forall t \in I_0. \tag{7.10}$$

Как следствие, получаем из (7.10) сходимость

$$\Big(D, \preceq, (\tilde{\mathbf{x}}_{l(S)})_{S \in D}\Big) \xrightarrow{\otimes^{I_0}(\tau_n)} \tilde{\mathbf{x}}_{\mu_*}, \tag{7.11}$$

используем здесь [21, (2.3.34)] (см. также [11, раздел 3.3]). Итак (см. (7.11)), установлена импликация

$$\big((D, \preceq, l) \overset{\tilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J})}{\longrightarrow} \mu_*\big) \Rightarrow \big((D, \preceq, (\tilde{\mathbf{x}}_{l(S)})_{S \in D}\big) \overset{\otimes^{I_0}(\tau_n)}{\longrightarrow} \tilde{\mathbf{x}}_{\mu_*}\big). \tag{7.12}$$

Поскольку выбор направленности $(D, \preceq, l)$ и к.-а. меры μ_* был произвольным, из (7.12) следует [21, раздел 1.6] (см. также [9, (2.5.4)]) требуемое свойство непрерывности отображения (7.4). □

Полагаем в дальнейшем, что

$$\mathbf{g} \triangleq (\tilde{\mathbf{x}}_\mu(\vartheta_0))_{\mu \in \mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c})}; \tag{7.13}$$

из предложения 4 следует, что $\mathbf{g}$ есть непрерывное в смысле ТП (5.13) и $(\mathbb{R}^n, \tau_n)$ отображение;

$$\mathbf{g} \colon \mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c}) \longrightarrow \mathbb{R}^n. \tag{7.14}$$

При этом $\mathbf{F}$ есть непустое множество обычных управлений, $(\mathbb{R}^n, \tau_n)$ есть пространство, в котором определяются элементы притяжения, а $\mathbf{h}$ — целевое отображение из $\mathbf{F}$ в $\mathbf{R}^n$. Кортеж $(\mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c}), \tilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J}), \mathbf{m}, \mathbf{g})$ является компактификатором в смысле [20]: $\mathbf{m}$ погружает $\mathbf{F}$ в $\mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c})$, $\mathbf{g}$ (7.14) — непрерывное отображение со свойством $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{m}$ (см. (7.3), (7.13)), а (5.13) — компакт. В этом случае для множества

$$\mathbf{as} \triangleq \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(F), \tilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J})) = \bigcap_{\epsilon \in]0, \infty[} \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}_\epsilon), \tilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J})) \in \mathcal{P}(\mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c})) \tag{7.15}$$

реализуется [20, (4.4)] следующее равенство:

$$AS = \mathbf{g}^1(\mathbf{as}). \tag{7.16}$$

Предложение 5. *Множество* $\mathbf{as}$ (7.15) *определяется выражением*

$$\mathbf{as} = \{\mu \in \mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c}) | \tilde{\mathbf{x}}_\mu(\mathbf{t}_j) \in M_j \quad \forall j \in \overline{1, r}\}. \tag{7.17}$$

Доказательство. Через Ω обозначим множество в правой части (7.17). Требуется установить равенство $\mathbf{as} = \Omega$. Пусть $\mu_* \in \mathbf{as}$, т. е. $\mu_* \in \mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c})$ (см. (7.15)) и $\mu_* \in \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}_\epsilon), \tilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J})) \quad \forall \epsilon \in]0, \infty[$. Введем при $j \in \overline{1, r}$ в рассмотрение вектор-функционал $\mathbf{l}_j$ вида

$$\mu \mapsto \tilde{\mathbf{x}}_\mu(\mathbf{t}_j) \colon \mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c}) \longrightarrow \mathbb{R}^n. \tag{7.18}$$

Согласно предложению 4 каждый из данных вектор-функционалов непрерывен в смысле $\tilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J})$ и τ_n, а потому [21, 1.4.1] при $j \in \overline{1, r}$ и $\epsilon \in]0, \infty[$

$$(\mathbf{l}_j)^1(\mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}_\epsilon), \tilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J}))) \subset \mathrm{cl}((\mathbf{l}_j)^1(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}_\epsilon)), \tilde{\tau}_n),$$

откуда вытекает свойство $\mathbf{l}_j(\mu_*) \in \mathrm{cl}((\mathbf{l}_j)^1(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}_\epsilon)), \tilde{\tau}_n)$; тогда $\mathbf{l}_j(\mu_*) \in \mathrm{cl}(M_j^{(\epsilon)}, \tau_n)$ и, следовательно, $\rho(\mathbf{l}_j(\mu_*), M_j) \leqslant \epsilon$, где $\rho(x, M_j) \triangleq \inf(\{||x - y|| \colon y \in M_j\}) \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $\epsilon \in]0, \infty[$ может выбираться произвольно, получаем, что $\rho(\mathbf{l}_j(\mu_*), M_j) = 0$ и, в силу замкнутости M_j, $\tilde{\mathbf{x}}_\mu(\mathbf{t}_j) \in M_j \quad \forall j \in \overline{1, r}$. Поэтому $\mu_* \in \Omega$, чем и завершается проверка вложения

$$\mathbf{as} \subset \Omega. \tag{7.19}$$

Пусть $\mu^* \in \Omega$. Тогда имеем, что $\mu^* \in \mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c})$ и при этом

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\mu^*}(\mathbf{t}_j) \in M_j \quad \forall j \in \overline{1, r}. \tag{7.20}$$

В силу (5.12) имеем, что $\mu^* \in \mathrm{cl}(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J}))$, и для некоторой направленности $(\mathbf{D}, \sqsubseteq, \gamma)$ в множестве $\mathbf{F}$ имеет место сходимость

$$(\mathbf{D}, \sqsubseteq, \mathbf{m} \circ \gamma) \xrightarrow{\tilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J})} \mu^*, \tag{7.21}$$

где (здесь и ниже) символика соответствует используемой в доказательстве предложения 4. Здесь $(\mathbf{D}, \sqsubseteq)$ есть непустое направленное множество и $\gamma \in \mathbf{F}^{\mathbf{D}}$. Сохраняем для $\mathbf{l}_j, j \in \overline{1,r}$, представление (7.18), получая с учетом предложения 4 свойства

$$(\mathbf{D}, \sqsubseteq, \mathbf{l}_j \circ \mathbf{m} \circ \gamma) \xrightarrow{\tau_n} \mathbf{l}_j(\mu^*) \quad \forall j \in \overline{1,r}. \tag{7.22}$$

Из (7.20) и (7.22) легко следует, что $\forall \epsilon' \in]0, \infty[\ \exists \delta' \in \mathbf{D}\ \forall \delta \in \mathbf{D}\ (\delta' \sqsubseteq \delta) \Rightarrow (\gamma(\delta) \in \in \mathbf{F}_{\epsilon'})$. Пусть $\epsilon_0 \in]0, \infty[$, а $\delta_0 \in \mathbf{D}$ таково, что $\forall \delta \in \mathbf{D}\ (\delta_0 \sqsubseteq \delta) \Rightarrow (\gamma(\delta) \in \mathbf{F}_{\epsilon_0})$. Полагая $\mathbf{D}_0 \triangleq \{\delta \in \mathbf{D} | \delta_0 \sqsubseteq \delta\}$, получаем (в виде $\mathbf{D}_0$) конфинальное в $(\mathbf{D}, \sqsubseteq)$ п/м $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}_0 \neq \varnothing$, и в виде $\preceq \triangleq \sqsubseteq \cap (\mathbf{D}_0 \times \mathbf{D}_0)$ направление на $\mathbf{D}_0$, для которого $(\delta_1 \preceq \delta_2) \Leftrightarrow (\delta_1 \sqsubseteq \delta_2)$ при $\delta_1 \in \mathbf{D}_0$ и $\delta_2 \in \mathbf{D}_0$. В виде $\bar{\gamma} \triangleq (\gamma | \mathbf{D}_0) \in \mathbf{F}^{\mathbf{D}_0}$ имеем сужение γ на $\mathbf{D}_0$, а в виде $(\mathbf{D}_0, \preceq, \bar{\gamma})$ получаем направленность в $\mathbf{F}_{\epsilon_0}$, для которой (см. (7.21)) $(\mathbf{D}_0, \preceq, \mathbf{m} \circ \bar{\gamma}) \xrightarrow{\tilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J})} \mu^*$. Последнее означает, что $\mu^* \in \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}_{\epsilon_0}), \tilde{\tau}^*_{\mathbf{c}}(\mathcal{J}))$. Поскольку выбор ϵ_0 был произвольным, имеем из (7.15) свойство $\mu^* \in \mathbf{as}$, чем и завершается проверка вложения $\Omega \subset \mathbf{as}$. С учетом (7.19) получаем требуемое свойство (7.17). $\square$

Из (7.16) и предложения 5 вытекает, что

$$AS = \mathbf{g}^1(\mathbf{as}) = \{\tilde{\mathbf{x}}_\mu(\vartheta_0) \colon \mu \in \mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c}), \tilde{\mathbf{x}}_\mu(\mathbf{t}_j) \in M_j \quad \forall j \in \overline{1,r}\}. \tag{7.23}$$

Содержательный смысл (7.23) состоит в следующем: искомое МП (6.11) является «обычной» областью достижимости системы в классе ОУ, определяемых в виде знакопеременных к.-а. мер на полуалгебре $\mathcal{J}$ пространства-стрелки с «единицей» I. При этом в классе ОУ постулируется точное соблюдение промежуточных условий.

В связи с реализацией точек МП (6.11) полезно отметить одну вспомогательную конструкцию. Речь идет об использовании в качестве аналогов приближенных решений Дж. Варги специального типа направленностей. А именно, учитывая представление (7.16), мы для каждого ОУ применяем схему [11, раздел 6.2] построения направленности посредством конструктивной процедуры. Следует отметить, что согласно (6.11) все точки AS допускают секвенциальную реализацию, т. е., по сути дела, реализацию в классе приближенных решений Дж. Варги. Однако конкретное построение нужных последовательностей в $\mathbf{F}$ представляет серьезные затруднения. В то же время если иметь в виду использование ОУ из $\mathbf{as}$, то в классе направленностей можно указать вариант реализации упомянутых ОУ конструктивно (см. [11, разделы 3.6, 6.2]).

Итак, пусть $\mu_0 \in \mathbf{as}$. Тогда, в частности, $\mu_0 \in \mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c})$. При этом, конечно, $\mu_0 \in \mathbf{A}(\mathcal{J})$, а тогда $\mu_0(\varnothing) = 0$. Мы используем (5.6), что соответствует [9, (4.9.4)] (иными словами, к.-а. мера μ_0 очевидным образом слабо абсолютно непрерывна относительно λ). Следуя построениям [11, раздел 6.2], мы полагаем далее, что $\mathbf{D}$ соответствует [11, (3.6.10)] при $E = I$ и $\mathcal{L} = \mathcal{J}$; итак, в дальнейшем $\mathbf{D}$ есть непустое семейство всех неупорядоченных конечных разбиений I множествами из $\mathcal{J}$.

Теперь, как и в [11, раздел 6.2], мы сопоставляем каждому $\mathcal{K} \in \mathbf{D}$ ступенчатую функцию $\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] \in B_0(I, \mathcal{J})$, применяя следующую конкретизацию параметров в [11]: $E = I$, $\mathcal{L} = \mathcal{J}$, $\mu = \mu_0$; см. также [9, (4.9.7), (4.9.8)]. Тогда с учетом (5.8) и представлений [11, с. 244] имеем, что в рассматриваемом случае

$$\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] \in \mathbf{F} \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}.$$

Обозначаем через $\Theta_{\mu_0}[\cdot]$ отображение $\mathcal{K} \mapsto \Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]\colon \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{F}$. Введем в рассмотрение направление $\prec$ на семействе $\mathbf{D}$, следуя обозначению в [11, с. 48] (см. также [9, (4.8.2)]). Итак, в виде $(\mathbf{D}, \prec, \Theta_{\mu_0}[\cdot])$ имеем направленность в $\mathbf{F}$ (в части обозначений, применяемых в случае направленностей, мы следуем соглашениям, принятым в доказательстве предложения 5). Мы рассматриваем направленность $(\mathbf{D}, \prec, \Theta_{\mu_0}[\cdot])$ в качестве аналога (секвенциального) приближенного решения Дж. Варги. Посредством (5.2) данная направленность погружается в $\mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c})$: полагаем

$$\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \lambda \triangleq (\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] * \lambda)_{\mathcal{K} \in \mathbf{D}},$$

мы в виде $(\mathbf{D}, \prec, \Theta_{\mu_0}[\cdot] * \lambda)$ получаем направленность в $\mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c})$. При этом [11, (6.2.10)]

$$(\mathbf{D}, \prec, \Theta_{\mu_0}[\cdot] * \lambda) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{J})} \mu_0 \tag{7.24}$$

(см. также [11, с. 44]). С другой стороны, $\mathbf{h} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot]$ есть (см. (6.10)) отображение

$$\mathcal{K} \mapsto \mathbf{x}_{\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]}(\vartheta_0)\colon \mathbf{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n;$$

$(\mathbf{D}, \prec, \mathbf{h} \circ \Theta_{\mu_0})$ есть направленность в $\mathbb{R}^n$ (направленность терминальных состояний). Кроме того, при $j \in \overline{1, r}$ через $\mathbf{h}_j$ обозначаем отображение $f \mapsto \mathbf{x}_f(\mathbf{t}_j)\colon \mathbf{F} \longrightarrow \mathbb{R}^n$; тогда $\mathbf{h}_j \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot]$ есть отображение

$$\mathcal{K} \mapsto \mathbf{x}_{\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]}(\mathbf{t}_j)\colon \mathbf{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

а $(\mathbf{D}, \prec, \mathbf{h}_j \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot])$ есть направленность в $\mathbb{R}^n$. Согласно (7.13) и (7.16) имеем по выбору μ_0, что

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\mu_0}(\vartheta_0) = \mathbf{g}(\mu_0) \in AS.$$

Предложение 6. *Направленность* $(\mathbf{D}, \prec, \Theta_{\mu_0}[\cdot])$ *обладает следующими свойствами*

$$\begin{gathered} ((\mathbf{D}, \prec, \mathbf{h} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot]) \xrightarrow{\tau_n} \tilde{\mathbf{x}}_{\mu_0}(\vartheta_0)) \;\& \\ \& \; (\forall \varepsilon \in]0, \infty[\; \exists \mathcal{K}_\varepsilon \in \mathbf{D}\, \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D} \quad (\mathcal{K}_\varepsilon \prec \mathcal{K}) \Rightarrow (\mathbf{x}_{\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]}(\mathbf{t}_j) \in M_j^{(\varepsilon)} \quad \forall j \in \overline{1, r})). \end{gathered} \tag{7.25}$$

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение в (7.25). Отметим прежде всего, что

$$\mathbf{h} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot] = \mathbf{g} \circ (\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \lambda). \tag{7.26}$$

В самом деле, при $\mathcal{K} \in \mathbf{D}$

$$\begin{gathered} (\mathbf{h} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot])(\mathcal{K}) = \mathbf{h}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]) = \mathbf{x}_{\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]}(\vartheta_0) = (\mathbf{g} \circ \mathbf{m})(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]) = \mathbf{g}(\mathbf{m}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}])) = \\ = \mathbf{g}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] * \lambda) = \mathbf{g}((\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \lambda)(\mathcal{K})) = (\mathbf{g} \circ (\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \lambda))(\mathcal{K}). \end{gathered}$$

Коль скоро выбор $\mathcal{K}$ был произвольным, (7.26) установлено. Поскольку $\mathbf{g}$ — непрерывное отображение (см. § 7) имеем из (7.24) и (7.26) сходимость

$$(\mathbf{D}, \prec, \mathbf{h} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot]) \xrightarrow{\tau_n} \mathbf{g}(\mu_0). \tag{7.27}$$

Из (7.13) и (7.27) получаем первое положение в (7.25):

$$(\mathbf{D}, \prec, \mathbf{h} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot]) \xrightarrow{\tau_n} \tilde{\mathbf{x}}_{\mu_0}(\vartheta_0). \tag{7.28}$$

Проверим второе положение. Будем при этом использовать при $j \in \overline{1, r}$ обозначение $\mathbf{l}_j$ из доказательства предложения 5 (см. (7.18)), т. е. $\mathbf{l}_j(\mu) = \tilde{\mathbf{x}}_\mu(\mathbf{t}_j)$ при $\mu \in \mathbf{B}(\mathcal{J}, \mathbf{c})$, которое непрерывно в смысле ТП (5.13) и $(\mathbb{R}^n, \tau_n)$. С учетом (7.24) получаем, фиксируя $j \in \overline{1, r}$, что

$$(\mathbf{D}, \prec, \mathbf{l}_j \circ (\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \lambda)) \xrightarrow{\tau_n} \mathbf{l}_j(\mu_0). \tag{7.29}$$

С учетом определения $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_r$ получаем из (7.29) сходимость

$$(\mathbf{D}, \prec, \mathbf{l}_j \circ (\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \lambda)) \xrightarrow{\tau_n} \tilde{\mathbf{x}}_{\mu_0}(\mathbf{t}_j). \tag{7.30}$$

По выбору μ_0 имеем из (7.23), что

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\mu_0}(\mathbf{t}_j) \in M_j. \tag{7.31}$$

С другой стороны, при $\mathcal{K} \in \mathbf{D}$

$$(\mathbf{l}_j \circ (\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \lambda))(\mathcal{K}) = \mathbf{l}_j((\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \lambda)(\mathcal{K})) = \mathbf{l}_j(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] * \lambda) = \tilde{\mathbf{x}}_{\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]*\lambda}(\mathbf{t}_j) = \mathbf{x}_{\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]}(\mathbf{t}_j). \tag{7.32}$$

С учетом (7.30) и (7.32) получаем, что при $j \in \overline{1, r}$

$$(\mathbf{D}, \prec, (\mathbf{x}_{\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]}(\mathbf{t}_j))_{\mathcal{K} \in \mathbf{D}}) \xrightarrow{\tau_n} \tilde{\mathbf{x}}_{\mu_0}(\mathbf{t}_j). \tag{7.33}$$

Из (7.33) с учетом простейших свойств направленных множеств вытекает, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$ $\exists \mathcal{K}_\varepsilon \in \mathbf{D}\, \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}$

$$(\mathcal{K}_\varepsilon \prec \mathcal{K}) \Rightarrow (||\mathbf{x}_{\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]}(\mathbf{t}_j) - \tilde{\mathbf{x}}_{\mu_0}(\mathbf{t}_j)|| < \varepsilon \quad \forall j \in \overline{1, r}). \tag{7.34}$$

Из (6.4), (7.31) и (7.34) получаем теперь второе положение в (7.25), т. е.

$$\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists \mathcal{K}_\varepsilon \in \mathbf{D}\ \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}\ (\mathcal{K}_\varepsilon \prec \mathcal{K}) \Rightarrow (\mathbf{x}_{\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]}(\mathbf{t}_j) \in M_j^{(\varepsilon)} \quad \forall j \in \overline{1, r}). \tag{7.35}$$

Из (7.28), (7.35) вытекает (7.25), что и требовалось доказать. □

В связи с предложением 6 отметим одну полезную возможность реализации всего МП (6.11) в классе конструктивно определяемых, хотя и несеквенциальных, приближенных решений-направленностей. Будем использовать то обстоятельство, что согласно (7.16) основное МП исчерпывается (см. (7.13)) точками $\tilde{\mathbf{x}}_\mu(\vartheta_0)$, $\mu \in \mathbf{as}$, где $\mathbf{as}$ есть множество допустимых ОУ. Итак, будем рассматривать сейчас только направленности вида $(\mathbf{D}, \prec, \mathbf{h} \circ \rho)$, где $\rho \in \mathbf{F}^{\mathbf{D}}$. В этом случае несеквенциальным аналогом решения Дж. Варги [8] логично полагать само отображение ρ вышеупомянутого типа. Это приводит к тому, что

$$\mathfrak{T} \triangleq \{\Theta_\mu[\cdot] \colon \mu \in \mathbf{as}\} \tag{7.36}$$

может рассматриваться в качестве множества несеквенциальных приближенных решений: каждое $\rho \in \mathfrak{T}$ «работает» как направленность $(\mathbf{D}, \prec, \mathbf{h} \circ \rho)$ при реализации терминального состояния системы. Поскольку $\mu_0 \in \mathbf{as}$ выбиралось произвольно, то согласно предложению 6 при любом $\mu \in \mathbf{as}$ вектор $\tilde{\mathbf{x}}_\mu(\vartheta_0) = \mathbf{g}(\mu) \in \mathbb{R}^n$ есть обобщенный предел направленности $(\mathbf{D}, \prec, \mathbf{h} \circ \Theta_\mu[\cdot])$, где $\Theta_\mu[\cdot]$ определяется (по аналогии с $\Theta_{\mu_0}[\cdot]$) в [11, с. 244]). С учетом (7.36) данный предел определяется для $\rho \in \mathfrak{T}$ единственным образом (предел сходящейся направленности в T_2 — пространстве),

$$\mathrm{Lim}_{\mathcal{K} \in \mathbf{D}}(\mathbf{h} \circ \rho)(\mathcal{K}) \in \mathbb{R}^n,$$

причем согласно предложению 6

$$\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists \mathcal{K}_\varepsilon \in \mathbf{D} \colon \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D} \quad (\mathcal{K}_\varepsilon \prec \mathcal{K}) \Rightarrow (\mathbf{x}_{\rho(\mathcal{K})}(\mathbf{t}_j) \in M_j^{(\varepsilon)} \quad \forall j \in \overline{1, r}); \tag{7.37}$$

в силу предложения 6 и (7.36) имеем при этом, что

$$\mathrm{Lim}_{\mathcal{K} \in \mathbf{D}}(\mathbf{h} \circ \rho)(\mathcal{K}) \in AS. \tag{7.38}$$

Более того, в силу (7.23) AS исчерпывается элементами (7.38):

$$AS = \{\mathrm{Lim}_{\mathcal{K}\in\mathbf{D}}(\mathbf{h}\circ\rho)(\mathcal{K})\colon \rho\in\mathfrak{T}\} = \{\mathrm{Lim}_{\mathcal{K}\in\mathbf{D}}(\mathbf{h}\circ\Theta_\mu[\cdot])(\mathcal{K})\colon \mu\in\mathbf{as}\},$$

причем для каждого $\rho\in\mathfrak{T}$ выполнено (7.37), или, что то же самое,

$$\forall\mu\in\mathbf{as}\ \forall\varepsilon\in]0,\infty[\ \exists\mathcal{K}_\varepsilon\in\mathbf{D}\ \forall\mathcal{K}\in\mathbf{D}$$
$$(\mathcal{K}_\varepsilon\prec\mathcal{K})\Rightarrow(\mathbf{x}_{\Theta_\mu[\mathcal{K}]}(\mathbf{t}_j)\in M_j^{(\varepsilon)}\quad\forall j\in\overline{1,r}).$$

Иными словами, $\mathfrak{T}$ (7.36) (или **as**) доставляет конкретный способ реализации всего МП AS в классе определяемых конструктивно несеквенциальных приближенных решений. В (6.11) мы имеем принципиальную возможность секвенциальной реализации данного МП, но конкретный вариант приближенных решений-последовательностей, реализующих точки AS в режиме соблюдения ОАХ, указать затруднительно.

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00371.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во БГУ, 1973.
3. Kolmanovskii V., Myshkis A. Applied theory of functional differential equations. Kluwer Academic Publishers, 1992. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8084-7
4. Zavalishchin S. T., Sesekin A. N. Dynamic impulse systems: Theory and applications. Kluwer Academic Publishers, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8893-5
5. Miller B. M., Rubinovich E. Ya. Discontinuous solutions in the optimal control problems and their representation by singular space-time transformations // Automation and Remote Control. 2013. Vol. 74. Issue 12. P. 1969–2006. https://doi.org/10.1134/S0005117913120047
6. Миллер Б. М., Рубинович Е. Я. Оптимизация динамических систем с импульсным управлением и ударными воздействиями. М.: URSS, 2019.
7. Koreshnikova M. A., Sesekin A. N. Minimizing of weighted functional on trajectories of a linear system with delay integrally bounded impulse control // AIP Conference Proceedings. 2014. Vol. 1631. Issue 1. P. 181–187. https://doi.org/10.1063/1.4902475
8. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
9. Chentsov A. G., Morina S. I. Extensions and relaxations. Kluwer Academic Publishers, 2002. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1527-0
10. Chentsov A. G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. Plenum Publishing Corporation, 1996. https://www.springer.com/gp/book/9780306110382
11. Chentsov A. G. Asymptotic attainability. Kluwer Academic Publishers, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0805-0
12. Ченцов А. Г. Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 298–314. http://mi.mathnet.ru/timm888
13. Ченцов А. Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142. https://doi.org/10.20537/vm110112
14. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры. I. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008.
15. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
16. Christensen J. P. R. Finitely additive measure defined on sigma-field is automatically countably additive // Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena. 2001. Vol. 49. No. 2. P. 509–511. https://zbmath.org/02216915

17. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры. II. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2010.
18. Ченцов А. Г. Об одном представлении результатов действия приближенных решений в задаче с ограничениями асимптотического характера // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 225–239. http://mi.mathnet.ru/timm709
19. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
20. Ченцов А. Г. Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 294–309. http://mi.mathnet.ru/timm1282
21. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1981.

Поступила в редакцию 11.01.2021

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., профессор, член-корр. РАН, главный научный сотрудник, отдел управляемых систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6568-0703
E-mail: agchentsov@mail.ru

Сесекин Александр Николаевич, д. ф.-м. н., профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19;
ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1339-9044
E-mail: a.n.sesekin@urfu.ru

Цитирование: А. Г. Ченцов, А. Н. Сесекин. Релаксация задачи о достижимости для линейной управляемой системы нейтрального типа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 70–88.

A. G. Chentsov, A. N. Sesekin

Relaxation of the attainability problem for a linear control system of neutral type

Keywords: linear systems with time delay of neutral type, attraction sets, finitely additive measures.

MSC2020: 34A37, 34K06

DOI: 10.35634/vm210106

The problem of control of a linear system of neutral type with impulse constraints is developed. In addition, a given system of intermediate conditions is assumed. A setting is investigated in which a vanishingly small relaxation of the mentioned restrictions is allowed. In this regard, the attainability domain (AD) at a fixed time of the end of the process is replaced by a natural asymptotic analog, the attraction set (AS). To construct the latter, we use the construction of an extension in the class of finitely additive (f.-a.) measures used as generalized controls. It is shown that the AS coincides with the AD of the system in the class of generalized controls — f.-a. measures. The structure of the mentioned AS is investigated.

Funding. The study was funded by RFBR, projects number 19-01-00371.

REFERENCES

1. Bellman R., Cooke K. L. *Differential-difference equations*, Academic Press, 1963.
2. Gabasov R. F., Kirillova F. M. *Optimizatsiya lineinykh sistem* (Optimization of linear systems), Minsk: Belarusian State University, 1973.
3. Kolmanovskii V., Myshkis A. *Applied theory of functional differential equations*, Kluwer Academic Publishers, 1992. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8084-7
4. Zavalishchin S. T., Sesekin A. N. *Dynamic impulse systems: Theory and applications*, Kluwer Academic Publishers, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8893-5
5. Miller B. M., Rubinovich E. Ya. Discontinuous solutions in the optimal control problems and their representation by singular space-time transformations, *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, issue 12, pp. 1969–2006. https://doi.org/10.1134/S0005117913120047
6. Miller B. M., Rubinovich E. Ya. *Optimizatsiya dinamicheskikh sistem s impul'snymi upravleniyami i udarnymi vozdeistviyami* (Optimization of dynamic systems with impulse control and shock actions), Moscow: URSS, 2019.
7. Koreshnikova M. A., Sesekin A. N. Minimizing of weighted functional on trajectories of a linear system with delay integrally bounded impulse control, *AIP Conference Proceedings*, 2014, vol. 1631, issue 1, pp. 181–187. https://doi.org/10.1063/1.4902475
8. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, Academic Press, 1972. https://doi.org/10.1016/C2013-0-11669-8
9. Chentsov A. G., Morina S. I. *Extensions and relaxations*, Kluwer Academic Publishers, 2002. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1527-0
10. Chentsov A. G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems*, Plenum Publishing Corporation, 1996. https://www.springer.com/gp/book/9780306110382
11. Chentsov A. G. *Asymptotic attainability*, Kluwer Academic Publishers, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0805-0
12. Chentsov A. G. Tier mappings and ultrafiiter-based transformations, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 298–314 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/timm888
13. Chentsov A. G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, issue 1, pp. 113–142 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm110112
14. Chentsov A. G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, I* (The elements of finitely additive measures theory, I), Yekaterinburg: USTU-UPI, 2008.

15. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. Part I: General theory*, New York–London: Interscience, 1958.
16. Christensen J. P. R. Finitely additive measure defined on sigma-field is automatically countably additive, *Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena*, 2001, vol. 49, no. 2, pp. 509–511. https://zbmath.org/02216915
17. Chentsov A. G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, II* (The elements of finitely additive measures theory, II), Yekaterinburg: USTU-UPI, 2010.
18. Chentsov A. G. One representation of the results of action of approximate solutions in a problem with constraints of asymptotic nature, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2012, vol. 276, suppl. 1, pp. 48–62. https://doi.org/10.1134/S0081543812020046
19. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1968.
20. Chentsov A. G. Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 296, suppl. 1, pp. 102–118. https://doi.org/10.1134/S0081543817020109
21. Engelking R. *General topology*, Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1977.

Received 11.01.2021

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6568-0703
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Sesekin Aleksandr Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Mechanics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia;
Leading Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1339-9044
E-mail: a.n.sesekin@urfu.ru

Citation: A. G. Chentsov, A. N. Sesekin. Relaxation of the attainability problem for a linear control system of neutral type, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 1, pp. 70–88.