

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. A. Makhnev, V. I. Belousova, Automorphisms of distance regular graph with intersection array $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 493–500

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.031>

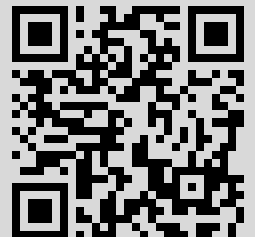
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 213.142.35.54

September 28, 2020, 13:16:12



СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 493–500 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.031

УДК 519.17

MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА
С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$

А.А. МАХНЕВ, В.И. БЕЛОУСОВА

ABSTRACT. Prime divisors of orders of automorphisms and the fixed point subgraphs of automorphisms of prime orders are studied for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$. Let $G = \text{Aut}(\Gamma)$ is nonsolvable group, $\bar{G} = G/S(G)$ and \bar{T} is the socle of \bar{G} . If Γ is vertex-symmetric then (G) is $\{2\}$ -group, and $\bar{T} \cong L_2(11), M_{11}, U_5(2), M_{22}, A_{11}, \text{HiS}$.

Keywords: strongly regular graph, distance-regular graph, automorphism.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (λ -подграфом). Если Γ — граф диаметра d , то через Γ_i , где $i \leq d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ , в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ .

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$.

МАХНЕВ, А.А., БЕЛОУСОВА, В.И., AUTOMORPHISMS OF DISTANCE REGULAR GRAPH WITH INTERSECTION ARRAY $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$.

© 2019 МАХНЕВ А.А., БЕЛОУСОВА В.И.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект 14-11-00061-П.

Поступила 18 февраля 2019 г., опубликована 12 апреля 2019 г.

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\text{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ , неподвижных относительно любого автоморфизма из X . Далее, через $p_{ij}^l(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y , находящихся на расстоянии l в графе Γ . В дистанционно регулярном графе числа $p_{ij}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y , обозначаются p_{ij}^l и называются числами пересечения графа Γ (см. [1]).

В работе [2] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин не большим 4096.

Предложение 1. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, на $v \leq 4096$ вершинах. Если $\lambda = 2$ и Γ — примитивный граф, то верно одно из утверждений:

(1) $\mu = 1$ и Γ имеет массив пересечений $\{6, 3, 3; 1, 1, 2\}$, $\{12, 9, 9; 1, 1, 4\}$, $\{18, 15, 9; 1, 1, 10\}$, $\{33, 30, 8; 1, 1, 30\}$, $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$, $\{48, 45, 9; 1, 1, 40\}$;

(2) $\mu = 2$ и Γ имеет массив пересечений $\{9, 6, 3; 1, 2, 3\}$, $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$, $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$, $\{33, 30, 15; 1, 2, 15\}$, $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$, $\{39, 36, 20; 1, 2, 20\}$, $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$, $\{42, 39, 24; 1, 2, 12\}$, $\{51, 48, 24; 1, 2, 24\}$, $\{55, 52, 34; 1, 2, 22\}$, $\{58, 55, 8; 1, 2, 44\}$, $\{63, 60, 10; 1, 2, 54\}$, $\{75, 72, 8; 1, 2, 60\}$,

(3) $\mu > 2$ и Γ имеет массив пересечений $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{35, 32, 28; 1, 4, 8\}$, $\{39, 36, 27; 1, 4, 13\}$, $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$, $\{60, 57, 16; 1, 4, 30\}$, $\{60, 57, 32; 1, 4, 18\}$, $\{63, 60, 49; 1, 4, 15\}$, $\{68, 65, 32; 1, 4, 40\}$, $\{75, 72, 42; 1, 4, 50\}$, $\{75, 72, 31; 1, 8, 45\}$, $\{80, 77, 61; 1, 7, 20\}$, $\{90, 87, 60; 1, 15, 18\}$, $\{99, 96, 12; 1, 4, 88\}$, $\{99, 96, 20; 1, 4, 72\}$, $\{99, 96, 6; 1, 6, 88\}$, $\{120, 117, 5; 1, 5, 108\}$, $\{143, 140, 34; 1, 7, 10\}$, $\{147, 144, 39; 1, 12, 117\}$, $\{224, 221, 32; 1, 16, 208\}$.

Продолжается исследование вершинно симметричных графов с такими массивами пересечений. Окрестность вершины в таком графе является объединением изолированных многоугольников. Автоморфизмы графов с массивами $\{18, 15, 9; 1, 1, 10\}$, $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$ из пункта (1) найдены в [3,4]. Автоморфизмы графов с массивами $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{33, 30, 15; 1, 2, 15\}$ из пункта (2) найдены в [5,6]. Автоморфизмы графов с массивами $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$ из пункта (3) найдены в [7,8]. В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$. Тогда Γ имеет $v = 1 + 30 + 405 + 972 = 1408$ вершин и спектр $30^1, 8^{384}, -2^{891}, -10^{132}$. Порядок клики в Γ не превосходит 4, так как $\lambda = 2$ и $1 - k/\theta_3 = 4$, порядок коклики в Γ не превосходит $1408 \cdot 10/40 = 352$. В [9] изучается класс графов $G(s, t, \psi)$ с массивом пересечений $\{(t+1)s, ts, (t-1)(s+1-\psi); 1, 2, (t+1)\psi\}$ (наш массив получается при $t = 9, s = 3, \psi = 1$).

Теорема 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из

G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Ω — пустой граф, либо $p = 11$, $\alpha_1(g) = 88s + 110t + 22$ и $\alpha_3(g) = 528s - 330t + 990$, либо $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20t + 16(s - 16)/3$ и $\alpha_3(g) = 32s - 60t + 256$;
- (2) Ω является n -кликкой, $p = 3$, $n = 1, 4$, $\alpha_3(g) = 216s - 3\alpha_1(g) + 6n - 24$ и $\alpha_1(g) = 30l - 2n + 24s - 88$.
- (3) Ω является m -кликкой, $1 < m \leq 352$, либо Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3, $p = 5$, $m = 5l + 3$, $\alpha_1(g) = 10(5t + 4s - l)$ и $\alpha_3(g) = 30(8s - 5t + 2l + 31)$, либо Ω содержит вершины, находящиеся на расстоянии 2, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20t + 24s - 2m + 104$ и $\alpha_3(g) = 3(48s + 4m - 20t + 248)$;
- (4) Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 7$.

Следствие. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений {30, 27, 24; 1, 2, 10} и неразрешимая группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа. Тогда $S(G)$ является неединичной {2}-группой, цоколь \bar{T} группы $\bar{G} = G/S(G)$ — простая неабелева группа, и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) $\bar{T} \cong L_2(11)$ и $\bar{T}_a \cong A_5$ — подгруппа индекса 11 из \bar{T} ;
- (2) $\bar{T} \cong M_{11}$ и $\bar{T}_a \cong M_{10}$ — подгруппа индекса 11 из \bar{T} ;
- (3) $\bar{T} \cong M_{22}$ и либо $\bar{T}_a \cong L_3(4)$ — подгруппа индекса 22 из \bar{T} , либо $\bar{T}_a \cong A_7$ — подгруппа индекса 176 из \bar{T} ;
- (4) $\bar{T} \cong U_5(2)$ и $\bar{T}_a \cong Z_3 \times U_4(2)$ — подгруппа индекса 176 из \bar{T} ;
- (5) $\bar{T} \cong A_{11}$ и $\bar{T}_a \cong A_{10}$ — подгруппа индекса 11 из \bar{T} ;
- (6) $\bar{T} \cong \text{HiS}$ и $\bar{T}_a \cong U_3(5).Z_2$ — подгруппа индекса 176 из \bar{T} .

В доказательстве теоремы применяется метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [10]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений (X, \mathcal{R}) с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \leq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X , в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l .

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l . Тогда собственные значения $p_1(0), \dots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \dots, m_d$. Матрицы P и Q , у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \text{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство \mathbf{C}^v является ортогональной прямой суммой собственных подпространств W_0, \dots, W_d матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ . Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A , поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i} . Тогда (см. § 3.7 [6]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$. Тогда ненулевые числа пересечений равны

- (1) $p_{11}^1 = 2, p_{12}^1 = 27, p_{22}^1 = 54, p_{23}^1 = 324, p_{33}^1 = 648;$
- (2) $p_{11}^2 = 2, p_{12}^2 = 4, p_{13}^2 = 24, p_{22}^2 = 136, p_{23}^2 = 264, p_{33}^2 = 684;$
- (3) $p_{12}^3 = 10, p_{13}^3 = 20, p_{22}^3 = 110, p_{23}^3 = 285, p_{33}^3 = 666.$

Доказательство. Прямые вычисления. \square

Лемма 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 384, χ_3 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 132. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l , взаимно простого с $|g|$, $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g) + 6\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/90 + 128/15$, $\chi_3(g) = (6\alpha_0(g) - 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/72 + 44/3$. Если $|g| = p$ — простое число, то $384 - \chi_1(g)$ и $132 - \chi_3(g)$ делятся на p .

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 384 & 512/5 & 128/15 & -64/9 \\ 891 & -297/5 & -121/5 & 11 \\ 132 & -44 & 44/3 & -44/9 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (270\alpha_0(g) + 72\alpha_1(g) + 6\alpha_2(g) - 5\alpha_3(g))/990$. Подставляя $\alpha_2(g) = 1408 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g) + 6\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/90 + 128/15$.

Аналогично, $\chi_3(g) = (27\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g) + 3\alpha_2(g) - \alpha_3(g))/288$. Подставляя $\alpha_2(g) = 1408 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_3(g) = (6\alpha_0(g) - 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/72 + 44/3$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 2 [8]. \square

Лемма 3. Пусть G — группа подстановок, действующая на конечном множестве Ω и p — простое число. Если для любого $\alpha \in \Omega$ подгруппа G_α содержит такую p -подгруппу X_α , что $\text{Fix}(X_\alpha) = \{\alpha\}$, то G транзитивна на Ω .

Доказательство. Пусть α, β — две точки из Ω . По условию длина каждой X_α -орбиты, отличной от $\{\alpha\}$, делится на p . Аналогично, длина каждой X_β -орбиты, отличной от $\{\beta\}$, делится на p .

Положим $H = \langle X_\alpha, X_\beta \rangle$. Тогда каждая H -орбита является объединением X_α -орбит, поэтому длина каждой H -орбиты, отличной от α^H , делится на p . Аналогично, длина каждой H -орбиты, отличной от β^H , делится на p , поэтому α и β лежат в одной H -орбите.

Таким образом, группа $H = \langle X_\alpha \mid \alpha \in \Omega \rangle$ транзитивна на Ω . \square

3. АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого

порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Если $p > 29$, то вместе с вершиной a подграф Ω содержит $[a]$. Противоречие с тем, что тогда $\Omega = \Gamma$. Значит, $p \leq 29$.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 11$, $\alpha_1(g) = 88s + 110t + 22$ и $\alpha_3(g) = 528s - 330t + 990$, либо $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20t + 16(s - 16)/3$ и $\alpha_3(g) = 32s - 60t + 256$;*

(2) *если Ω является n -кликкой, то $p = 3$, $n = 1, 4$, $\alpha_3(g) = 216s - 3\alpha_1(g) + 6n - 24$ и $\alpha_1(g) = 30l - 2n + 24s - 88$.*

(3) *если Ω является m -коккликкой, $1 < m$, то $m \leq 352$, либо Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3, $p = 5$, $m = 5l + 3$, $\alpha_1(g) = 10(5t + 4s - l)$ и $\alpha_3(g) = 30(8s - 5t + 2l + 31)$, либо Ω содержит вершины, находящиеся на расстоянии 2, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20t + 24s - 2m + 104$ и $\alpha_3(g) = 3(48s + 4m - 20t + 248)$.*

Доказательство. Если Ω — пустой граф то $p = 2$ или $p = 11$. Пусть $p = 11$. Тогда $\chi_3(g) = (-3\alpha_1(g) - \alpha_3(g) + 1056)/72$, число $\chi_1(g) = (6\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/90 + 128/15$ сравнимо с -1 по модулю 11. Отсюда $\alpha_3(g) = 792s - 3\alpha_1(g) + 1056$, $(\alpha_1(g) - 88s - 32)/10 = 11t - 1$, поэтому $\alpha_1(g) = 88s + 110t + 22$ и $\alpha_3(g) = 528s - 330t + 990$.

Пусть $p = 2$. Тогда число $\chi_3(g) = (-3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/72 + 44/3$ четно, $\alpha_3(g) = 48s - 3\alpha_1(g)$ и число $\chi_1(g) = (3\alpha_1(g) - 16s + 256)/30$ четно. Отсюда $\alpha_1(g) = 20t + 16(s - 16)/3$ и $\alpha_3(g) = 32s - 60t + 256$.

Пусть Ω является n -кликкой. В случае $n = 1$ число p делит 30 и 1407, поэтому $p = 3$. Если $n > 1$, то $n = 4$, с учетом равенства $p_{12}^1 = 27$ снова $p = 3$. Число $\chi_3(g) = (2n - \alpha_1(g) - \alpha_3(g))/3 + 352/24$ делится на 3 и $\alpha_3(g) = 3(72s - \alpha_1(g) + 2n - 8)$. Далее, число $\chi_1(g) = (4n + \alpha_1(g) - (36s - \alpha_1(g))/2 + n - 4) + 128/15$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 30l - 2n + 24s - 88$.

Пусть Ω является m -коккликкой, $m > 1$. Тогда p делит 30 и $1408 - m$. Если Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3, то p делит $p_{33}^3 - (m - 2) = 668 - m$ и $k_3 - (m - 1) = 973 - m$, поэтому $p = 5$, $m = 5l + 3$. В этом случае число $\chi_3(g) = (10l - \alpha_1(g) - \alpha_3(g))/3 + 358/24$ сравнимо с 2 по модулю 5, $\alpha_3(g) = 3(120s - \alpha_1(g) + 10l + 310)$. Далее, число $\chi_1(g) = l + \alpha_1(g)/10 - 4s - 1$ сравнимо с 4 по модулю 5, $\alpha_1(g) = 10(5t + 4s - l)$ и $\alpha_3(g) = 30(8s - 5t + 2l + 31)$.

Если Ω содержит вершины a, b , находящиеся на расстоянии 2, то $p = 2$ число $\chi_3(g) = (2m - \alpha_1(g) - \alpha_3(g))/3 + 352/24$ четно и $\alpha_3(g) = 3(72s + 2m - \alpha_1(g) + 352)$. Далее, число $\chi_1(g) = (3m + 3\alpha_1(g))/2 - 36s - 176/15$ четно, $\alpha_1(g) = 20t + 24s - 2m + 104$ и $\alpha_3(g) = 3(48s + 4m - 20t + 248)$ \square

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω содержит ребро, то Ω не является объединением изолированных клик;*

(2) *если Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c , то $p \leq 7$.*

Доказательство. Пусть Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик. Так как $p_{12}^1 = 27$, то $p = 3$.

Теперь вершины из разных клик находятся на расстоянии 3 в Γ . Противоречие с тем, что $p_{12}^3 = 10$.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c , Δ — связная компонента графа Ω содержащая a .

Если $p > 2$, то по теореме Боуза-Дулинга Δ — вполне регулярный граф с параметрами $(v', k', 2, 2)$. Если $p > 3$, то $\Gamma_3(a)$ содержит вершину z из Ω . Если $p > 5$, то $\Gamma_2(a) \cap [z]$ содержит вершину из Ω .

Если $p = 23$, то $k' = 7$ и $\Gamma_2(a) \cap [z]$ содержит 10 вершин из Ω , противоречие. Если $p = 19$, то $k' = 11$ и $\Gamma_2(a) \cap [z]$ содержит 10 вершин из Ω . Заметим, что сильно регулярный граф с параметрами $(56, 11, 2, 2)$ не существует, поэтому Δ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{11, 8, 5; 1, 2, 10\}$, противоречие.

Если $p = 17$, то $k' = 13$ и $\Gamma_2(a) \cap [z]$ содержит 10 вершин из Ω . Заметим, что сильно регулярный граф с параметрами $(79, 13, 2, 2)$ не существует, поэтому Δ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{13, 10, 7; 1, 2, 10\}$, противоречие.

Если $p = 13$, то $k' = 17$ и $\Gamma_2(a) \cap [z]$ содержит 10 вершин из Ω . Заметим, что сильно регулярный граф с параметрами $(137, 17, 2, 2)$ не существует, поэтому Δ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{13, 10, 11; 1, 2, 10\}$, противоречие.

Если $p = 11$, то $k' = 19$ и $\Gamma_2(a) \cap [z]$ содержит 10 вершин из Ω . Заметим, что сильно регулярный граф с параметрами $(172, 19, 2, 2)$ не существует, поэтому диаметр Δ больше 2. Если Ω — несвязный граф, то для $y \in \Omega - \Delta$ степень a в графе $\Gamma_3(y)$ равна 20, противоречие.

Положим $u^{(g)} = [a] - \Omega$. Тогда для любой вершины $e \in \Omega(a)$ подграф $[u] \cap [e]$ содержит a и вершину из $\Gamma - \Omega$. Если вершина $w \in [u] - (u^{(g)} \cup \{a\})$ не смежна с вершинами из $(u^{(g)} \cup [a])$, то $[a] \cap [w]$ содержит единственную вершину, противоречие. Лемма доказана. \square

Из лемм 4–5 следует теорема 1.

4. ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЙ ГРАФ С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$, ВЕРШИННО СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$ и неразрешимая группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве его вершин. Ввиду теоремы 1 имеем $|G| = 2^{\beta} 3^{\gamma} 5^{\delta} 7^{\epsilon} 11$ и $|G : G^a| = 1408 = 2^7 11$.

Лемма 6. Пусть f — элемент порядка 11 из G , g — элемент простого порядка $p \leq 7$ из $C_G(f)$, $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из утверждений:

(1) Ω — пустой граф, $p = 2$ и для $\alpha_1(g) = 20t + 16(s - 16)/3$, $\alpha_3(g) = 32s - 60t + 256$ числа $2t + 1$ и s делятся на 11;

(2) Ω состоит из 33 вершин, попарно находящиеся на расстоянии 3, $p = 5$, для $\alpha_1(g) = 10(5t + 4s - 6)$ и $\alpha_3(g) = 30(8s - 5t + 43)$ числа t и $s + 4$ делятся на 11;

(3) Ω является m -кликкой, содержащей вершины, находящиеся на расстоянии 2, $p = 2$, для $\alpha_1(g) = 20t + 24s - 2m + 104$ и $\alpha_3(g) = 3(48s + 4m - 20t + 248)$ числа s и $3t - 2$ делятся на 11;

(4) Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 3$.

Доказательство. По теореме $\text{Fix}(f)$ — пустой граф, $\alpha_3(f) = 528s - 330t + 990$ и $\alpha_1(f) = 88s + 110t + 22$.

Пусть g — элемент простого порядка $p \leq 7$ из $C_G(f)$, $\Omega = \text{Fix}(g)$. Если Ω — пустой граф, то $p = 2$ и числа $\alpha_1(g) = 20t + 16(s - 16)/3$, $\alpha_3(g) = 32s - 60t + 256$

делятся на 11. Отсюда 11 делит $-s + 6t + 3$ и $-2t - 2s - 1$, поэтому $2t + 1$ и s делятся на 11.

Если Ω состоит из $m = 5l + 3$ вершин, попарно находящихся на расстоянии 3, то $p = 5, l = 6$, числа $\alpha_1(g) = 10(5t + 4s - 6)$ и $\alpha_3(g) = 30(8s - 5t + 43)$ делятся на 11. Отсюда t и $s + 4$ делятся на 11. Так как $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 10(24s - 15t + 129) \leq 1395$, то $24s - 15t \leq 10$. Теперь $s \leq -7$ и $t \leq 0$, противоречие.

Если Ω является m -кликкой, содержащей вершины, находящиеся на расстоянии 2, то $p = 2$, числа $\alpha_1(g) = 20t + 24s - 2m + 104$ и $\alpha_3(g) = 3(48s + 4m - 20t + 248)$ делятся на 11. Отсюда 11 делит $5t + 6s + 26$ и $12s - 5t + 62$, поэтому s и $3t - 2$ делятся на 11.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c , Δ — связная компонента графа Ω содержащая a . Тогда Δ — вполне регулярный граф с параметрами $(v', k', 2, 2)$.

Если $p = 7$, то $k' = 9, 16, 23$. В случае $k' > 9$ некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна по крайней мере с 2 вершинами из Ω , противоречие. Значит, $k' = 9$ и $21|\Omega| \leq (1408 - |\Omega|)$. Так как число $|\Omega|$ делится на 11 и сравнимо с 1 по модулю 7, то имеем противоречие.

Если $p = 5$, то, повторив рассуждения из предыдущего абзаца, получим $k' = 10$ и $20|\Omega| \leq (1408 - |\Omega|)$. Так как число $|\Omega|$ делится на 11 и сравнимо с 3 по модулю 5, то $|\Omega| = 33$, противоречие. Лемма доказана. \square

Приступим к доказательству следствия. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$, неразрешимая группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин и a — вершина графа Γ . Через \bar{T} обозначим цокль группы $\bar{G} = G/S(G)$, через Q силовскую 2-подгруппу из $S(G)$ и через S силовскую 3-подгруппу из $S(G)$. По теореме 1 $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Пусть f — элемент порядка 11 из G .

Лемма 7. *$S(G)$ является неединичной $\{2\}$ -группой, цокль \bar{T} группы $\bar{G} = G/S(G)$ — простая неабелева группа, и выполняется одно из следующих утверждений:*

- (1) $\bar{T} \cong L_2(11)$ и $\bar{T}_a \cong A_5$ — подгруппа индекса 11 из \bar{T} ;
- (2) $\bar{T} \cong M_{11}$ и $\bar{T}_a \cong M_{10}$ — подгруппа индекса 11 из \bar{T} ;
- (3) $\bar{T} \cong M_{22}$ и либо $\bar{T}_a \cong L_3(4)$ — подгруппа индекса 22 из \bar{T} , либо $\bar{T}_a \cong A_7$ — подгруппа индекса 176 из \bar{T} ;
- (4) $\bar{T} \cong U_5(2)$ и $\bar{T}_a \cong Z_3 \times U_4(2)$ — подгруппа индекса 176 из \bar{T} ;
- (5) $\bar{T} \cong A_{11}$ и $\bar{T}_a \cong A_{10}$ — подгруппа индекса 11 из \bar{T} ;
- (6) $\bar{T} \cong \text{HiS}$ и $\bar{T}_a \cong Z_3 \times U_3(5).Z_2$ — подгруппа индекса 176 из \bar{T} .

Доказательство. Ввиду леммы 6 число 11 не делит $|S(G)|$. По [13, таблица 1] группа \bar{T} изоморфна $L_2(11), M_{11}, M_{12}, U_5(2), M_{22}, A_{11}, A_{12}, \text{McL}, \text{HiS}$ или $U_6(2)$.

Напомним, что \bar{T} содержит подгруппу \bar{T}_a индекса, делящего $2^7 \cdot 11$. Отсюда выполняется одно из утверждений (1–6).

Так как $|S(G) : S(G)_a|$ является степенью 2, то $S(G)$ является 2-группой. Лемма доказана. \square

Из леммы 7 получаем следствие.

REFERENCES

- [1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989. MR1002568
- [2] A.A. Makhnev, M.S. Nirova, *On distance-regular graphs with $\lambda = 2$* , *Jornal of Siberian Federal Univ.*, **7**:2 (2014), 188–194.
- [3] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, *Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{18, 15, 9; 1, 1, 10\}$* , *Commun. Math. Stat.*, **3**:4 (2015), 527–534. MR3432219
- [4] K.S. Efimov, A.A. Makhnev, *Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$* , *Ural Mathematical Journal*, **4**:2 (2018), 69–78. MR3901586
- [5] A.A. Makhnev, N.D. Zyulyarkina, *On automorphisms of distance-regular graph with intersection array $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$* , *Doklady Akademii nauk*, **439**:4 (2011), 443–447. MR2893565
- [6] A.A. Makhnev, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{33, 30, 15; 1, 2, 15\}$* , *Doklady Mathematics*, **90**:3 (2014), 743–747. MR3410020
- [7] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$* , *Algebra i Logika*, **51**:4 (2012), 476–495. MR3051818
- [8] A.A. Makhnev, M.S. Nirova, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$* , *Doklady Mathematics*, **87**:3 (2013), 269–273. Zbl 1297.05165
- [9] S. Bang, J.H. Koolen, *On geometric distance-regular graphs with diameter three*, *Europ. J. Comb.*, **36** (2014), 331–341. MR3131899
- [10] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math Soc. Student Texts **45**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. MR1721031
- [11] A.L. Gavriluk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$* , *Doklady Akademii nauk*, **432**:5 (2010), 512–515. MR2766516
- [12] A. Brouwer, W. Haemers, *The Gewirtz graph: an exercise in the theory of graph spectra*, *Europ. J. Comb.*, **14** (1993), 397–407. MR1241907
- [13] A.V. Zavaritsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **6** (2009), 1–12. MR2586673

ALEXANDR ALEKSEEVICH MAKHNEV

N.N. KRASOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
16, S. KOVALEVSKOY STR.,
EKATERINBURG, 620990, RUSSIA
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

VERONIKA IGOREVNA BELOUSOVA

URAL FEDERAL UNIVERSITY NAMED AFTER THE FIRST PRESIDENT OF RUSSIA B.N. YELTSIN,
19, MIRA STR.,
EKATERINBURG, 620002, RUSSIA
E-mail address: vkazarina@mail.ru