A. G. Chentsov, On certain analogues of linkedness and supercompactness, *Izv. IMI UdGU*, 2020, Volume 55, 113–134

DOI: https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-08

Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2020. Том 55. С. 113–134

УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

О НЕКОТОРЫХ АНАЛОГАХ СЦЕПЛЕННОСТИ И СУПЕРКОМПАКТНОСТИ

Рассматриваются естественные обобщения свойств сцепленности семейств и суперкомпактности топологических пространств. Исследуется усиленная сцепленность, когда постулируется непустота пересечения наперед заданного числа множеств семейства. Подобным же образом модифицируется суперкомпактность: постулируется существование открытой предбазы, для которой из любого покрытия (множествами данной предбазы) можно извлечь подпокрытие с заданным числом множеств (точнее, не большим, чем заданное число). Разумеется, среди семейств, обладающих усиленной сцепленностью, выделяются максимальные в упорядоченности по включению. При естественных и, по сути, «минимальных» условиях на первоначальную измеримую структуру среди упомянутых максимальных семейств непременно содержатся ультрафильтры. Последние образуют подпространства в смысле естественных топологий, отвечающих идейно схемам Волмэна и Стоуна. Максимальные семейства с усиленной сцепленностью в топологии волмэновского типа обладают вышеупомянутым свойством, обобщающем суперкомпактность. Тем самым реализуется некоторый аналог суперрасширения T_1-пространства. Устанавливается сравнимость «волмэновской» и «стоуновской» топологий; в итоге реализуется битопологическое пространство (БТП), подпространством которого (понимаемым в естественном смысле) оказывается множество ультрафильтров в оснащении топологиями аналогичных типов. Указывается случай, когда вышеупомянутое БТП не вырождено в том смысле, что образующие его топологии различны. В то же время в случае обычной сцепленности (а это — частный случай сцепленности усиленной) известны весьма общие классы широко понимаемых измеримых структур, для которых упомянутые БТП вырождены (ситуации, когда исходное множество, т. е. «единица», оснащено алгеброй множеств или топологией).

Ключевые слова: максимальная сцепленная система, суперкомпактность, топология, ультрафильтр.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-08

Введение

Сцепленность семейства множеств означает, что любые два множества семейства имеют непустое пересечение. Среди всех сцепленных семейств (или систем) обычно выделяют максимальные. В [1–3] на основе сцепленности введены важные понятия суперкомпактности и суперрасширения топологического пространства (ТП); см. [4, гл. VII, § 4]. Особо отметим принципиальный результат [3] о суперкомпактности метризуемых компактов. В [5] для суперрасширения ТП было указано представление в терминах битопологического пространства (БТП) (в связи с теорией и применениями БТП отметим монографию [6]). Затем в серии работ автора (см. [7–10]) конструкции, подобные суперрасширению, были распространены на весьма общий случай, когда исследуемые сцепленные семейства рассматриваются «в пределах» заданной априори π-системы множеств (π-система есть [11, с. 14]) семейство множеств, замкнутое относительно конечных пересечений) с «нулем» и «единицей». В [10] были указаны условия, при которых пространство ультрафильтров (у/ф) с топологией волмэновского типа суперкомпактно; в то же время пространство максимальных сцепленных систем (МСС) с аналогичной топологией суперкомпактно всегда (см. [8]).

В свете упомянутых положений (см. [1–10]) представляется естественным вопрос о следующем обобщении сцепленности и суперкомпактности. А именно: вместо «обычной» имеет смысл рассматривать «усиленную» сцепленность в виде требования о том, что для заданного натурального числа n любой набор множеств семейства с мощностью, не превосходящей n, обладает непустым пересечением. Соответственно, модифицируется и определение суперкомпактности (ограничимся сейчас определением в терминах открытых предбаз): n-суперкомпактным назовем ТП, обладающее предбазой, для которой из всякого (открытого) покрытия «единицы» множествами данной предбазы можно извлечь подпокрытие с мощностью, не превосходящей n. В этих построениях логично полагать, что $2 \leqslant n$, с тем, чтобы понятие, обобщающее сцепленность, было содержательным. Оказывается, что в классе максимальных n-сцепленных подсемейств «единицы» также реализуется битопологическая структура, для которой порождающие ее топологии подобны в логическом отношении «волмэновской» и «стоуновской». При этом у/ф образуют подпространство БТП максимальных n-сцепленных систем в естественном для общей топологии смысле: «волмэновская» и «стоуновская» топологии на множестве у/ф индуцируются аналогичными топологиями на множестве максимальных n-сцепленных систем. Наряду с упомянутыми общими топологическими конструкциями исследуются соотношения, связывающие у/ф и максимальные n-сцепленные системы, включая возможность их отождествления (в связи с исследованиями пространств у/ф отметим работы [12–14]).

§ 1. Общие обозначения и определения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); $\triangleq$ — равенство по определению, $\varnothing$ — пустое множество. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора.

Упорядоченные и неупорядоченные пары, булеаны. Для любых двух объектов x и y через $\{x; y\}$ обозначаем (см. [15, с. 16]) множество, содержащее в виде своих элементов x, y и не содержащее никаких других элементов. Для произвольного объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ имеем синглетон (одноэлементное множество), содержащий z. Для любых двух объектов g и h, следуя [15, с. 67], полагаем, что $(g, h) \triangleq \{\{g\}; \{g; h\}\}$, получая упорядоченную пару (УП) с первым элементом g и вторым элементом h. Если же z есть какая-либо УП, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем ее первый и второй элементы соответственно; $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$. Для любых трех объектов α, β и γ полагаем, как обычно, что $\{\alpha; \beta; \gamma\} = \{\alpha; \beta\} \cup \{\gamma\}$, получаем упорядоченный триплет с первым элементом α, вторым элементом β и третьим элементом γ.

Для каждого множества H через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех п/м H (булеан H), $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$ есть семейство всех непустых п/м H, а $\mathrm{Fin}(H)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м H. В качестве H может, конечно, использоваться семейство.

Отображения. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений (функций) из A в B, следуя [15, гл. II, § 6]; разумеется, $f \in B^A$ эквивалентно тому, что $f\colon A \longrightarrow B$, а при $x \in A$ в виде $f(x) \in B$ имеем значение f в точке x. Используем индексную форму записи функций (см. [16, с. 11]). Если A и B — непустые множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ множества C, а $(f|C)$ есть сужение f на C ($(f|C) \in B^C$ и при этом $(f|C)(x) = f(x)\ \forall x \in C$).

Преобразование семейств. Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ (т. е. $\mathcal{M}$ есть непустое подсемейство $\mathcal{P}(\mathbb{M})$), то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M\colon M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$$

(семейство, двойственное к $\mathcal{M}$). Каждому непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляется след

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B\colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$$

семейства $\mathcal{A}$ на множество B. Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство, то семейства $\{\cup\}(\mathfrak{X})$, $\{\cap\}(\mathfrak{X})$, $\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{X})$ и $\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X})$ понимаются в соответствии с [10, (2.4)] (семейства всевозможных объединений и пересечений, конечных объединений и конечных пересечений множеств из $\mathfrak{X}$).

Кортежи. Как обычно, $\mathbb{R}$ есть вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ и $\overline{1,n} \triangleq$ $\triangleq \{k \in \mathbb{N}|\ k \leqslant n\}$ при $n \in \mathbb{N}$. Полагаем, что натуральные числа — элементы $\mathbb{N}$ — не являются множествами. С учетом этого для всяких множества $\mathbb{H}$ и числа $n \in \mathbb{N}$ вместо $\mathbb{H}^{\overline{1,n}}$ используем более традиционное обозначение $\mathbb{H}^n$ для множества всех кортежей $(h_i)_{i\in\overline{1,n}} \colon \overline{1,n} \longrightarrow \mathbb{H}$; каждый такой кортеж есть, строго говоря, функция из $\overline{1,n}$ в $\mathbb{H}$. В качестве $\mathbb{H}$ может, конечно, использоваться семейство; в этом случае в виде элементов $\mathbb{H}^n$ получаем кортежи множеств.

Специальные семейства. До конца настоящего раздела и в следующем разделах фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$. В виде элементов $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$ имеем непустые подсемейства $\mathcal{P}(\mathbf{I})$. Тогда элементами семейства

$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))\mid (\varnothing \in \mathcal{I})\&(\mathbf{I} \in \mathcal{I})\&(A \cap B \in \mathcal{I}\ \forall A \in \mathcal{I}\ \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{1.1}$$

являются π-системы [11, с. 14] п/м $\mathbf{I}$ с «нулем» и «единицей». В дальнейшем каждую пару $(\mathbf{I}, \mathcal{I})$, где $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$, рассматриваем как (широко понимаемое) измеримое пространство (ИП). Отметим некоторые важные для дальнейшего подсемейства (1.1); так, в частности, семейство

$$\begin{gathered}\pi^\sharp_\star[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}]|\ \forall L_1 \in \mathcal{L}\ \forall L_2 \in \mathcal{L}\ \forall L_3 \in \mathcal{L}\\ ((L_1 \cap L_2 \neq \varnothing)\&(L_2 \cap L_3 \neq \varnothing)\&(L_1 \cap L_3 \neq \varnothing)) \Longrightarrow (L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \varnothing)\}\end{gathered} \tag{1.2}$$

использовалось в [10] в связи с изучением вопроса об отождествимости у/ф и МСС. В дальнейшем будет указано обобщение (1.2), использующее, однако, усиленную в некотором естественном смысле сцепленность.

Топологии и семейства замкнутых множеств. Заметим сначала, что

$$(\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]|A \cup B \in \mathcal{I}\ \ \forall A \in \mathcal{I}\ \forall B \in \mathcal{I}\}$$

есть семейство всех решеток п/м $\mathbf{I}$ с «нулем» и «единицей». Тогда, как легко видеть,

$$(\mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in \pi[\mathbf{I}]|\ \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G \in \tau\ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\} = \{\tau \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}]|\ \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G \in \tau\ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\},$$

$$(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{F} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}]|\ \bigcap_{F\in\mathcal{F}'} F \in \mathcal{F}\ \forall \mathcal{F}' \in \mathcal{P}'(\mathcal{F})\} = \{\mathbf{C}_\mathbf{I}[\tau] \colon \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\};$$

итак, введены семейства всех (открытых) топологий и всех замкнутых топологий в смысле П. С. Александрова (см. [17, гл. 4, раздел 1]).

§ 2. Базы и предбазы топологий; суперкомпактность

В настоящем кратком разделе напомним известные понятия, связанные с построением топологий посредством баз и предбаз; напомним здесь же и определение суперкомпактности ТП (см. [1–4]). Будем различать два типа баз и предбаз: 1) базы и предбазы (открытые и замкнутые) как семейства, потенциально реализующие некоторые топологии; 2) базы и предбазы конкретного ТП.

Итак, в связи с подходом 1) используем семейства $(\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$, $(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$, $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ и $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}]$ из [10, раздел 2] (семейства открытых и замкнутых баз и предбаз; имеются в виду базы и предбазы, порождающие какую-то топологию на $\mathbf{I}$). Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то

$(\tau-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}]$, $(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau]$, $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau]$ и $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I};\tau]$ суть семейства баз и предбаз (открытых и замкнутых) конкретного ТП $(\mathbf{I},\tau)$, также определяемые в [10, раздел 2]. Следуя [10, (2.15)], введем семейство $((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ всех суперкомпактных открытых предбаз топологий на множестве $\mathbf{I}$. При $\tau\in(\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ семейство $((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau]$ понимается в смысле [10, (2.16)]:

$$((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau]=((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]\cap(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau].$$

В виде $((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\mathbf{I}]\overset{\triangle}{=}\{\tau\in(\mathrm{top})[\mathbf{I}]|((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau]\neq\varnothing\}$ имеем семейство всех топологий, превращающих $\mathbf{I}$ в суперкомпактное ТП (см. [4, гл. VII, § 4]). Суперкомпактные T_2-пространства именуются суперкомпактами (см. [18, с. 64]). Для всякого непустого семейства $\mathcal{J}$ полагаем, что $(\mathrm{Cen})[\mathcal{J}]$ есть семейство всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{J}$:

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{J}]\overset{\triangle}{=}\{\mathcal{C}\in\mathcal{P}'(\mathcal{J})|\bigcap_{C\in\mathcal{K}}C\neq\varnothing\ \ \forall\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}[\mathcal{C}]\};\tag{2.1}$$

в (2.1) может использоваться вариант $\mathcal{J}\in\pi[\mathbf{I}]$. Полагаем также, что при $\mathcal{J}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$

$$(\mathrm{COV})[\mathbf{I}|\mathcal{J}]\overset{\triangle}{=}\{\chi\in\mathcal{P}'(\mathcal{J})|\ \mathbf{I}=\bigcup_{X\in\chi}X\},\tag{2.2}$$

получая семейство всех покрытий $\mathbf{I}$ множествами из $\mathcal{J}$.

§ 3. Сцепленность

Фиксируем в дальнейшем непустое множество E; тогда $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ есть семейство всех непустых подсемейств $\mathcal{P}(E)$. Фиксируем до конца настоящего раздела произвольное семейство $\mathcal{L}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и полагаем, что

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E]\overset{\triangle}{=}\{\mathcal{E}\in\mathcal{P}'(\mathcal{L})|\ \Sigma_1\cap\Sigma_2\neq\varnothing\ \ \forall\Sigma_1\in\mathcal{E}\ \forall\Sigma_2\in\mathcal{E}\};\tag{3.1}$$

в (3.1) определено семейство всех сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\overset{\triangle}{=}\{\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E]|\ \forall\mathcal{S}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E]\ \ (\mathcal{E}\subset\mathcal{S})\Longrightarrow(\mathcal{E}=\mathcal{S})\}=\\=\{\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E]|\ \forall L\in\mathcal{L}\ \ (L\cap\Sigma\neq\varnothing\ \forall\Sigma\in\mathcal{E})\Longrightarrow(L\in\mathcal{E})\}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Элементы (3.2) суть МСС в $\mathcal{L}$. С использованием леммы Цорна проверяется, что

$$\forall\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E]\ \exists\mathcal{S}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\colon\mathcal{E}\subset\mathcal{S}.\tag{3.3}$$

Поскольку при $L\in\mathcal{L}\setminus\{\varnothing\}$ непременно $\{L\}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E]$, имеем в силу (3.3) импликацию

$$(\mathcal{L}\setminus\{\varnothing\}\neq\varnothing)\Longrightarrow(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\neq\varnothing).$$

В частности, при $\mathcal{L}\in\pi[E]$ имеем свойство $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\neq\varnothing$.

§ 4. Ультрафильтры π-систем

Всюду в настоящем разделе полагаем, что $\mathcal{L}\in\pi[E]$. Следуя [10, раздел 5], через $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ обозначаем семейство всех фильтров и всех у/ф широко понимаемого ИП $(E,\mathcal{L})$ соответственно. При этом

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})=\{\mathcal{U}\in(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]|\ \forall\tilde{\mathcal{U}}\in(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]\ \ (\mathcal{U}\subset\tilde{\mathcal{U}})\Longrightarrow(\mathcal{U}=\tilde{\mathcal{U}})\};\tag{4.1}$$

согласно (4.1) у/ф ИП $(E, \mathcal{L})$ суть максимальные центрированные подсемейства $\mathcal{L}$ и только они. Напомним, что

$$\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\colon \mathcal{F} \subset \mathcal{U} \tag{4.2}$$

(проверка (4.2) осуществляется с использованием леммы Цорна). С учетом (4.2) легко проверяется, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \varnothing$ (в самом деле, $\{E\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$). Пусть $\Phi_{\mathcal{L}}(L) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})|\ L \in \mathcal{U}\}$ $\forall L \in \mathcal{L}$. Тогда

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(L)\colon L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \tag{4.3}$$

и, в частности, $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$. Открытая база (4.3) порождает топологию стоуновского типа $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \triangleq \{\cup\}((\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$, причем

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{4.4}$$

есть нульмерное [19, § 6.2] T_2-пространство, в котором все множества из $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]$ открыто-замкнуты. Для построения топологии волмэновского типа полагаем, что

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|H] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) | \exists U \in \mathcal{U}\colon U \subset H\}\ \ \forall H \in \mathcal{P}(E). \tag{4.5}$$

С использованием множеств (4.5) определяем семейство

$$\begin{gathered}\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}] \triangleq \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|\Lambda]\colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]] \in \\ \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] \cap (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})];\end{gathered} \tag{4.6}$$

см. [8, раздел 3], [10, (3.9)]. С учетом (4.6) определяется топология волмэновского типа

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})], \tag{4.7}$$

которая превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в компактное T_1-пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle). \tag{4.8}$$

Имеем (см. [8, раздел 7]) свойство $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$; триплет

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{4.9}$$

рассматриваем как БТП; в связи с теорией и применением БТП см. [6]. В [7–9] указаны условия, достаточные для вырождения БТП (4.9) в смысле совпадения образующих его топологий, а также условия, обеспечивающие невырожденность, когда $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle \neq \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$.

§ 5. Максимальные сцепленные системы и ультрафильтры

Сохраняем предположения относительно $(E, \mathcal{L})$: $\mathcal{L} \in \pi[E]$, где E — непустое множество. Используем (3.1)–(3.3). При этом [10, (4.2)]

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]|\ A \cap B \in \mathcal{U}\ \ \forall A \in \mathcal{U}\ \forall B \in \mathcal{U}\}, \tag{5.1}$$

где $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \neq \varnothing$. Для построения БТП с «единицей» $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$ введем два типа предбаз, используя множества (см. [10, (4.3)])

$$\begin{gathered}(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] | L \in \mathcal{E}\}\ \forall L \in \mathcal{L})\& \\ \&(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_{\mathrm{op}}^0[E|H] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] | \exists \Sigma \in \mathcal{E}\colon \Sigma \subset H\}\ \forall H \in \mathcal{P}(E)).\end{gathered}$$

Введем семейства $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]$ и $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}]$ п/м $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$, понимаемые в смысле [8, (4.9)] и находящиеся в естественной двойствености; $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]\in(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$ порождает (см. [8, раздел 5]) суперкомпактную топологию

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle\triangleq\{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]))\in((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]],$$

где $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]\in((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E];\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle]$. Получили суперкомпактную открытую предбазу ТП

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E],\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle);\tag{5.2}$$

само же ТП (5.2) есть [10, разделы 4,5] суперкомпактное T_1-пространство, для которого

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle=\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}.\tag{5.3}$$

Итак, ТП (4.8) есть подпространство (5.2). Кроме того, поскольку (см. [8, раздел 6]) $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}]\in(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$, определена топология (стоуновского типа) $\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle\triangleq$ $\triangleq\{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}]))\in(\mathrm{top})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$, превращающая (см. [8, предложение 6.4]) $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ в нульмерное T_2-пространство

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E],\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle),$$

для которого ТП (4.4) является подпространством, поскольку

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]=\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}.\tag{5.4}$$

Согласно [8, предложение 7.1] $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle\subset\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$, а триплет

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E],\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle,\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle)\tag{5.5}$$

есть БТП. В силу (5.3), (5.4) логично рассматривать БТП (4.9) как подпространство (5.5). Данное толкование подпространства БТП используется ниже без дополнительных пояснений.

Отметим одно простое следствие положений [10]: если выполнено включение $\mathcal{L}\in\pi^\sharp_*[E]$, то $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})=\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$, а тогда БТП (4.9) и (5.5) совпадают, поскольку в упомянутом случае

$$(\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle=\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle)\&(\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]=\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle).\tag{5.6}$$

В [10,20,21] указано много содержательных примеров реализации свойства $\mathcal{L}\in\pi^\sharp_*[E]$. Эти примеры касаются ИП с полуалгебрами множеств. Некоторые случаи реализации первого положения в (5.6) при $\mathcal{L}\notin\pi^\sharp_*[E]$ отмечены в [10, раздел 6] (имеется в виду распространение данного положения на некоторые ИП с алгебрами множеств).

§ 6. Обобщенные варианты сцепленности

В дальнейшем рассматривается усиление свойства сцепленности, когда у соответствующего семейства множеств постулируется непустота пересечения заданного числа множеств, не обязательно двух. Сейчас отметим некоторые совсем общие положения, фиксируя семейство $\mathcal{L}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. Тогда при $m\in\mathbb{N}$ в виде

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|m]\triangleq\{\mathcal{E}\in\mathcal{P}'(\mathcal{L})|\bigcap_{i=1}^{m}\Sigma_i\neq\varnothing\ \ \forall(\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m}}\in\mathcal{E}^m\}\tag{6.1}$$

имеем семейство всех m-сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$ (будем именовать их также m-сцепленными системами). Ясно, что $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|2]=\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E]$; см. (3.1), (6.1). Легко видеть, что при $m\in\mathbb{N}$

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|m+1]\subset\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|m]. \tag{6.2}$$

Ясно также, что $(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$ есть пересечение всех семейств $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|n],\ n\in\mathbb{N}$; в силу (6.2) это означает монотонную сходимость последовательности $(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|k])_{k\in\mathbb{N}}$ к $(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$. Среди всех m-сцепленных семейств — элементов (6.1) — выделяем максимальные, полагая при $m\in\mathbb{N}$, что

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m]\triangleq\{\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|m]|\ \forall\mathcal{S}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|m]\ \ (\mathcal{E}\subset\mathcal{S})\Longrightarrow(\mathcal{E}=\mathcal{S})\}. \tag{6.3}$$

Подобно (3.2) реализуется эквивалентное представление: если $m\in\mathbb{N}$, то

$$\begin{gathered}\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]=\{\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|m+1]|\\ \forall L\in\mathcal{L}\ \ (L\cap(\bigcap_{i=1}^{m}\Sigma_i)\neq\varnothing\ \ \forall(\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m}}\in\mathcal{E}^m)\Longrightarrow(L\in\mathcal{E})\}.\end{gathered} \tag{6.4}$$

С использованием леммы Цорна устанавливается, что

$$\forall m\in\mathbb{N}\ \forall\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|m]\ \exists\mathcal{S}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m]\colon\mathcal{E}\subset\mathcal{S}. \tag{6.5}$$

Поскольку при $m\in\mathbb{N}$ и $L\in\mathcal{L}\setminus\{\varnothing\}$ имеет место (см. (6.1)) $\{L\}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|m]$, то согласно (6.5) $\forall n\in\mathbb{N}$

$$(\mathcal{L}\setminus\{\varnothing\}\neq\varnothing)\Longrightarrow(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|n]\neq\varnothing).$$

Кроме того, если $E\in\mathcal{L}$, то $E\in\mathcal{E}\ \forall\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$. При этом

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]=\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|2].$$

Отметим важное свойство вписанности, вытекающее из (6.2), (6.5): если $m\in\mathbb{N}$, то семейство $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]$ вписано в $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m]$, т. е.

$$\forall\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]\ \exists\mathcal{S}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m]\colon\mathcal{E}\subset\mathcal{S}. \tag{6.6}$$

§ 7. Подсемейства π-систем и свойство n-сцепленности ($n\in\mathbb{N}$)

Обобщения «обычной» сцепленности представляются особенно полезными в случае, когда исходное семейство п/м E является π-системой. Это связано с тем, что в этом случае реализуются достаточно содержательные конструкции с применением у/ф. С учетом этого полагаем далее, что $\mathcal{L}\in\pi[E]$, получая, в частности, свойство $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m]\neq\varnothing\ \ \forall m\in\mathbb{N}$. Из определений вытекает, что $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})\subset\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|m]\ \forall m\in\mathbb{N}$. В свою очередь, из (6.4) и определений § 4 вытекает, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\subset\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]\ \forall m\in\mathbb{N}. \tag{7.1}$$

При этом, конечно, $E\in\mathcal{E}\ \forall m\in\mathbb{N}\ \forall\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m]$. Наконец, при $m\in\mathbb{N}$, $\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m]$, $\Sigma\in\mathcal{E}$ и $L\in\mathcal{L}$

$$(\Sigma\subset L)\Longrightarrow(L\in\mathcal{E}). \tag{7.2}$$

Теперь уже представление у/ф как максимальных n-сцепленных систем ($n\in\mathbb{N},\ 2\leqslant n$) уточняется: при $m\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})=\{\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]|\ \Sigma_1\cap\Sigma_2\in\mathcal{E}\ \ \forall\Sigma_1\in\mathcal{E}\ \forall\Sigma_2\in\mathcal{E}\}. \tag{7.3}$$

Т е о р е м а 7.1. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]. \tag{7.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (7.1) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ есть п/м множества-пересечения в правой части (7.4). Осталось установить вложение

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{7.5}$$

Пусть $\mathcal{V}$ — элемент множества в левой части (7.5). Ясно, что $\mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$, и, как следствие, для некоторого у/ф $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ реализуется цепочка вложений

$$\mathcal{V} \subset \{\cap\}_\sharp(\mathcal{V}) \subset \mathcal{W}; \tag{7.6}$$

учитываем (4.1) и (4.2) (семейство $\{\cap\}_\sharp(\mathcal{V})$ есть база фильтра широко понимаемого ИП $(E, \mathcal{L})$). При этом $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|2]$, а потому $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$. В силу (5.1) имеем, в частности, свойство $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$, а тогда согласно (3.2) и (7.6) $\mathcal{V} = \mathcal{W}$. По выбору $\mathcal{W}$ имеем свойство $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, чем и завершается проверка (7.5). □

Рассмотрим ниже вопрос о совпадении $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]$ при том или ином значении $m \in \mathbb{N}$.

П р е д л о ж е н и е 7.1. *Если* $m \in \mathbb{N}$, *то справедливо равенство*

$$\begin{gathered}\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \\ = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] |\ \exists (\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in \mathcal{E}^{m+2}\colon \bigcap_{i=1}^{m+2} \Sigma_i = \varnothing\}.\end{gathered} \tag{7.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω множество в правой части (7.7). Покажем, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \Omega$. Пусть $\mathcal{M} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. В силу (7.3) для некоторых множеств $M_1 \in \mathcal{M}$ и $M_2 \in \mathcal{M}$ имеем, что $M_1 \cap M_2 \notin \mathcal{M}$, где $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{L}$ по определению π-системы. Тогда согласно (6.4) для некоторого кортежа $(\Lambda_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{M}^m$

$$(M_1 \cap M_2) \cap (\bigcap_{i=1}^{m} \Lambda_i) = \varnothing.$$

Это означает, что для некоторого кортежа $(M^{(i)})_{i\in\overline{1,m+2}} \in \mathcal{M}^{m+2}$ реализуется свойство пустого пересечения всех множеств $M^{(i)},\ i \in \overline{1, m+2}$. В итоге $\mathcal{M} \in \Omega$. Итак,

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \Omega. \tag{7.8}$$

Пусть $\mathcal{W} \in \Omega$. Тогда $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]$, и при этом для некоторого $(W_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in$ $\in \mathcal{W}^{m+2}$

$$\bigcap_{i=1}^{m+2} W_i = \varnothing. \tag{7.9}$$

Поскольку фильтры и, в частности, у/ф замкнуты относительно конечных пересечений, из (7.9) следует (по аксиомам фильтра), что $\mathcal{W} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, т. е. $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Итак, установлено вложение, противоположное (7.8), а следовательно, и равенство (7.7). □

Из предложения 7.1 вытекает, что при $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] |\ \bigcap_{i=1}^{m+2} \Sigma_i \neq \varnothing\ \forall (\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in \mathcal{E}^{m+2}\}. \tag{7.10}$$

С л е д с т в и е 7.1. *Если $m \in \mathbb{N}$, то справедливо равенство*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1] \cap \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle [E|m+2]. \tag{7.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{M}$ — семейство в правой части (7.11). Покажем, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{M}$. В самом деле, пусть $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Тогда согласно (7.10) выполнено включение $\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]$ и

$$\bigcap_{i=1}^{m+2} \Sigma_i \neq \varnothing \quad \forall (\Sigma_i)_{i \in \overline{1,m+2}} \in \mathcal{U}^{m+2}. \tag{7.12}$$

Ясно, что $\mathcal{U} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ (см. (6.1), (6.3)). Из (6.1) и (7.12) следует поэтому, что выполнено включение $\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle [E|m+2]$. В итоге $\mathcal{U} \in \mathbb{M}$, чем завершается проверка того, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \mathbb{M}$.

Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{M}$, т. е. $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]$ и $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle [E|m+2]$. Из (6.1) и последнего включения вытекает, что

$$\bigcap_{i=1}^{m+2} \Sigma_i \neq \varnothing \quad \forall (\Sigma_i)_{i \in \overline{1,m+2}} \in \mathcal{V}^{m+2}. \tag{7.13}$$

Тогда согласно (7.10) и (7.13) $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Итак, установлено, что $\mathbb{M} \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и, как следствие, $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{M}$. $\square$

§ 8. Специальные π-системы, реализующие отождествление ультрафильтров и максимальных n-сцепленных систем ($2 \leqslant n$)

В настоящем параграфе фиксируем только $m \in \mathbb{N}$. По аналогии с (1.2) введем следующее семейство π-систем

$$\begin{gathered} \pi_*^\sharp [E|m] \triangleq \{\mathcal{L} \in \pi[E] |\ \forall (L_i)_{i \in \overline{1,m+2}} \in \mathcal{L}^{m+2} \\ (\{L_i \colon i \in \overline{1,m+2}\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle [E|m+1]) \Longrightarrow (\bigcap_{i=1}^{m+2} L_i \neq \varnothing)\}. \end{gathered} \tag{8.1}$$

Из (8.1) следует, конечно, что при $m = 1$ реализуется (1.2), т. е. $(m = 1) \Longrightarrow (\pi_*^\sharp [E|m] = \pi_*^\sharp [E])$. При этом

$$\begin{gathered} \pi[E] \setminus \pi_*^\sharp [E|m] = \{\mathcal{L} \in \pi[E] |\ \exists (L_i)_{i \in \overline{1,m+2}} \in \mathcal{L}^{m+2} \\ (\{L_i \colon i \in \overline{1,m+2}\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle [E|m+1]) \& (\bigcap_{i=1}^{m+2} L_i = \varnothing)\}. \end{gathered} \tag{8.2}$$

П р е д л о ж е н и е 8.1. *Справедливо равенство*

$$\pi[E] \setminus \pi_*^\sharp [E|m] = \{\mathcal{L} \in \pi[E] |\ \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \varnothing\}. \tag{8.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через $\mathfrak{L}$ обозначим семейство в правой части (8.3). Пусть $\mathcal{A} \in \pi[E] \setminus \pi_*^\sharp [E|m]$. Тогда (см. (8.2)) для некоторого кортежа $(A_i)_{i \in \overline{1,m+2}} \in \mathcal{A}^{m+2}$

$$(\{A_i \colon i \in \overline{1,m+2}\} \in \langle \mathcal{A} - \mathrm{link} \rangle [E|m+1]) \& (\bigcap_{i=1}^{m+2} A_i = \varnothing). \tag{8.4}$$

Пусть $\mathfrak{A} \triangleq \{A_i \colon i \in \overline{1,m+2}\}$. Ясно, что $\mathfrak{A} \in \langle \mathcal{A} - \mathrm{link} \rangle [E|m+1]$, а тогда согласно (6.5) для некоторой системы $\tilde{\mathfrak{A}} \in \langle \mathcal{A} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]$ реализуется $\mathfrak{A} \subset \tilde{\mathfrak{A}}$. При этом $(A_i)_{i \in \overline{1,m+2}} \in \tilde{\mathfrak{A}}^{m+2}$. Поэтому согласно предложению 7.1 и (8.4) $\tilde{\mathfrak{A}} \in \langle \mathcal{A} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Итак, $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}$. Тем самым установлено, что

$$\pi[E] \setminus \pi_*^\sharp [E|m] \subset \mathfrak{L}. \tag{8.5}$$

Пусть $\mathcal{B} \in \mathfrak{L}$. Тогда $\mathcal{B} \in \pi[E]$, причем $\langle \mathcal{B} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{B}) \neq \varnothing$. Пусть $\tilde{\mathcal{E}} \in \langle \mathcal{B} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{B})$. Тогда, в частности, $\tilde{\mathcal{E}} \in \mathcal{P}'(\mathcal{B})$ и согласно предложению 7.1 для некоторого кортежа $(\tilde{\Sigma}_i)_{i \in \overline{1,m+2}} \in \tilde{\mathcal{E}}^{m+2}$

$$\bigcap_{i=1}^{m+2} \tilde{\Sigma}_i = \varnothing.$$

Поскольку $(\tilde{\Sigma}_i)_{i \in \overline{1,m+2}} \in \mathcal{B}^{m+2}$, то $\mathcal{B} \in \pi[E] \setminus \pi_*^\sharp[E|m]$ (действительно, по выбору $\tilde{\mathcal{E}}$ имеем, что $\{\tilde{\Sigma}_i \colon i \in \overline{1, m+2}\} \in \langle \mathcal{B} - \mathrm{link}\rangle[E|m+1]$). Итак, $\mathfrak{L} \subset \pi[E] \setminus \pi_*^\sharp[E|m]$, а потому (см. (8.5)) имеем требуемое равенство $\mathfrak{L} = \pi[E] \setminus \pi_*^\sharp[E|m]$. □

Из предложения 8.1 вытекает следующее равенство:

$$\pi_*^\sharp[E|m] = \{\mathcal{L} \in \pi[E] | \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\}. \tag{8.6}$$

В (8.6) мы получили описание семейства всех π-систем п/м E, для которых отождествимы у/ф и максимальные n-сцепленные системы при $n = m+1$.

Добавление 1. Сейчас, фиксируя $\mathcal{L} \in \pi[E]$, отметим некоторые положения, связанные со следствием 7.1.

Предложение 8.2. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \cap \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+2].$$

Доказательство. С учетом (6.3) имеем в силу следствия 7.1, что

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \cap \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+2] \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

Используя (7.3), получаем требуемое равенство. □

Предложение 8.2 по существу усиливает утверждение теоремы 7.1.

Предложение 8.3. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, *то* $\mathcal{E} \notin \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E|m+2]$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{T} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. При этом согласно следствию 7.1 имеем, коль скоро $\mathcal{T} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]$, что

$$(\mathcal{T} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E|m+2]) \Longrightarrow (\mathcal{T} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})). \tag{8.7}$$

Однако $\mathcal{T} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Поэтому из (8.7) вытекает требуемое свойство. □

Из предложения 8.3 следует, конечно, что

$$\mathcal{E} \notin \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+2] \ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{8.8}$$

С другой стороны, из предложения 8.2 вытекает, что

$$\mathcal{E} \notin \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+2] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{8.9}$$

Свойства (8.8), (8.9) показывают, что максимальные $(m+1)$-сцепленные системы, не являющиеся у/ф, оказываются «короткоживущими» при изменении параметра сцепленности. С учетом построений § 7 легко следует, что $\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m] \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{E} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{E} = \mathcal{F}).$$

Как следствие (см. (7.1)), получаем с очевидностью, что $\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m] \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{E} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})). \tag{8.10}$$

П р е д л о ж е н и е 8.4. *Если* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+1]$, *то непременно*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+2].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+1]. \tag{8.11}$$

Выберем произвольно $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+2]$. Тогда в силу (6.6) для некоторого семейства $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+1]$

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{W}. \tag{8.12}$$

В силу (8.11) имеем, что $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, а потому из (8.10) и (8.12) следует, что $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Тем самым установлено вложение $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+2] \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. С учетом (7.1) получаем теперь требуемое равенство $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+2]$. □

Добавление 2. Поскольку в построениях настоящего раздела выбор $m \in \mathbb{N}$ был произвольным, установлено (см. (8.6)), что

$$\pi_*^\sharp[E|k] \subset \pi_*^\sharp[E|k+1] \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Как следствие, получаем, что при $k \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}$ со свойством $k \leqslant l$ непременно $\pi_*^\sharp[E|k] \subset \subset \pi_*^\sharp[E|l]$. В свою очередь, сопоставляя (1.2) и (8.1), имеем, что

$$\pi_*^\sharp[E] \subset \pi_*^\sharp[E|s] \ \forall s \in \mathbb{N}. \tag{8.13}$$

В этой связи отметим, что в [10,20] приведены содержательные примеры π-систем из $\pi_*^\sharp[E]$. С учетом (8.13) получаем, что упомянутые примеры сохраняют свою силу при рассмотрении $\pi_*^\sharp[E|k],\ k \in \mathbb{N}$. Наиболее существенным представляется в этой связи свойство (8.6).

§ 9. Вопросы топологического оснащения, 1 (n-суперкомпактность)

В настоящем параграфе фиксируем $\mathcal{L} \in \pi[E]$; рассматриваем при $m \in \mathbb{N}$ оснащение семейства $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+1]$ двумя характерными топологиями (по смыслу волмэновской и стоуновской). Однако сначала отметим ряд легкопроверяемых положений общего характера. Так, в частности, $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|k]\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\ \forall L \in \mathcal{L}$

$$(\Sigma \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E}). \tag{9.1}$$

При $k \in \mathbb{N}$ и $L \in \mathcal{L}$ полагаем, что

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|k; L] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|k] | L \in \mathcal{E}\}, \tag{9.2}$$

получая п/м $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|k]$. С учетом этого получаем (см. (9.2)), что при $k \in \mathbb{N}$

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}|k] \stackrel{\triangle}{=} \{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|k; L] \colon L \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|k])); \tag{9.3}$$

при этом $\varnothing \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}|k]$ и $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|k] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|k; E] \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}|k]$. Отметим здесь же, что (см. (7.2), (9.1)) $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall L_1 \in \mathcal{L}\ \forall L_2 \in \mathcal{L}$

$$(L_1 \subset L_2) \Longrightarrow (\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m; L_1] \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m; L_2]).$$

Сейчас рассмотрим одну общую конструкцию топологического характера. Итак, фиксируем произвольное непустое множество $\mathbb{E}$ и полагаем при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{E}]$ и $m \in \mathbb{N}$, что

$$((\mathrm{p}, \mathrm{bin})_m - \mathrm{cl})[\mathbb{E}; \tau] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}^0[\mathbb{E}\ \tau] | \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S \neq \varnothing\ \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle[\mathbb{E}|m]\}; \tag{9.4}$$

элементы семейства (9.4) рассматриваем как псевдобинарные замкнутые предбазы по аналогии с бинарными (замкнутыми) предбазами (см. [18, 5.11]), используемыми при определении суперкомпактности в форме, двойственной по отношению к используемой в § 2; семейство (9.4) может быть пустым. По двойственности получаем (см. (2.2)) при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{E}],\ m \in \mathbb{N},\ \mathcal{T} \in ((\mathrm{p}, \mathrm{bin})_m - \mathrm{cl})[\mathbb{E}; \tau]$ и $\mathcal{C} \in (\mathrm{COV})[\mathbb{E}|\mathbf{C}_{\mathbb{E}}[\mathcal{T}]]$, что

$$\exists (C_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{C}^m \colon \mathbb{E} = \bigcup_{i=1}^{m} C_i. \tag{9.5}$$

С другой стороны, имеем при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{E}]$, $m \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{T} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbb{E}\ \tau]$ (по двойственности), что

$$(\forall \mathcal{C} \in (\mathrm{COV})[\mathbb{E}|\mathbf{C}_{\mathbb{E}}[\mathcal{T}]]\ \exists (C_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{C}^m \colon \mathbb{E} = \bigcup_{i=1}^{m} C_i) \Longrightarrow (\mathcal{T} \in ((\mathrm{p}, \mathrm{bin})_m - \mathrm{cl})[\mathbb{E}; \tau]).$$

Всюду в дальнейшем полагаем при $m \in \mathbb{N}$, что

$$((\mathbb{SC})_m - \mathrm{top})[\mathbb{E}] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{E}] | ((\mathrm{p}, \mathrm{bin})_m - \mathrm{cl})[\mathbb{E}; \tau] \neq \varnothing\}; \tag{9.6}$$

топологии из семейства (9.6) называем m-суперкомпактными. Если же $m \in \mathbb{N}$ и $\tau \in \in ((\mathbb{SC})_m - \mathrm{top})[\mathbb{E}]$, то ТП $(\mathbb{E}, \tau)$ называем m-суперкомпактным. По двойственности получаем из (9.6), что при $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{gathered}((\mathbb{SC})_m - \mathrm{top})[\mathbb{E}] = \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{E}] | \exists \mathcal{E} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{E}; \tau]\ \forall \mathcal{G} \in (\mathrm{COV})[\mathbb{E}|\mathcal{E}] \\ \exists (G_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{G}^m \colon \mathbb{E} = \bigcup_{i=1}^{m} G_i\}.\end{gathered} \tag{9.7}$$

В связи с (9.6), (9.7) отметим, что при $m \in \mathbb{N}$ и $\tau \in ((\mathbb{SC})_m - \mathrm{top})[\mathbb{E}]$ ТП $(\mathbb{E}, \tau)$ компактно по лемме Александера [19, 3.12.2].

§ 10. Вопросы топологического оснащения, 2 (n-суперкомпаткность и n-сцепленность)

В настоящем параграфе фиксируем $m \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (напомним, что $E \neq \varnothing$). Рассмотрим семейство $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+1]$ и некоторые его подсемейства. Целью этих построений будет оснащение упомянутого семейства n-суперкомпактной топологией, где $n = m + 1$.

П р е д л о ж е н и е 10.1. *Если $L \in \mathcal{L}$, то*

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m+1; L] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+1]|\ L \cap (\bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i) \neq \varnothing\ \forall (\Sigma_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{E}^m\}. \tag{10.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $L \in \mathcal{L}$. Множество в правой части (10.1) обозначим через Ω. Требуется установить равенство

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m+1; L] = \Omega. \tag{10.2}$$

Пусть $\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m+1; L]$. Тогда (см. (9.2)) $\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+1]$. При этом $L \in \mathcal{U}$. Выберем произвольно $(U_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{U}^m$, после чего введем «расширенный» кортеж $(\tilde{U})_{i \in \overline{1,m+1}} \in \mathcal{U}^{m+1}$, полагая, что

$$(\tilde{U}_j \triangleq U_j\ \forall j \in \overline{1,m}) \& (\tilde{U}_{m+1} \triangleq L). \tag{10.3}$$

По выбору $\mathcal{U}$ имеем следующее свойство: пересечение всех множеств $\tilde{U}_i,\ i \in \overline{1, m+1}$, непусто, что в силу (10.3) означает справедливость утверждения

$$L \cap (\bigcap_{i=1}^{m} U_i) \neq \varnothing.$$

Поскольку выбор $(U_i)_{i \in \overline{1,m}}$ был произвольным, установлено, что $\mathcal{U} \in \Omega$. Итак,

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0 [E|m+1; L] \subset \Omega. \tag{10.4}$$

Пусть $\mathcal{V} \in \Omega$. Тогда, в частности, $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]$. При этом согласно (6.4)

$$(L \cap (\bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i) \neq \varnothing\ \forall (\Sigma_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{V}^m) \Longrightarrow (L \in \mathcal{V}). \tag{10.5}$$

Из определения Ω имеем по выбору $\mathcal{V}$, что посылка импликации (10.5) истинна. Поэтому $L \in \mathcal{V}$. Из (9.2) вытекает, что $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0 [E|m+1; L]$. Итак,

$$\Omega \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0 [E|m+1; L].$$

С учетом (10.4) получаем (10.2), что и требовалось доказать. $\square$

С учетом предложения 10.1 получаем, что

$$\begin{gathered} \forall L \in \mathcal{L}\ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1] \setminus \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0 [E|m+1; L] \\ \exists (\Sigma_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{E}^m \colon \bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i \subset E \setminus L. \end{gathered} \tag{10.6}$$

Имея в виду (10.6), полагаем, что $\forall H \in \mathcal{P}(E)$

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^*_{\mathrm{op}} [E|m; H] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1] | \exists (\Sigma_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{E}^m \colon \bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i \subset H\}. \tag{10.7}$$

Используя (10.6), (10.7) и предложение 10.1, получаем, что при $L \in \mathcal{L}$

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1] \setminus \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0 [E|m+1; L] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^*_{\mathrm{op}} [E|m; E \setminus L]. \tag{10.8}$$

Введем в рассмотрение следующее семейство:

$$\hat{\mathfrak{C}}^{(\mathrm{op})}_* [E; \mathcal{L}|m] \triangleq \{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^*_{\mathrm{op}} [E|m; \Lambda] \colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1])). \tag{10.9}$$

С учетом (10.8) и (10.9) получаем очевидные соотношения двойственности

$$\begin{gathered} (\hat{\mathfrak{C}}^*_0 [E; \mathcal{L}|m+1] = \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]} [\hat{\mathfrak{C}}^{(\mathrm{op})}_* [E; \mathcal{L}|m]]) \\ (\hat{\mathfrak{C}}^{(\mathrm{op})}_* [E; \mathcal{L}|m] = \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]} [\hat{\mathfrak{C}}^*_0 [E; \mathcal{L}|m+1]]). \end{gathered} \tag{10.10}$$

Заметим, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^*_{\mathrm{op}} [E|m; \varnothing] = \varnothing$ и $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^*_{\mathrm{op}} [E|m; E] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]$; итак, (10.9) есть семейство с «нулем» и «единицей». Кроме того, из (10.9) следует, что $\hat{\mathfrak{C}}^{(\mathrm{op})}_* [E; \mathcal{L}|m] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]]$, а тогда определена топология волмэновского типа:

$$\mathbb{T}_0 \langle E|\mathcal{L}; m \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^{(\mathrm{op})}_* [E; \mathcal{L}|m])) \in (\mathrm{top})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]]. \tag{10.11}$$

Из (10.11) следует, конечно, что

$$\hat{\mathfrak{C}}^{(\mathrm{op})}_* [E; \mathcal{L}|m] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0 [\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]; \mathbb{T}_0 \langle E|\mathcal{L}; m \rangle],$$

откуда по двойственности (см. (10.10)) получаем, что

$$\hat{\mathfrak{C}}^*_0 [E; \mathcal{L}|m+1] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}} [\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]; \mathbb{T}_0 \langle E|\mathcal{L}; m \rangle]. \tag{10.12}$$

П р е д л о ж е н и е 10.2. *В виде* (9.3) *при* $k = m+1$ *реализуется псевдобинарная замкнутая предбаза топологии* (10.11)*:*

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}|m+1] \in ((\mathrm{p},\mathrm{bin})_{m+1} - \mathrm{cl})[\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]; \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L};m\rangle]. \qquad (10.13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольное $(m+1)$-сцепленное семейство

$$\mathfrak{A} \in \langle\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}|m+1] - \mathrm{link}\rangle[\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]|m+1]. \qquad (10.14)$$

Тогда, в частности, $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}'(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}|m+1])$. Введем в рассмотрение

$$\mathfrak{V} \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} | \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|m+1;L] \in \mathfrak{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}), \qquad (10.15)$$

для которого рассмотрим следующее семейство:

$$\mathfrak{U} \overset{\triangle}{=} \{\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|m+1;L] \colon L \in \mathfrak{V}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1])). \qquad (10.16)$$

Из (10.15) и (10.16) легко следует равенство $\mathfrak{A} = \mathfrak{U}$, а потому (см. (10.16))

$$\mathfrak{A} = \{\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|m+1;L] \colon L \in \mathfrak{V}\}. \qquad (10.17)$$

Выберем произвольно кортеж $(V_i)_{i\in\overline{1,m+1}} \in \mathfrak{V}^{m+1}$. Тогда $\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|m+1;V_j] \in \mathfrak{A}$ $\forall j \in \overline{1,m+1}$, а потому (см. (10.14))

$$\bigcap_{i=1}^{m+1} \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|m+1;V_i] \neq \varnothing. \qquad (10.18)$$

Пусть β^0 — элемент множества в левой части (10.18). Тогда $\beta^0 \in \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]$ и при этом $V_j \in \beta^0$ $\forall j \in \overline{1,m+1}$. Но в этом случае по свойствам β^0 имеем

$$\bigcap_{i=1}^{m+1} V_i \neq \varnothing.$$

Поскольку выбор $(V_i)_{i\in\overline{1,m+1}}$ был произвольным, установлено, что $\mathfrak{V} \in \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E|m+1]$, а тогда в силу (6.5) имеем, что $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}$ для некоторого $\mathfrak{W} \in \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]$.

Пусть $\mathbb{V} \in \mathfrak{V}$, т. е. $\mathbb{V} \in \mathcal{L}$, и при этом $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|m+1;\mathbb{V}] \in \mathfrak{A}$ (мы учли (10.15)). Вместе с тем по выбору $\mathfrak{W}$ имеем включение $\mathbb{V} \in \mathfrak{W}$, а потому $\mathfrak{W} \in \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|m+1;\mathbb{V}]$. Поскольку $\mathbb{V}$ выбиралось произвольно, установлено, что $\mathfrak{W} \in \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|m+1;L]$ $\forall L \in \mathfrak{V}$. С учетом (10.17) получаем, что $\mathfrak{W}$ содержится в пересечении всех множеств из $\mathfrak{A}$. Поэтому данное пересечение непусто. Коль скоро и само семейство $\mathfrak{A}$ выбиралось произвольно, установлено, что

$$\bigcap_{\mathbb{X}\in\kappa} \mathbb{X} \neq \varnothing \ \ \forall \kappa \in \langle\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}|m+1] - \mathrm{link}\rangle[\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]|m+1].$$

С учетом (9.4) и (10.12) получаем требуемое свойство (10.13). □

В силу (9.5), (10.10) и предложения 10.2 имеем, что

$$\forall \mathcal{C} \in (\mathrm{COV})[\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]|\hat{\mathfrak{C}}_*^{(\mathrm{op})}[E;\mathcal{L}|m]]$$
$$\exists (\mathbb{C}_i)_{i\in\overline{1,m+1}} \in \mathcal{C}^{m+1} \colon \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] = \bigcup_{i=1}^{m+1} \mathbb{C}_i.$$

Т е о р е м а 10.1. *Имеет место свойство* $(m+1)$*-суперкомпактности ТП*

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L};m\rangle), \tag{10.19}$$

а именно: $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L};m\rangle \in ((\mathbb{SC})_{m+1}-\mathrm{top})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]]$.

Доказательство получается непосредственной комбинацией (9.6) и предложения 10.2. Отметим, в частности, что ТП (10.19) компактно. Заметим, что при $H\in\mathcal{P}(E)$

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|H] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})\cap\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^*_{\mathrm{op}}[E|m;H]; \tag{10.20}$$

учитываем при этом (4.5), (10.7) и замкнутость каждого фильтра относительно конечных пересечений. С учетом (10.20) получаем равенство

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] = \hat{\mathfrak{C}}^{(\mathrm{op})}_*[E;\mathcal{L}|m]|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})} \tag{10.21}$$

(см. (4.6), (10.9)). В свою очередь, из (10.21) вытекает следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 10.3. *В виде* (4.8) *реализуется подпространство ТП* (10.19)*:*

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L};m\rangle|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}.$$

Доказательство следует из определений (см. (4.7), (10.11)). Здесь же заметим очевидное свойство

$$\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|m+1;\Sigma] = \{\mathcal{E}\}\ \forall\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]. \tag{10.22}$$

С учетом (10.12) и (10.22) получаем следующее положение.

П р е д л о ж е н и е 10.4. *В виде* (10.19) *реализуется* T_1*-пространство.*

В заключение параграфа отметим, что при $k\in\mathbb{N}$ согласно (9.2), (9.3)

$$\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}|k]\in(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|k]],$$

а потому определена следующая топология стоуновского типа:

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};k\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}|k]))\in(\mathrm{top})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|k]], \tag{10.23}$$

нужный вариант которой рассматривается в следующем параграфе.

§ 11. Вопросы топологического оснащения, 3 (битопологическое пространство)

Возвращаясь к схеме (10.23) и фиксируя в настоящем параграфе $\mathcal{L}\in\pi[E]$ и $m\in\mathbb{N}$, рассмотрим следующее ТП:

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1], \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle), \tag{11.1}$$

для которого $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}|m+1]\in(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1],\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle]$.

П р е д л о ж е н и е 11.1. *В виде* (11.1) *реализуется* T_2*-пространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (10.23) имеем свойство: при $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+1]$ и $\Sigma \in \mathcal{E}$ множество $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m+1; \Sigma]$ есть окрестность $\mathcal{E}$ в ТП (11.1). Здесь же учтем тот очевидный факт, что при $\mathcal{E}_1 \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+1]$ и $\mathcal{E}_2 \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+1] \setminus \{\mathcal{E}_1\}$

$$(\mathcal{E}_1 \setminus \mathcal{E}_2 \neq \varnothing) \ \& \ (\mathcal{E}_2 \setminus \mathcal{E}_1 \neq \varnothing) \tag{11.2}$$

((11.2) — простое следствие максимальности $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$). Фиксируем $\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+1]$ и $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+1] \setminus \{\mathcal{U}\}$. С учетом (11.2) и предложения 10.1 можно указать $U \in \mathcal{U}$ и $(V_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{V}^m$ для которых

$$U \cap (\bigcap_{i=1}^{m} V_i) = \varnothing. \tag{11.3}$$

Ясно, что $\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m+1; U]$ и $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m+1; V_j]$ $\forall j \in \overline{1,m}$. Тогда, как уже отмечалось, в виде $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m+1; U]$ и

$$\bigcap_{i=1}^{m} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m+1; V_i]$$

реализуются соответственно окрестности $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ в ТП (11.1). Более того, они не пересекаются. В самом деле, допустим противное: пересечение этих окрестностей непусто. Пусть

$$\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m+1; U] \cap (\bigcap_{i=1}^{m} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m+1; V_i]).$$

Тогда $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+1]$ и при этом $V_1 \in \mathcal{W}, \ldots, V_m \in \mathcal{W}, \ U \in \mathcal{W}$. Поскольку $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle[E|m+1]$, получаем (см. (6.1)) противоречие с (11.3). Итак, вышеупомянутые окрестности $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ не пересекаются. Поскольку $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ выбирались произвольно, требуемое свойство T_2-отделимости установлено. □

П р е д л о ж е н и е 11.2. *Если $L \in \mathcal{L}$, то множество $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m+1; L]$ замкнуто в ТП* (11.1)*:*

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m+1; L] \in \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+1]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1 \rangle]. \tag{11.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbb{B} \triangleq \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E|m+1] \setminus \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m+1; L]$. Выберем произвольно $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$. Тогда $L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{B}$. В силу предложения 10.1 для некоторого кортежа $(\tilde{\Sigma}_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{B}^m$ имеем равенство

$$L \cap (\bigcap_{i=1}^{m} \tilde{\Sigma}_i) = \varnothing. \tag{11.5}$$

Тогда, в частности, $\tilde{\Sigma}_j \in \mathcal{L}$ при $j \in \overline{1,m}$, а потому

$$\mathbb{G} \triangleq \bigcap_{i=1}^{m} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m+1; \tilde{\Sigma}_i] \in \{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}|m+1])$$

и, в частности (см. (10.23)), $\mathbb{G} \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1 \rangle$, причем $\mathcal{B} \in \mathbb{G}$ по выбору $\tilde{\Sigma}_1, \ldots, \tilde{\Sigma}_m$. Итак, $\mathbb{G}$ есть открытая окрестность $\mathcal{B}$ в ТП (11.1). При этом

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|m+1; L] \cap \mathbb{G} = \varnothing. \tag{11.6}$$

В самом деле, допустим противное: пусть множество-пересечение в (11.6) непусто и $\mathcal{V} \in \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|m+1;L] \cap \mathbb{G}$. Тогда $(\tilde{\Sigma}_j \in \mathcal{V}\ \forall j \in \overline{1,m})$ & $(L \in \mathcal{V})$. Введем кортеж $(V_i)_{i\in\overline{1,m+1}} \in \mathcal{V}^{m+1}$ по правилу

$$(V_j \triangleq \tilde{\Sigma}_j\ \forall j \in \overline{1,m})\ \&\ (V_{m+1} \triangleq L). \tag{11.7}$$

В силу $(m+1)$-сцепленности $\mathcal{V}$ пересечение всех множеств $V_i,\ i \in \overline{1,m+1}$, непусто, что в силу (11.7) приводит к противоречию с (11.5). Данное противоречие доказывает (11.6). Итак, $\mathbb{G} \subset \mathbb{B}$. Поэтому $\mathbb{B}$ есть окрестность $\mathcal{B}$ в смысле [22, гл. I]. Поскольку $\mathcal{B}$ выбиралось произвольно, установлено, что $\mathbb{B} \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle$ (см. [22, гл. I, § 2, предложение 1]). Как следствие, получаем (11.4). □

Из предложения 11.2 следует, что

$$\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}|m+1]) \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle \cap \mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle]. \tag{11.8}$$

С учетом (10.23) и (11.8) получаем, что ТП (11.1) нульмерно. Итак (см. предложение 11.1), в виде (11.1) имеем нульмерное T_2-пространство. □

П р е д л о ж е н и е 11.3. *Если* $L \in \mathcal{L}$, *то* $\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|m+1;L] \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$.

Доказательство следует из определений (см. (9.2) и построения § 4). В свою очередь, из (4.3), (9.3) и предложения 11.3 вытекает, что

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] = \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}|m+1]|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}. \tag{11.9}$$

П р е д л о ж е н и е 11.4. *В виде* (4.4) *реализуется подпространство ТП* (11.1)*:*

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}. \tag{11.10}$$

Доказательство (11.10) извлекается из (11.9) посредством рассуждений, подобных используемым при обосновании [8, предложение 6.5].

Т е о р е м а 11.1. *Топологии* $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L};m\rangle$ *и* $\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle$ *сравнимы, и при этом*

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L};m\rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle. \tag{11.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbf{F} \in \mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]}[\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L};m\rangle]$. С учетом (10.12) имеем для некоторого $\eta \in \mathcal{P}'(\{\cup\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}|m+1]))$ равенство

$$\mathbf{F} = \bigcap_{\mathbb{X}\in\eta} \mathbb{X}. \tag{11.12}$$

Из (11.8) легко следует, что

$$\eta \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle]),$$

а потому (см. (11.12)) по свойствам семейства замкнутых множеств в ТП

$$\mathbf{F} \in \mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle].$$

Итак, установлено вложение

$$\mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]}[\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L};m\rangle] \subset \mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle],$$

откуда и вытекает свойство (11.11). □

Таким образом, установлено следующее полезное свойство:

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L};m\rangle, \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle) \tag{11.13}$$

есть БТП. В силу предложений 10.3 и 11.4 получаем, что (4.9) есть подпространство БТП (11.13):

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L};m\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})})\ \&\ (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}).$$

§ 12. Некоторые частные случаи, добавления

В настоящем параграфе отметим некоторые простейшие свойства, связанные с условиями невырожденности БТП (11.13), и, напротив, укажем варианты, когда вырожденность данного БТП имеет место (мы имеем в виду совпадение топологий $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L};m\rangle$ и $\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle$, где m и L соответствуют § 5).

П р е д л о ж е н и е 12.1. *Если* $\tau \in (\mathrm{top})[E]$, (E,τ) *есть* T_1*-пространство и при этом* $\tau \neq \mathcal{P}(E)$, *то*

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathbf{C}_E[\tau];m\rangle \neq \mathbb{T}_*\langle E|\mathbf{C}_E[\tau];m+1\rangle\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Доказательство подобно в существенной части обоснованию [7, теорема 7.1] и по этой причине опущено. Следует отметить, что в случае, когда $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ удовлетворяет условиям предложения 12.1 (случай, когда (E,τ) есть T_1-пространство, не являющееся дискретным), имеет место свойство

$$\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}\langle E\rangle \neq \mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]; \tag{12.1}$$

(12.1) и предложение 12.1 характеризуют (4.9) и (11.13) как невырожденные БТП. В то же время (см. [8, раздел 8]) $\forall \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] \cup (\mathrm{top})[E]$

$$(\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle)\ \&\ (\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]). \tag{12.2}$$

Заметим, что (12.2) можно рассматривать как пример вырожденности БТП (11.13). В самом деле, как легко видеть, $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L};1\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle$ и $\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};2\rangle = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$ (эти два равенства справедливы в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$). Поэтому при $m=1$ в случае $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] \cup (\mathrm{top})[E]$ имеем равенство

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L};m\rangle = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle$$

(итак, при $m=1$ БТП (11.13) является вырожденным в случаях, когда $\mathcal{L}$ — алгебра п/м E или топология на E).

Добавление. Отметим одно весьма общее свойство топологического характера.

П р е д л о ж е н и е 12.2. *Если* $\mathcal{L} \in \pi[E]$ *и* $m \in \mathcal{N}$, *то*

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \setminus \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle. \tag{12.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω множество в левой части (12.3). Пусть $\mathcal{T} \in \Omega$, т.е. $\mathcal{T} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]$ и $\mathcal{T} \notin \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$. Тогда согласно предложению 7.1 для некоторого кортежа $(T_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in \mathcal{T}^{m+2}$

$$\bigcap_{i=1}^{m+2} T_i = \varnothing. \tag{12.4}$$

При этом $T_j \in \mathcal{L}\ \forall j \in \overline{1,m+2}$. Поэтому определен кортеж

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|m+1;T_i])_{i\in\overline{1,m+2}} \in \hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}|m+1]^{m+2}. \tag{12.5}$$

Из (12.5) следует, конечно, очевидное свойство (см. (10.23))

$$\mathbb{V} \triangleq \bigcap_{i=1}^{m+2} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|m+1;T_i] \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle, \tag{12.6}$$

причем $\mathcal{T} \in \mathbb{V}$. С учетом (12.6) получаем, что $\mathbb{V}$ есть открытая в ТП (11.1) окрестность $\mathcal{T}$.

Выберем произвольно $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$. Тогда в силу (9.2) $T_j \in \mathcal{V}\ \forall j \in \overline{1, m+2}$. Получили (см. (12.4)), что

$$(T_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in \mathcal{V}^{m+2}\colon\ \bigcap_{i=1}^{m+2} T_i = \varnothing.$$

Вновь используя предложение 7.1, получаем, что $\mathcal{V} \in \Omega$. Поскольку выбор $\mathcal{V}$ был произвольным, установлено, что $\mathbb{V} \subset \Omega$. Следовательно, Ω есть окрестность $\mathcal{T}$, понимаемая в смысле [22, гл. I]. Поскольку и выбор $\mathcal{T}$ был произвольным, получаем в силу [22, § 2, предложение 1], что $\Omega \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1\rangle$. $\square$

Из предложения 12.2 следует, конечно, что при $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и $m \in \mathbb{N}$ множество $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ замкнуто в ТП (11.1):

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \in \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1\rangle].$$

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18–01–00410).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. de Groot J. Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. P. 89–90.
2. van Mill J. Supercompactness and Wallman spaces. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977. 238 p.
3. Strok M., Szymański A. Compact metric spaces have binary bases // Fund. Math. 1975. Vol. 89. No. 1. P. 81–91. https://doi.org/10.4064/fm-89-1-81-91
4. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006.
5. Ченцов А. Г. Суперрасширение как битопологическое пространство // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2017. Т. 49. С. 55–79. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-49-03
6. Dvalishvili B. P. Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications. Amsterdam: North–Holland, 2005.
7. Ченцов А. Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 365–388. https://doi.org/10.20537/vm170307
8. Ченцов А. Г. Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 257–272. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272
9. Chentsov A. G. Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems // Ural Mathematical Journal. 2017. Vol. 3. No. 2. P. 100–121. https://doi.org/10.15826/umj.2017.2.012
10. Ченцов А. Г. Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 2. С. 240–257. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-240-257
11. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
12. Gryzlov A. A. On convergent sequences and copies of βN in one compactification of N // XI Prague Symposium on General Topology. Prague, Czech. Rep. 2011. P. 29.
13. Грызлов А. А., Бастрыков Е. С., Головастов Р. А. О точках одного бикомпактного расширения N // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17. https://doi.org/10.20537/vm100302
14. Грызлов А. А., Головастов Р. А. О пространствах Стоуна некоторых булевых алгебр // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 11–16. https://doi.org/10.20537/vm130102
15. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.

16. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
17. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004.
18. Архангельский А. В. Компактность // Общая топология — 2. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 50. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 5–128.
19. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
20. Chentsov A. G. To a question on the supercompactness of ultrafilter spaces // Ural Mathematical Journal. 2019. Vol. 5. No. 1. P. 31–47. https://doi.org/10.15826/umj.2019.1.004
21. Ченцов А. Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы: основные свойства и топологические конструкции // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 52. С. 86–102. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-07
22. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 07.11.2019

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Цитирование: А. Г. Ченцов. О некоторых аналогах сцепленности и суперкомпактности // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 113–134.

A. G. Chentsov

On certain analogues of linkedness and supercompactness

Keywords: maximal linked system, supercompactness, topology, ultrafilter.

MSC2010: 93C83

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-08

Natural generalizations of properties of the family linkedness and the topological space supercompactness are considered. We keep in mind reinforced linkedness when nonemptyness of intersection of preassigned number of sets from a family is postulated. Analogously, supercompactness is modified: it is postulated the existence of an open subbasis for which, from every covering (by sets of the subbasis), it is possible to extract a subcovering with a given number of sets (more precisely, not more than a given number). It is clear that among all families having the reinforced linkedness, one can distinguish families that are maximal in ordering by inclusion. Under natural and (essentially) "minimal" conditions imposed on the original measurable structure, among the mentioned maximal families with reinforced linkedness, ultrafilters are certainly contained. These ultrafilters form subspaces in the sense of natural topologies corresponding conceptually to schemes of Wallman and Stone. In addition, maximal families with reinforced linkedness, when applying topology of the Wallman type, have the above-mentioned property generalizing supercompactness. Thus, an analogue of the superextension of the T_1-space is realized. The comparability of "Wallman" and "Stone" topologies is established. As a result, bitopological spaces (BTS) are realized; for these BTS, under equipping with analogous topologies, ultrafilter sets are subspaces. It is indicated that some cases exist when the above-mentioned BTS is nondegenerate in the sense of the distinction for forming topologies. At that time, in the case of "usual" linkedness (this is a particular case of reinforced linkedness), very general classes of spaces are known for which the mentioned BTS are degenerate (the cases when origial set, i. e., "unit" is equipped with an algebra of sets or a topology).

Funding. The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18–01–00410).

REFERENCES

1. de Groot J. Superextensions and supercompactness, *Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications*, Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969, pp. 89–90.
2. van Mill J. *Supercompactness and Wallman spaces*, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977, 238 p.
3. Strok M., Szymański A. Compact metric spaces have binary bases, *Fund. Math.*, 1975, vol. 89, no. 1, pp. 81–91. https://doi.org/10.4064/fm-89-1-81-91
4. Fedorchuk V. V., Filippov V. V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii* (General topology. Basic constructions), Moscow: Fizmatlit, 2006.
5. Chentsov A. G. Superextension as bitopological space, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2017, vol. 49, pp. 55–79 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-49-03
6. Dvalishvili B. P. *Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications*, Amsterdam: North-Holland, 2005.
7. Chentsov A. G. Ultrafilters and maximal linked systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 365–388 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170307
8. Chentsov A. G. Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 257–272 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272
9. Chentsov A. G. Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems, *Ural Mathematical Journal*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 100–121. https://doi.org/10.15826/umj.2017.2.012

10. Chentsov A. G. Supercompact spaces of ultrafilters and maximal linked systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 240–257 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-240-257
11. Bulinskii A. V., Shiryaev A. N. *Teoriya sluchainykh protsessov* (Theory of random processes), Moscow: Fizmatlit, 2005.
12. Gryzlov A. A. On convergent sequences and copies of βN in one compactification of N, *XI Prague Symposium on General Topology*, Prague, Czech. Rep. 2011. P. 29.
13. Gryzlov A. A., Bastrykov E. S., Golovastov R. A. About points of compactification of N, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2010, issue 3, pp. 10–17 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm100302
14. Gryzlov A. A., Golovastov R. A. The Stone spaces of Boolean algebras, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 1, pp. 11–16 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm130102
15. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1967.
16. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, New York: Academic Press, 1972. https://doi.org/10.1016/C2013-0-11669-8
Translated under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow: Nauka, 1977.
17. Aleksandrov P. S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* (Introduction to set theory and general topology), Moscow: Editorial URSS, 2004.
18. Arkhangel'skii A. V. Compactness, *General Topology II, Encyclopaedia Math. Sci.*, vol. 50, Berlin: Springer-Verlag, 1996. P. 1–117.
19. Engelking R. *General topology*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1985.
20. Chentsov A. G. To a question on the supercompactness of ultrafilter spaces, *Ural Mathematical Journal*, 2019, vol. 5, no. 1, pp. 31–47. https://doi.org/10.15826/umj.2019.1.004
21. Chentsov A. G. Ultrafilters and maximal linked systems: basic properties and topological constructions, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 52, pp. 86–102 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-07
22. Burbaki N. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Nauka, 1968.

Received 07.11.2019

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Citation: A. G. Chentsov. On certain analogues of linkedness and supercompactness, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 113–134.