FINITE ALMOST SIMPLE GROUPS WHOSE GRUENBERG–KEGEL GRAPHS COINCIDE WITH GRUENBERG–KEGEL GRAPHS OF SOLVABLE GROUPS

(in Russian, English abstract)

I. B. Gorshkov[1], N. V. Maslova[1,2]
[1]Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,
[2]Ural Federal University
ilygor8@gmail.com, butterson@mail.ru

Abstract. Let G be a finite group. Denote by $\pi(G)$ the set of all prime divisors of the order of G and by $\omega(G)$ the *spectrum* of G, i.e. the set of all its element orders. The set $\omega(G)$ defines the *Gruenberg–Kegel graph* (or the *prime graph*) $\Gamma(G)$ of G; in this graph the vertex set is $\pi(G)$ and different vertices p and q are adjacent if and only if $pq \in \omega(G)$.

In [J. Group Theory. Vol. 2, no. 2 (1999). P. 157–172] Lucido proved that if G is a finite solvable group then $\Gamma(G)$ does not contain a 3-coclique. In [J. Algebra. Vol. 442 (2015). P. 397–422] Gruber et. al. proved that a graph is isomorphic to the Gruenberg–Kegel graph of a finite solvable group if and only if its complement is 3-colorable and triangle free. In [Proc. Steklov Inst. Math. Vol. 283, suppl. 1 (2013). P. 139–145] Zinov'eva and Mazurov described finite simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs coincide with Gruenberg–Kegel graphs of Frobenius groups or 2-Frobenius groups. It is not difficult to prove these simple groups are exactly all finite simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs coincide with Gruenberg–Kegel graphs of finite solvable groups. Our aim is to obtain similar results for finite almost simple groups. In this paper, we prove the following theorem.

Theorem 1. Let G be a finite almost simple group. Then the following conditions are equivalent:
(1) $\Gamma(G)$ does not contain a 3-coclique;
(2) $\Gamma(G)$ is isomorphic to the Gruenberg–Kegel graph of a finite solvable group;
(3) $\Gamma(G)$ is equal to the Gruenberg–Kegel graph of an appropriate finite solvable group.

The following question naturally arises: is there a graph Γ without 3-cocliques such that the complement of Γ is not 3-colorable and Γ is isomorphic to the Gruenberg–Kegel graph of an appropriate finite non-solvable group?

Moreover, we obtain an explicit description of finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs coincide with Gruenberg–Kegel graphs of finite solvable groups. We prove the following theorem.

Theorem 2. Let G be a finite almost simple group such that $S = Soc(G)$ is isomorphic to one of the following simple groups: A_n, where $n \geq 5$; $PSL_n(q)$, where $n \geq 2$ and $(n,q) \neq (2,2),(2,3)$; $PSU_n(q)$, where $n \geq 3$ and $(n,q) \neq (3,2)$; $PSp_n(q)$, where $n \geq 4$ is even; $P\Omega_n(q)$, where $n \geq 7$ is odd; $P\Omega_n^{\pm}(q)$, where $n \geq 8$ is even; an exceptional group of Lie type over the field of order q; a sporadic simple group. Let f be the standard field automorphism of S and g be the standard graph automorphism of S. Then $\Gamma(G)$ does not contain a 3-coclique if and only if $\pi(G) = \pi(S)$ and one of the following conditions holds:
(1) S is isomorphic to one of the following groups: A_9, A_{10}, A_{12}, $PSU_3(9)$, $PSU_4(2)$, $PSp_6(2)$, $P\Omega_8^+(2)$, ${}^3D_4(2)$;
(2) G is isomorphic to one of the following groups: S_5, S_6, $PGL_2(9)$, M_{10}, $Aut(A_6)$, S_8, $Aut(PSL_2(8))$, $Aut(PSL_3(2))$, $PGL_3(4)\langle f\rangle$, $PGL_3(4)\langle g\rangle$, $Aut(PSL_3(4))$, $PSL_4(4)\langle f\rangle$, $PSL_4(4)\langle g\rangle$, $Aut(PSL_4(4))$, $Aut(PSU_5(2))$;
(3) $G \cong PGL_2(p)$, where p is either a Fermat prime or a Mersenne prime;
(4) $S \cong PSL_2(2^m)$, where $m \geq 4$ is even and $\{2\} \subseteq \pi(G/S)$;
(5) $S \cong PSL_3(p)$, where p is a Mersenne prime and $(p-1)_3 \neq 3$;
(6) $S \cong PSL_3(p)$, where p is either a Fermat prime or a Mersenne prime, $(p-1)_3 = 3$ and $Inndiag(S) \leq G \leq Aut(S)$;
(7) $S \cong PSL_3(2^m)$, where $m \geq 3$, $(2^m-1)_3 = 3$ and $Inndiag(S)\langle g\rangle \leq G \leq Aut(PSL_3(2^m))$;
(8) $S \cong PSL_3(2^m)$, where $m \geq 3$, $(2^m-1)_3 \neq 3$ and $S\langle g\rangle \leq G \leq Aut(PSL_3(2^m))$;
(9) $S \cong PSL_4(2^m)$, where $m \geq 3$ and $S\langle g\rangle \leq G \leq Aut(PSL_4(2^m))$;
(10) $S \cong PSU_3(p)$, where p is a Fermat prime and $(p+1)_3 \neq 3$;
(11) $S \cong PSU_3(p)$, where p is a Fermat prime, $(p+1)_3 = 3$ and $Inndiag(S) \leq G \leq Aut(S)$;
(12) $S \cong PSU_3(2^m)$, where $m \geq 2$, $(2^m-1)_3 = 3$, $\{2\} \subseteq \pi(G/S)$ and $Inndiag(S) \leq G \leq Aut(S)$;
(13) $S \cong PSU_3(2^m)$, where $m \geq 2$, $(2^m-1)_3 \neq 3$ and $\{2\} \subseteq \pi(G/S)$;
(14) $S \cong PSU_4(2^m)$, where $m \geq 2$ and $\{2\} \subseteq \pi(G/S)$;
(15) $S \cong PSp_4(q)$.

Keywords: finite group, solvable group, almost simple group, Gruenberg–Kegel graph (prime graph).

The work is supported by the grant of the President of the Russian Federation for young scientists (grant no. MK-6118.2016.1), by the Integrated Program for Fundamental Research of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (project no. 15-16-1-5), by the Program for State Support of Leading Universities of the Russian Federation (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013). The first author is supported by the grant FAPESP-2014/08964-1. The second author is a winner of the competition of young mathematicians of the Dmitry Zimin Foundation "Dynasty" (in 2013 year).

Введение

Мы будем употреблять термин «группа» в значении «конечная группа» и термин «граф» в значении «конечный граф без петель и кратных ребер».

Спектром группы G называется множество $\omega(G)$ порядков всех ее элементов. Множество всех простых чисел, входящих в спектр группы G, называется *простым спектром группы* G и обозначается через $\pi(G)$. Спектр $\omega(G)$ определяет *граф Грюнберга–Кегеля* (или *граф простых чисел*) $\Gamma(G)$ группы G, вершинами которого являются простые числа из $\pi(G)$, и две различные вершины r и s смежны тогда и только тогда, когда число rs принадлежит множеству $\omega(G)$. Обозначим через $t(G)$ наибольшее число простых чисел в $\pi(G)$, попарно не смежных в $\Gamma(G)$.

Напомним, что под равенством графов Грюнберга–Кегеля групп мы понимаем совпадение их множеств вершин (то есть простых спектров групп) и множеств ребер. Под изоморфизмом графов Грюнберга–Кегеля групп мы понимаем их изоморфизм как абстрактных графов.

В [1, теорема 1]* было замечено, что графы Грюнберга–Кегеля разрешимых групп не содержат 3-коклик, иными словами $t(H) \leq 2$ для любой разрешимой группы H. В [2] было показано, что граф изоморфен графу Грюнберга–Кегеля разрешимой группы тогда и только тогда, когда он не содержит 3-коклик и его дополнение 3-раскрашиваемо. В [3, теоремы 1, 3] описаны простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых равны графам Грюнберга–Кегеля разрешимых групп Фробениуса и двойных групп Фробениуса. Из [4, таблицы 2,3] и [5, таблицы 2, 3, 4] следует, что группами из [3, теоремы 1, 3] исчерпываются все простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых равны графам Грюнберга–Кегеля разрешимых групп. Цель настоящей работы — получить подобное описание для почти простых групп. Нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G — почти простая группа. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) $\Gamma(G)$ *не содержит* 3*-коклик*;

(2) $\Gamma(G)$ *изоморфен графу Грюнберга–Кегеля некоторой разрешимой группы*;

(3) $\Gamma(G)$ *равен графу Грюнберга–Кегеля некоторой разрешимой группы.*

Естественным образом возникает следующий

ВОПРОС. *Существует ли граф без* 3*-коклик, который изоморфен графу Грюнберга–Кегеля некоторой неразрешимой группы, и не изоморфен графу Грюнберга–Кегеля никакой разрешимой группы*?

Напомним, что через $Soc(G)$ обозначается цоколь группы G (подгруппа, порожденная всеми ее минимальными неединичными нормальными подгруппами). Пусть $q = p^m$ и G — почти простая группа такая, что подгруппа $S = Soc(G)$ изоморфна одной из простых групп: A_n, где $n \geq 5$; $PSL_n(q)$, где $n \geq 2$ и $(n, q) \neq (2, 2), (2, 3)$; $PSU_n(q)$, где $n \geq 3$ и $(n, q) \neq (3, 2)$; $PSp_n(q)$, где $n \geq 4$ четно; $P\Omega_n(q)$, где $n \geq 7$ нечетно; $P\Omega_n^{\pm}(q)$, где $n \geq 8$ четно; простой исключительной группе лиева типа над полем порядка q или одной из конечных простых спорадических групп. Необходимые сведения о строении групп автоморфизмов конечных простых линейных и унитарных групп приведены далее в леммах 5 и 6. Ключевым для доказательства теоремы 1 является следующий полученный нами результат, имеющий независимый интерес.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G — почти простая группа и $S = Soc(G)$. Тогда $\Gamma(G)$ не содержит* 3*-коклик тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *группа S изоморфна одной из следующих групп*: A_9, A_{10}, A_{12}, $PSU_3(9)$, $PSU_4(2)$, $PSp_6(2)$, $P\Omega_8^+(2)$, ${}^3D_4(2)$;

(2) *группа G изоморфна одной из следующих групп*: S_5, S_6, $PGL_2(9)$, M_{10}, $Aut(A_6)$, S_8, $Aut(PSL_2(8))$, $Aut(PSL_3(2))$, $PGL_3(4)\langle f\rangle$, $PGL_3(4)\langle g\rangle$, $Aut(PSL_3(4))$, $PSL_4(4)\langle f\rangle$, $PSL_4(4)\langle g\rangle$, $Aut(PSL_4(4))$, $Aut(PSU_5(2))$;

(3) $G \cong PGL_2(p)$, p *— простое число Ферма или Мерсена*;

(4) $S \cong PSL_2(2^m)$, $m \geq 4$ *четно и* $\{2\} \subseteq \pi(G/S) \subseteq \pi(S)$;

(5) $S \cong PSL_3(p)$, p *— простое число Мерсена и* $(p-1)_3 \neq 3$;

(6) $S \cong PSL_3(p)$, p *— простое число Мерсена,* $(p-1)_3 = 3$ *и* $Inndiag(S) \leq G \leq Aut(S)$;

(7) $S \cong PSL_3(2^m)$, $m \geq 3$, $(2^m-1)_3 = 3$, $\pi(G) = \pi(S)$ *и* $Inndiag(S)\langle g\rangle \leq G \leq Aut(S)$;

(8) $S \cong PSL_3(2^m)$, $m \geq 3$, $(2^m-1)_3 \neq 3$, $\pi(G) = \pi(S)$ *и* $S\langle g\rangle \leq G \leq Aut(S)$;

*Настоящий результат был получен М.С. Лучидо в 1999 г., однако он напрямую следует из более ранних результатов Г. Хигмана [6, теорема 1] и Ф. Холла [7, теорема 6.4.1].

(9) $S \cong PSL_4(2^m)$, $m \geq 3$, $\pi(G) = \pi(S)$ *и* $S\langle g\rangle \leq G \leq Aut(S)$;
(10) $S \cong PSU_3(p)$, p *— простое число Ферма и* $(p+1)_3 \neq 3$;
(11) $S \cong PSU_3(p)$, p *— простое число Ферма,* $(p+1)_3 = 3$ *и* $Inndiag(S) \leq G \leq Aut(S)$;
(12) $S \cong PSU_3(2^m)$, $m \geq 2$, $(2^m-1)_3 = 3$, $\{2\} \subseteq \pi(G/S) \subseteq \pi(S)$ *и* $Inndiag(S) \leq G \leq Aut(S)$;
(13) $S \cong PSU_3(2^m)$, $m \geq 2$, $(2^m-1)_3 \neq 3$ *и* $\{2\} \subseteq \pi(G/S) \subseteq \pi(S)$;
(14) $S \cong PSU_4(2^m)$, $m \geq 2$ *и* $\{2\} \subseteq \pi(G/S) \subseteq \pi(S)$;
(15) $S \cong PSp_4(q)$ *и* $\pi(G) = \pi(S)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если G — почти простая группа такая, что $\Gamma(G)$ не сдержит 3-коклик, то $\pi(G) = \pi(Soc(G))$.

Вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [7, 8, 9, 10].

Если q — натуральное число, r — нечётное простое число и $(q,r) = 1$, то $e(r,q)$ обозначает мультипликативный порядок числа q по модулю r, равный минимальному натуральному числу m, удовлетворяющему условию $q^m \equiv 1 \pmod r$. Для нечётного q положим $e(2,q) = 1$, если $q \equiv 1 \pmod 4$, и $e(2,q) = 2$ в противном случае.

ЛЕММА 1. (следствие теоремы Жигмонди, [11]) *Пусть q — натуральное число, большее 1. Для любого натурального числа m существует простое число r, удовлетворяющее равенству $e(r,q) = m$, за исключением следующих случаев: $q = 2$ и $m = 1$; $q = 3$ и $m = 1$; $q = 2$ и $m = 6$.*

Простое число r, удовлетворяющее условию $e(r,q) = m$, называется примитивным простым делителем числа $q^m - 1$. По лемме 1 такое число существует, за исключением случаев, упомянутых в лемме. Для данного q обозначим через $R_m(q)$ множество всех примитивных простых делителей числа $q^m - 1$. Легко понять, что $R_i(q) \cap R_j(q) = \emptyset$ при любых различных i и j, и если q — степень простого числа, то $R_i(q) \cap \pi(q) = \emptyset$ для любого i.

ЛЕММА 2 (лемма Героно [12]). *Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a, b. Тогда пара $(p^a,\ q^b)$ равна $(3^2,\ 2^3)$, $(p,\ 2^b)$ или $(2^a,\ q)$.*

ЛЕММА 3. *Пусть π — конечное множество простых чисел и Γ — граф, вершинами которого являются простые числа из π. Если $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, причем π_1 и π_2 — непересекающиеся клики в Γ, то существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma = \Gamma(H)$.*

Доказательство. Пусть $\pi_1 = \{p_1, \ldots, p_m\}$, $\pi_2 = \{q_1, \ldots, q_n\}$ и $C = C_{q_1} \times \ldots \times C_{q_n}$ — циклическая группа. Пусть, без ограничения общности, число p_1 не смежно в Γ с числами из множества $\{q_1, \ldots q_k\}$ и смежно с числами из множества $\{q_{k+1}, \ldots, q_n\}$. Ввиду малой теоремы Ферма существует натуральное число m_1 такое, что $p_1^{m_1} - 1$ делится на произведение $q_1 \cdot \ldots \cdot q_k$. Тогда мультипликативная группа F_1^* поля F_1 порядка $p_1^{m_1}$ содержит элемент x_1 порядка $q_1 \cdot \ldots \cdot q_k$. Определим действие группы C на аддитивной группе F_1^+ поля F_1, полагая, что действие порождающего элемента подгруппы $C_{q_1} \times \ldots \times C_{q_k}$ на F_1^+ — это умножение в поле F_1 на элемент x_1, а действие порождающего элемента подгруппы $C_{q_{k+1}} \times \ldots \times C_{q_n}$ на F_1^+ тривиально. Аналогичным образом определим поле F_i и действие группы C на аддитивной группе F_i^+ поля F_i для каждого $p_i \in \pi_1$. Пусть группа H — естественное полупрямое произведение группы $F = F_1^+ \times \ldots F_m^+$ на группу C. Тогда группа H разрешима и граф Грюнберга–Кегеля $\Gamma(H)$ в точности равен графу Γ. Лемма доказана.

Также нам понадобится следующая легко доказываемая

ЛЕММА 4. (см., например, [13, лемма 2]) *Пусть L — группа, $K \lhd L$, $r, s \in \pi(K) \setminus \pi(|L:K|)$. Тогда если простые числа r и s не смежны в $\Gamma(K)$, то они не смежны в $\Gamma(L)$.*

ЛЕММА 5. [10, теорема 4.5.1, предложения 2.5.12, 4.9.1, 4.9.2] *Пусть $S = PSL_n(q)$, где $n \geq 2$, $q = p^m$ и $(n,q) \neq (2,2), (2,3)$, x — элемент простого порядка r в $Aut(S) \setminus Inndiag(S)$ и $S_x = O^{p'}(C_S(x))$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$Aut(S) = Inndiag(S) \rtimes (\Phi \times \langle g\rangle)$, где $Outdiag(S) \cong Z_{(n,\,q-1)}$, $\Phi = \langle f\rangle \cong Aut(GF(q)) \cong Z_m$ — группа полевых автоморфизмов группы S, $g = 1$ для $n = 2$ и g — графовый автоморфизм порядка 2 группы S для $n \geq 3$, Φ действует на $Outdiag(S)$ так же, как $Aut(GF(q))$ действует на мультипликативную подгруппу из $GF(q)$ того же порядка, что и $Outdiag(S)$, и g инвертирует группу $Outdiag(S)$;*

(2) *Если* $x \in Inndiag(S)\Phi$, *то* r *делит* m, $S_x \cong PSL_n(q^{\frac{1}{r}})$ *и* $C_{Inndiag(S)}(x) \cong Inndiag(S_x)$;

(3) *Если* $n \geq 3$, 2 *делит* m *и* $x \in Inndiag(S)f^{\frac{m}{2}}g$, *то* $r = 2$, $S_x \cong PSU_n(q^{\frac{1}{2}})$, *и* $C_{Inndiag(S)}(x) \cong Inndiag(S_x)$;

(4) *Если* $x \in Inndiag(S)g$ *и* n *нечетно, то* $S_x \cong PSp_{n-1}(q)$;

(5) *Если* $x \in Inndiag(S)g$, $n \geq 4$ *четно и* $p = 2$, *то подгруппа* $C_S(x)$ *изоморфна либо* $PSp_n(q)$, *либо централизатору некоторой инволюции в* $PSp_n(q)$;

(6) *Если* $x \in Inndiag(S)g$, $n \geq 4$ *четно и* $p > 2$, *то подгруппа* S_x *изоморфна одной из следующих групп:* $PSp_n(q)$, $P\Omega_n^+(q)$, $P\Omega_n^-(q)$.

ЛЕММА 6. [10, теорема 4.5.1, предложения 2.5.12, 4.9.1, 4.9.2] *Пусть* $S = PSU_n(q)$, *где* $n \geq 3$, $q = p^m$ *и* $(n, q) \neq (3, 2)$, x — *элемент простого порядка* r *в* $Aut(S) \setminus Inndiag(S)$ *и* $S_x = O^{p'}(C_S(x))$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $Aut(S) = Inndiag(S) \leftthreetimes \Phi$, *где* $Outdiag(S) \cong \mathbb{Z}_{(n,q+1)}$, $\Phi = \langle f \rangle \cong Aut(GF(q^2)) \cong Z_{2m}$ — *группа полевых автоморфизмов группы* S, Φ *действует на* $Outdiag(S)$ *так же, как* $Aut(GF(q^2))$ *действует на мультипликативную подгруппу из* $GF(q^2)$ *того же порядка, что и* $Outdiag(S)$;

(2) *Если* $r > 2$, *то* $S_x \cong PSU_n(q^{\frac{1}{p}})$ *и* $C_{Inndiag(S)}(x) \cong Inndiag(S_x)$;

(3) *Если* $r = 2$ *и* n *нечетно, то* $S_x \cong PSp_{n-1}(q)$;

(4) *Если* $r = p = 2$ *и* n *четно, то подгруппа* $C_S(x)$ *изоморфна либо* $PSp_n(q)$, *либо централизатору некоторой инволюции в* $PSp_n(q)$;

(5) *Если* $r = 2$, n *четно и* $p > 2$, *то подгруппа* S_x *изоморфна одной из следующих групп:* $PSp_n(q)$, $P\Omega_n^+(q)$, $P\Omega_n^-(q)$.

Конечные почти простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых не содержат 3-коклик

В настоящем разделе для каждой почти простой группы G мы покажем, что либо $\Gamma(G)$ содержит 3-коклику, либо существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$. Таким образом, мы докажем теорему 2 и импликацию (1) $\Rightarrow$ (3) в теореме 1. Импликация (3) $\Rightarrow$ (2) в теореме 1 очевидна, а импликация (2) $\Rightarrow$ (1) следует из [1, теорема 1].

Зафиксируем обозначение, которое будет действовать до конца настоящей работы. Пусть G — почти простая группа и $S = Soc(G)$.

ЛЕММА 7. *Пусть* S — *спорадическая группа. Тогда*

(1) $\Gamma(G)$ *не содержит* 3-*коклик, если, и только если* $S \cong J_2$;

(2) *если* $S \cong J_2$, *то существует разрешимая группа* H *такая, что* $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Доказательство. Ввиду [9] имеем $|G : S| \leq 2$. Если $S \ncong J_2$, то ввиду [5, табл. 1] граф $\Gamma(S)$ содержит 3-коклику, состоящую из нечетных чисел. Применение леммы 4 завершает доказательство пункта (1).

Если $S \cong J_2$, то ввиду [9] имеем $\pi(S) = \pi(Aut(S)) = \{2, 3, 5\} \cup \{7\}$, и множества $\{2, 3, 5\}$ и $\{7\}$ являются кликами в $\Gamma(S)$. Таким образом, ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. *Пусть* $S \cong A_n$, *где* $n \geq 5$. *Тогда*

(1) $\Gamma(G)$ *не содержит* 3-*коклик, если, и только если либо* $A_6 < G \leq Aut(A_6)$, *либо* $G \in \{S_5, S_8\}$, *либо* $S \in \{A_9, A_{10}, A_{12}\}$;

(2) *если* $\Gamma(G)$ *не содержит* 3-*коклик, то существует разрешимая группа* H *такая, что* $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Доказательство. Ввиду [9] если группа G изоморфна одной из групп: A_5, A_6, A_7, S_7, A_8, A_{11}, S_{11}, то $\Gamma(G)$ содержит 3-колику; если группа G изоморфная одной из групп: S_5, S_6, M_{10}, $PGL_2(9)$, $Aut(A_6)$, S_8, A_9, S_9, A_{10}, S_{10}, A_{12}, S_{12}, то $\Gamma(G)$ не содержат 3-коклик, и легко проверить, что ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Если $13 \leq n \leq 17$, то множество $\{7, 11, 13\}$ образует 3-коклику в $\Gamma(S)$ ввиду [4, предложение 1.1]. Если $n \geq 18$, то по [14, лемма 1] в интервале $((n+1)/2, n)$ лежат по крайней мере три различных нечетных простых числа, которые также образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$ ввиду [4, предложение 1.1]. Применение леммы 4 завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 9. *Пусть* $S \cong PSL_n(q)$, *где* $n \geq 2$, $q = p^m \geq 4$ *и* $(n, q) \neq (2, 2), (2, 3)$. *Тогда*

(1) $\Gamma(G)$ *не содержит 3-коклик, если, и только если выполняется одно из следующих утверждений:*

(*i*) *группа* G *изоморфна одной из следующих групп:* S_5, S_6, $PGL_2(9)$, M_{10}, $Aut(A_6)$, S_8, $Aut(PSL_2(8))$, $Aut(PSL_3(2))$, $PGL_3(4)\langle f\rangle$, $PGL_3(4)\langle g\rangle$, $Aut(PSL_3(4))$, $PSL_4(4)\langle f\rangle$, $PSL_4(4)\langle g\rangle$, $Aut(PSL_4(4))$;

(*ii*) G — *группа из пунктов* (3) − (9) *теоремы* 2;

(2) *для каждой группы* G *из пункта* (1) *леммы граф* $\Gamma(G)$ *равен графу Грюнберга–Кегеля подходящей разрешимой группы.*

Доказательство. Пусть $n = 2$. Тогда ввиду [15, табл. 5.1.A] имеем $|Out(S)| = (q-1, 2)m$ и $\pi(S) = \{p\} \cup R_1(q) \cup R_2(q)$.

Пусть q нечетно и не является числом вида $2^w \pm 1$. Пусть $r_1 \in R_m(p)$ и $r_2 \in R_{2m}(p)$ нечетны. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_1 и r_2 не делят $|Out(S)|$. Если p не делит индекс $|G : S|$, то ввиду леммы 4 числа $\{p, r_1, r_2\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$. Пусть p делит индекс $|G : S|$, тогда p делит m. Пусть x — любой элемент порядка p, y — любой элемент порядка r_1 и z — любой элемент порядка r_2 из G. Тогда y и z лежат в $Inndiag(S)$. Заметим, что в $Inndiag(S)$ нет элементов порядков pr_1 и pr_2. Если $x \in G \setminus Inndiag(S)$, то ввиду леммы 5 имеем $C_{Inndiag(S)}(x) \cong PGL_2(p^{m/p})$, и числа r_1 и r_2 не делят $|C_{Inndiag(S)}(x)|$. Таким образом, числа $\{p, r_1, r_2\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$ ввиду леммы 4.

Пусть q нечетно и $q = 2^w + \varepsilon 1$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Тогда ввиду леммы 2 либо $q = 9$ и случай $S = PSL_2(9) \cong A_6$ рассмотрен в лемме 8, либо $q = p$, $Aut(S) \cong PGL_2(p)$ и $\pi(S) = \pi(Aut(S))$. Заметим, что $t(S) = 3$ ввиду [5, табл. 2]. Если G — группа из пункта (3) теоремы 2, то ввиду [4, предложения $2.1, 3.1, 4.1$] и [16, следствие 2] множества $\{p\}$ и $R_1(p) \cup R_2(p)$ являются кликами в $\Gamma(G)$. Таким образом, ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Пусть $q = 2^m$. Случай $S = PSL_2(4) \cong A_5$ рассмотрен в лемме 8. Ввиду [9] граф $\Gamma(PSL_2(8))$ содержит 3-коклику, а граф $\Gamma(Aut(PSL_2(8)))$ не содержит 3-колик. Кроме того, ввиду [9] имеем $\pi(Aut(PSL_2(8))) = \{2, 3\} \cup \{7\}$, и числа 2 и 3 смежны в $\Gamma(Aut(PSL_2(8)))$. Таким образом, ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(Aut(PSL_2(8))) = \Gamma(H)$.

Пусть $q > 8$, положим $r_1 = 7$ и $r_2 = 13$, если $q = 64$, и $r_1 \in R_m(2)$ и $r_2 \in R_{2m}(2)$ в противном случае. Заметим, что числа r_1 и r_2 не делят m ввиду малой теоремы Ферма. Если индекс $|G : S|$ нечетен, то ввиду [5, табл. 2] и леммы 4 числа $\{2, r_1, r_2\}$ образуют коклику в $\Gamma(G)$. Пусть $r \in \pi(|G : S|) \setminus \pi(S)$. Тогда $r \notin \{2, 3\}$ и r делит m. Пусть x — любой элемент порядка r, y — любой элемент порядка r_1 и z — любой элемент порядка r_2 из G. Тогда y и z лежат в $Inndiag(S)$ и $x \in G \setminus Inndiag(S)$. Ввиду леммы 5 имеем $C_{Inndiag(S)}(x) \cong PSL_2(p^{m/r})$ и числа r_1 и r_2 не делят $|C_{Inndiag(S)}(x)|$. Таким образом, числа $\{r, r_1, r_2\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$. Пусть $\{2\} \subseteq \pi(|G : S|) \subset \pi(S)$. Ввиду [4, предложения $2.1, 3.1, 4.1$] и леммы 5 множества $\{2\} \cup R_1(q)$ и $R_2(q)$ являются кликами в $\Gamma(G)$. Таким образом, если G — группа из пункта (4) теоремы 2, то ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Пусть $n = 3$. Тогда ввиду [15, табл. 5.1.A] имеем $|Out(S)| = 2(q-1, 3)m$ и $\pi(S) = \{p\} \cup R_1(q) \cup R_2(q) \cup R_3(q)$.

Пусть p нечетно и $q + 1$ не является числом вида 2^w. Ввиду [5, табл. 2] в графе $\Gamma(S)$ есть коклика $\{p, r_2, r_3\}$, где $2 \neq r_2 \in R_{2m}(p)$ и $r_3 \in R_{3m}(p)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_2 и r_3 не делят $|Out(S)|$. Если p не делит индекс $|G : S|$, то числа $\{p, r_2, r_3\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$ ввиду леммы 4. Пусть p делит индекс $|G : S|$. Тогда p делит m. Пусть x — любой элемент порядка p, y — любой элемент порядка r_2 и z — любой элемент порядка r_3 из G. Тогда y и z лежат в $Inndiag(S)$. Заметим, что в $Inndiag(S)$ нет элементов порядков pr_2 и pr_3. Если $x \in G \setminus Inndiag(S)$, то ввиду леммы 5 имеем $C_{Inndiag(S)}(x) = PGL_3(p^{m/p})$, и числа r_2 и r_3 не делят $|C_{Inndiag(S)}(x)|$. Таким образом, числа $\{p, r_2, r_3\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$.

Предположим, что $q = 2^w - 1$. Тогда ввиду леммы 2 имеем $q = p$, $Aut(S) \cong PGL_3(q)\langle g\rangle$ и $\pi(S) = \pi(Aut(S))$. Если $(q-1)_3 \neq 3$, то ввиду [4, предложения $2.1, 3.1, 4.1$] множества $\{p\} \cup R_1(q) \cup R_2(q)$ и $R_3(q)$ являются кликами в $\Gamma(G)$. Таким образом, если G — группа из пункта (5) теоремы 2, то ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$. Пусть $(q-1)_3 = 3$. Тогда ввиду [5, табл. 2] множество $\{3, p, r_3\}$, где $r_3 \in R_3(p)$, является 3-кокликой в $\Gamma(S)$. Если $\Gamma(G)$ не содержит 3-коклик, то ввиду леммы 4 имеем $Inndiag(S) \leq G$. Обратно, если $Inndiag(S) \leq G$, ввиду [4, предложения $2.1, 3.1, 4.1$] и [16, следствие 2] множества $\{p\} \cup R_1(q) \cup R_2(q)$ и $R_3(q)$ являются кликами в $\Gamma(G)$. Таким образом, если G — группа из пункта (6) теоремы 2, то ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Пусть $p = 2$. Заметим, что $PSL_3(2) \cong PSL_2(7)$, и если $q = 4$, то ввиду [4, предложения $2.1, 3.1, 4.1$] и леммы 5 граф $\Gamma(G)$ не содержит 3-коклик тогда и только тогда, когда $G \in \{PGL_3(4)\langle f\rangle, PGL_3(4)\langle g\rangle, Aut(PSL_3(4))\}$. Кроме того, $|\pi(Aut(PSL_3(4)))| = 4$, следовательно, если $\Gamma(G)$ не содержит 3-коклик, то ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$. Поэтому можно считать, что $m > 2$.

Если $r \in \pi(|G : S|) \setminus \pi(S)$, то $r \notin \{2, 3\}$ и r делит m. Пусть x — любой элемент порядка r, y — любой элемент порядка $r_2 \in R_{2m}(2)$ и z — любой элемент порядка $r_3 \in R_{3m}(2)$ из G. Тогда y и z лежат в $Inndiag(S)$ и $x \in G \setminus Inndiag(S)$. Ввиду леммы 5 имеем $C_{Inndiag(S)}(x) = PGL_3(2^{m/r})$ и числа r_2 и r_3 не делят $|C_{Inndiag(S)}(x)|$. Таким образом, числа $\{r, r_2, r_3\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$.

Пусть $\pi(G) = \pi(S)$ и $\Gamma(G)$ не содержит 3-коклик.

Если $(q-1)_3 = 3$, то $m \equiv 2, 4 \pmod 6$ и из [5, табл. 2] следует, что в графе $\Gamma(S)$ есть 3-коклика $\{3, r_2, r_3\}$, где $r_2 \in R_{2m}(2)$ и $r_3 \in R_{3m}(2)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_2 и r_3 не делят $|Out(S)|$. Поскольку 3 не делит m, то ввиду леммы 4 имеем $Inndiag(S) \leq G$.

Пусть m нечетно. Тогда $(q-1)_3 = 1$ и $S = Inndiag(S)$. Ввиду [5, табл. 2] в графе $\Gamma(S)$ есть 3-коклика $\{2, r_2, r_3\}$, где $r_3 \in R_{3m}(2)$, $r_2 \in R_{2m}(2)$, если $m \neq 3$, и $r_2 = 3$, если $m = 3$. Ввиду леммы 4 имеем $Inndiag(S)\langle g\rangle \leq G$.

Пусть m четно и $q \neq 16$. Рассмотрим 3-коклику $\{2, r_2, r_3\}$ в $\Gamma(S)$, где $r_2 \in R_{2m}(2)$ и $r_3 \in R_{3m}(2)$. $\Gamma(G)$ не содержит 3-коклик, поэтому числа 2 и r_2 смежны в $\Gamma(G)$ или числа 2 и r_3 смежны в $\Gamma(G)$. В первом случае в $G \setminus Inndiag(S)$ найдется инволюция t, порядок централизатора которой в $Inndiag(S)$ делится на r_2. Ввиду леммы 5 имеем $t \in Inndiag(S)\langle g\rangle \setminus Inndiag(S)$, откуда $S\langle t\rangle \leq G$. Предположим, что числа 2 и r_2 не смежны в $\Gamma(G)$, тогда в $G \setminus Inndiag(S)$ найдется инволюция t_1, порядок централизатора которой в $Inndiag(S)$ делится на r_3. Ввиду леммы 5 имеем $t_1 \in Inndiag(S)f^{\frac{m}{2}}g$. Рассмотрим 3-коклику $\{2, r_2, r_3'\}$ в $\Gamma(S)$, где $r_3' \in R_{\frac{3m}{2}}(2)$. Поскольку числа 2 и r_2 не смежны в $\Gamma(G)$, тогда в $G \setminus Inndiag(S)$ найдется инволюция t_2, порядок централизатора которой в $Inndiag(S)$ делится на r_3'. Ввиду леммы 5 имеем $t_2 \in Inndiag(S)\langle f^{\frac{m}{2}}\rangle \setminus Inndiag(S)$, откуда $t_1t_2 \in Inndiag(S)\langle g\rangle \setminus Inndiag(S)$ и $S\langle t_1t_2\rangle \leq G$. Кроме того, ввиду [10, предложение 4.9.2] любой элемент порядка 2 из $Inndiag(S)\langle g\rangle \setminus Inndiag(S)$ сопряжен с g посредством элемента из S, откуда $S\langle g\rangle \leq G$. Для группы $S = PSL_3(16)$ аналогичный результат можно получить, положив $r_2 = 17$, $r_3 = 13$ и $r_3' = 7$.

Пусть G — группа из пункта (7) или (8) теоремы 2. Из [4, предложения $2.1, 3.1, 4.1$], [16, следствие 2] и [10, предложение 4.9.2] следует, что множества $\{2\} \cup R_1(q) \cup R_2(q)$ и $R_3(q)$ являются кликами в $\Gamma(G)$. Таким образом, ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Пусть $n = 4$. Тогда ввиду [15, табл. 5.1.A] имеем $|Out(S)| = 2(q-1, 4)m$ и $\pi(S) = \{p\} \cup R_1(q) \cup R_2(q) \cup R_3(q) \cup R_4(q)$.

Пусть p нечетно. Ввиду [5, табл. 2] в графе $\Gamma(S)$ есть коклика $\{p, r_3, r_4\}$, где $r_3 \in R_{3m}(p)$ и $r_4 \in R_{4m}(p)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_3 и r_4 не делят $|Out(S)|$. Если p не делит индекс $|G : S|$, то числа $\{p, r_3, r_4\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$ ввиду леммы 4. Пусть p делит индекс $|G : S|$. Тогда p делит m. Пусть x — любой элемент порядка p, y — любой элемент порядка r_3 и z — любой элемент порядка r_4 из G. Тогда y и z лежат в $Inndiag(S)$. Заметим, что в $Inndiag(S)$ нет элементов порядков pr_3 и pr_4. Если $x \in G \setminus Inndiag(S)$, то ввиду леммы 5 имеем $C_{Inndiag(S)}(x) = PGL_4(p^{m/p})$ и числа r_3 и r_4 не делят $|C_{Inndiag(S)}(x)|$. Таким образом, числа $\{p, r_3, r_4\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$.

Пусть $p = 2$. Тогда $S = Inndiag(S)$. Если $q = 2$, то, поскольку $PSL_4(2) \cong A_8$, этот случай рассмотрен в лемме 8. Если $q = 4$, то ввиду [4, предложения $2.1, 3.1, 4.1$] и леммы 5 граф $\Gamma(G)$ не содержит 3-коклик тогда и только тогда, когда $G \in \{PSL_4(4)\langle f\rangle, PGL_4(4)\langle g\rangle, Aut(PSL_4(4))\}$. Кроме того, $|\pi(Aut(PSL_4(4)))| = 5$ и $\Gamma(PSL_4(4))$ содержит треугольник, следовательно, $\Gamma(G)$ не является 5-циклом, откуда если $\Gamma(G)$ не содержит 3-коклик, то ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$. Поэтому можно считать, что $m > 2$.

Пусть $\Gamma(G)$ не содержит 3-коклик. Из [5, табл. 2] следует, что в графе $\Gamma(S)$ есть 3-коклика $\{2, r_3, r_4\}$, где $r_3 \in R_{3m}(2)$ и $r_m \in R_{4m}(2)$. Пусть $r \in \pi(|G : S|) \setminus \pi(S)$. Тогда $r \notin \{2, 3\}$ и r делит m. Пусть x — любой элемент порядка r, y — любой элемент порядка r_3 и z — любой элемент порядка r_4 из G. Тогда y и z лежат в $Inndiag(S)$ и $x \in G \setminus Inndiag(S)$. Ввиду леммы 5 имеем $C_{Inndiag(S)}(x) = PGL_4(2^{m/r})$ и числа r_3 и r_4 не делят $|C_{Inndiag(S)}(x)|$. Таким образом, числа $\{r, r_3, r_4\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$, противоречие. Пусть $\pi(G) = \pi(S)$. Если m нечетно, то $Inndiag(S)\langle g\rangle \leq G$ ввиду леммы 4. Пусть m четно и $q \neq 16$. Так как $\Gamma(G)$ не содержит 3-коклик, то числа 2 и

r_4 смежны в $\Gamma(G)$ или числа 2 и r_3 смежны в $\Gamma(G)$. В первом случае в $G \setminus Inndiag(S)$ найдется инволюция t, порядок централизатора которой в $Inndiag(S)$ делится на r_4. Ввиду леммы 5 имеем $t \in Inndiag(S)\langle g\rangle \setminus Inndiag(S)$, откуда $S\langle t\rangle \leq G$. Предположим, что числа 2 и r_4 не смежны в $\Gamma(G)$, тогда в $G\setminus Inndiag(S)$ найдется инволюция t_1, порядок централизатора которой в $Inndiag(S)$ делится на r_3. Ввиду леммы 5 имеем $t_1 \in Inndiag(S)f^{\frac{m}{2}}g$. Из [5, табл. 2] следует, что в графе $\Gamma(S)$ есть 3-коклика $\{2, r_3', r_4\}$, где $r_3' \in R_{\frac{3m}{2}}(2)$. Поскольку числа 2 и r_4 не смежны в $\Gamma(G)$, в $G\setminus Inndiag(S)$ найдется инволюция t_2, порядок централизатора которой в $Inndiag(S)$ делится на r_3'. Ввиду леммы 5 имеем $t_2 \in Inndiag(S)\langle f^{\frac{m}{2}}\rangle \setminus Inndiag(S)$, откуда $t_1t_2 \in Inndiag(S)\langle g\rangle \setminus Inndiag(S)$ и $S\langle t_1t_2\rangle \leq G$, поэтому $Inndiag(S)\langle g\rangle \leq G$. Для группы $S = PSL_4(16)$ аналогичный результат можно получить, положив $r_4 = 257$, $r_3 = 13$ и $r_3' = 7$.

Пусть G — группа из пункта (9) теоремы 2. Из [4, предложения 2.1, 3.1, 4.1] и [10, предложение 4.9.2] следует, что множества $\{2\} \cup R_2(q) \cup R_4(q)$ и $R_1(q) \cup R_3(q)$ являются кликами в $\Gamma(G)$. Таким образом, ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Пусть $n \geq 5$. Тогда ввиду [15, табл. 5.1.A] имеем $|Out(S)| = 2(q-1, n)m$. Рассмотрим множество $\{a, b, c\}$, где $a \in R_{mn}(p) \subseteq R_n(q)$, $b \in R_{m(n-1)}(p) \subseteq R_{n-1}(q)$ и $c \in R_{m(n-2)}(p) \subseteq R_{n-2}(q)$, если $(m, n, p) \neq (2, 5, 2), (1, 6, 2), (1, 7, 2), (1, 8, 2)$; $\{a, b, c\} = \{7, 17, 31\}$, если $(m, n, p) = (2, 5, 2)$; $\{a, b, c\} = \{5, 7, 31\}$, если $(m, n, p) = (1, 6, 2)$; $\{a, b, c\} = \{5, 31, 127\}$, если $(m, n, p) = (1, 7, 2), (1, 8, 2)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа a, b и c не делят $|Out(S)|$. Из [5, табл. 2] следует, что числа $\{a, b, c\}$ образуют коклику в $\Gamma(S)$, поэтому они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$ ввиду леммы 4. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. *Пусть* $S \cong PSU_n(q)$, *где* $n \geq 3$, $q = p^m \geq 2$ *и* $(n, q) \neq (3, 2)$. *Тогда*

(1) $\Gamma(G)$ *не содержит* 3-*коклик, если, и только если выполняется одно из следующих утверждений*:

(*i*) S *изоморфна одной из групп* $PSU_3(9)$ *или* $PSU_4(2)$;

(*ii*) $G \cong Aut(PSU_5(2))$;

(*iii*) G — *группа из пунктов* (10) – (14) *теоремы* 2;

(2) *для каждой группы* G *из пункта* (1) *леммы граф* $\Gamma(G)$ *равен графу Грюнберга–Кегеля подходящей разрешимой группы.*

Доказательство. Пусть $n = 3$. Тогда ввиду [15, табл. 5.1.A] имеем $|Out(S)| = 2m(q+1, 3)$ и $\pi(S) = \{p\} \cup R_1(q) \cup R_2(q) \cup R_6(q)$.

Пусть p нечетно и $q-1$ не является числом вида 2^w. Ввиду [5, табл. 2] в графе $\Gamma(S)$ есть коклика $\{p, 3, r_1, r_6\}$, где $2 \neq r_1 \in R_m(p)$ и $r_6 \in R_{6m}(p)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_1 и r_6 не делят $|Out(S)|$. Если p не делит индекс $|G : S|$, то числа $\{p, r_1, r_6\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$ ввиду леммы 4. Пусть p делит индекс $|G : S|$. Тогда p делит m. Пусть x — любой элемент порядка p, y — любой элемент порядка r_1 и z — любой элемент порядка r_6 из G. Тогда y и z лежат в $Inndiag(S)$. Заметим, что в $Inndiag(S)$ нет элементов порядков pr_1 и pr_6. Если $x \in G \setminus Inndiag(S)$, то ввиду леммы 5 имеем $C_{Inndiag(S)}(x) = PGU_3(p^{m/p})$, и числа r_1 и r_6 не делят $|C_{Inndiag(S)}(x)|$. Таким образом, числа $\{p, r_1, r_6\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$.

Предположим, что $q = 2^w + 1$. Тогда ввиду леммы 2 имеем либо $q = 9$, либо $q = p$. В обоих случаях $\pi(S) = \pi(Aut(S))$. Если $(q+1)_3 \neq 3$, то ввиду [4, предложения 2.2, 3.1, 4.2] множества $\{p\} \cup R_1(q) \cup R_2(q)$ и $R_6(q)$ являются кликами в $\Gamma(G)$. Таким образом, если $S \cong PSU_3(9)$ или G — группа из пункта (10) теоремы 2, то ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$. Пусть $(q+1)_3 = 3$. Тогда ввиду [5, табл. 2] множество $\{3, p, r_6\}$, где $r_6 \in R_6(p)$, является кокликой в $\Gamma(S)$. Если $\Gamma(G)$ не содержит 3-коклик, то ввиду леммы 4 имеем 3 делит $|G/S|$, откуда следует, что $Inndiag(S) \leq G$. Обратно, если $Inndiag(S) \leq G$, ввиду [4, предложения 2.1, 3.1, 4.1] и [16, следствие 2] множества $\{p\} \cup R_1(q) \cup R_2(q)$ и $R_6(q)$ являются кликами в $\Gamma(G)$. Таким образом, если G — группа из пункта (11) теоремы 2, то ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Пусть $p = 2$. Если $(q+1)_3 = 3$, то $m \equiv \pm 1 \pmod 6$. Из [5, табл. 2] следует, что в графе $\Gamma(S)$ есть 3-коклика $\{3, r_1, r_6\}$, где $r_1 \in R_m(2)$ и $r_6 \in R_{6m}(2)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_1 и r_6 не делят $|Out(S)|$. Поскольку 3 не делит m, то если $\Gamma(G)$ не содержит 3-коклик, ввиду леммы 4 имеем $Inndiag(S) \leq G$.

Пусть $\Gamma(G)$ не содержит 3-коклик. Положим $r_6 \in R_{6m}(2)$ и $r_1 \in R_m(2)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_6 и r_1 не делят $|Out(S)|$. Предположим, что $r \in \pi(|G : S|) \setminus \pi(S)$, тогда $r \notin \{2, 3\}$ и r делит m. Пусть x — любой элемент порядка r, y — любой элемент порядка r_1 и z — любой элемент порядка r_6 из G. Тогда y и z лежат в $Inndiag(S)$ и $x \in G \setminus Inndiag(S)$. Ввиду леммы 5 имеем $C_{Inndiag(S)}(x) = PGU_3(2^{m/r})$ и числа r_1 и r_6 не делят $|C_{Inndiag(S)}(x)|$. Таким образом, числа

$\{r, r_1, r_6\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$, противоречие. Пусть $\pi(G) = \pi(S)$ и индекс $|G : S|$ нечетен. Тогда числа $\{2, r_1, r_6\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$ ввиду [5, табл. 2] и леммы 4. Пусть G — группа из пункта (12) или (13) теоремы 2. Ввиду [4, предложения 2.2, 3.1, 4.2] и [16, следствие 2] множества $\{2\} \cup R_1(q) \cup R_2(q)$ и $R_6(q)$ являются кликами в $\Gamma(G)$. Таким образом, ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Пусть $n = 4$. Тогда ввиду [15, табл. 5.1.A] имеем $|Out(S)| = 2(q+1, 4)m$ и $\pi(S) = \{p\} \cup R_1(q) \cup R_2(q) \cup R_4(q) \cup R_6(q)$.

Пусть p нечетно. Ввиду [5, табл. 2] в графе $\Gamma(S)$ есть коклика $\{p, r_4, r_6\}$, где $r_4 \in R_{4m}(p)$ и $r_6 \in R_{6m}(p)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_4 и r_6 не делят $|Out(S)|$. Если p не делит индекс $|G : S|$, то числа $\{p, r_4, r_6\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$ ввиду леммы 4. Пусть p делит индекс $|G : S|$, тогда p делит m. Пусть x — любой элемент порядка p, y — любой элемент порядка r_4 и z — любой элемент порядка r_6 из G. Тогда y и z лежат в $Inndiag(S)$. Заметим, что в $Inndiag(S)$ нет элементов порядков pr_4 и pr_6. Если $x \in G \setminus Inndiag(S)$, то ввиду леммы 5 имеем $C_{Inndiag(S)}(x) = PGU_4(p^{m/p})$ и числа r_4 и r_6 не делят $|C_{Inndiag(S)}(x)|$. Таким образом, числа $\{p, r_4, r_6\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$.

Пусть $p = 2$. Тогда $S = Inndiag(S)$. Ввиду [9] имеем $\pi(PSU_4(2)) = \pi(Aut(PSU_4(2)))$ и $\pi(PSU_4(2)) = \{2, 3\} \cup \{5\}$, причем числа 2 и 3 смежны в $\Gamma(PSU_4(2))$. Таким образом, ввиду леммы 3 если $S = PSU_4(2)$, то существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(S) = \Gamma(H)$. Поэтому можем считать, что $q \geq 4$. Из [5, табл. 2] следует, что в графе $\Gamma(S)$ есть 3-коклика $\{2, r_4, r_6\}$, где $r_4 \in R_{4m}(2)$ и $r_6 \in R_{6m}(2)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_4 и r_6 не делят $|Out(S)|$. Пусть $r \in \pi(|G : S|) \setminus \pi(S)$. Тогда $r \notin \{2, 3\}$ и r делит m. Пусть x — любой элемент порядка r, y — любой элемент порядка r_4 и z — любой элемент порядка r_6 из G. Тогда y и z лежат в $Inndiag(S)$ и $x \in G \setminus Inndiag(S)$. Ввиду леммы 6 имеем $C_{Inndiag(S)}(x) = PGU_4(2^{m/r})$ и числа r_4 и r_6 не делят $|C_{Inndiag(S)}(x)|$. Таким образом, числа $\{r, r_4, r_6\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$. Пусть $\pi(G) = \pi(S)$ и индекс $|G : S|$ нечетен. Тогда числа $\{2, r_4, r_6\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$ ввиду [5, табл. 2] и леммы 4. Пусть $\pi(G) = \pi(S)$ и индекс $|G : S|$ четен, тогда m четно и G содержит инволюцию $t \in G \setminus Inndiag(S)$, следовательно, $S\langle t \rangle \leq G$, откуда в G есть инволюция $f^{\frac{m}{2}}$. Если G — группа из пункта (14) теоремы 2, то ввиду [4, предложения 2.2, 3.1, 4.2] и [10, 2.5.13, 4.9.2] множества $\{2\} \cup R_1(q) \cup R_4(q)$ и $R_2(q) \cup R_6(q)$ являются кликами в $\Gamma(G)$, поэтому ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Пусть $n = 5$. Тогда ввиду [15, табл. 5.1.A] имеем $|Out(S)| = 2(q+1, 5)m$. Если $q = 2$, то ввиду [4, предложения 2.2, 3.1, 4.2] и [10, 2.5.13, 4.9.2] граф $\Gamma(PSU_5(2))$ содержит 3-коклику $\{2, 5, 11\}$, и $\pi(Aut(PSU_5(2))) = \{2, 3, 5\} \cup \{11\}$, где $\{2, 3, 5\}$ — клика в $\Gamma(Aut(PSU_5(2)))$. Следовательно, если $G \cong Aut(PSU_5(2))$, то ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$. Поэтому можно считать, что $m > 1$. Рассмотрим множество $\{r_4, r_6, r_{10}\}$, где $r_4 \in R_{4m}(p) \subseteq R_4(q)$, $r_6 \in R_{6m}(p) \subseteq R_6(q)$ и $r_{10} \in R_{10m}(p) \subseteq R_{10}(q)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_4, r_6 и r_{10} не делят $|Out(S)|$. Из [5, табл. 2] следует, что числа $\{r_4, r_6, r_{10}\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$, поэтому они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$ ввиду леммы 4.

Пусть $n = 6$. Тогда ввиду [15, табл. 5.1.A] имеем $|Out(S)| = 2(q+1, 6)m$. Рассмотрим множество $\{r_3, r_4, r_{10}\}$, где $r_3 \in R_{3m}(p)$, $r_4 \in R_{4m}(p)$ и $r_{10} \in R_{10m}(p)$, если $(m, p) \neq (2, 2)$, и $r_3 = 13$, $r_4 = 17$ и $r_{10} = 41$, если $(m, p) = (2, 2)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_3, r_4 и r_{10} не делят $|Out(S)|$. Из [5, табл. 2] следует, что числа $\{r_3, r_4, r_{10}\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$, поэтому они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$ ввиду леммы 4.

Пусть $n \geq 7$. Тогда ввиду [15, табл. 5.1.A] имеем $|Out(S)| = 2(q+1, n)m$. Рассмотрим множество $\{a, b, c\}$, где $a \in R_{2mn}(p)$, $b \in R_{2m(n-2)}(p)$ и $c \in R_{m(n-2+\varepsilon 1)}(p)$, если $\varepsilon \in \{+, -\}$ и $n \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$; $a \in R_{2m(n-1)}(p)$, $b \in R_{2m(n-3)}(p)$ и $c \in R_{mn}(p)$, если $n \equiv 0 \pmod 4$; $a \in R_{2m(n-1)}(p)$, $b \in R_{2m(n-3)}(p)$ и $c \in R_{m(n-2)}(p)$, если $n \equiv 2 \pmod 4$. Ввиду малой теоремы Ферма числа a, b и c не делят $|Out(S)|$. Из [5, табл. 2] следует, что числа $\{a, b, c\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$, поэтому они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$ ввиду леммы 4. Лемма доказана.

ЛЕММА 11. *Пусть $S \cong PSp_n(q)$, где $n \geq 4$ четно, $q = p^m \geq 2$ и $(n, q) \neq (4, 2)$. Тогда*

(1) $\Gamma(G)$ *не содержит 3-коклик, если, и только если выполняется одно из следующих утверждений:*

(*i*) $S \cong PSp_6(2)$;

(*ii*) G *— группа из пункта* (15) *теоремы* 2;

(2) *для каждой группы G из пункта* (1) *леммы граф $\Gamma(G)$ равен графу Грюнберга–Кегеля подходящей разрешимой группы.*

Доказательство. Рассмотрим случай $n = 4$. Пусть $r \in \pi(|G : S|) \setminus \pi(S)$, тогда $r \notin \{2, 3\}$ и r делит

m. Пусть x — любой элемент порядка r, y — любой элемент порядка $r_2 \in R_{2m}(p)$ и z — любой элемент порядка $r_4 \in R_{4m}(p)$ из G. Тогда y и z лежат в $Inndiag(S)$ и $x \in G \setminus Inndiag(S)$. Ввиду [10, предложения 4.9.1] имеем $C_{Inndiag(S)}(x) = PSp_4(p^{m/r})$ и числа r_2 и r_4 не делят $|C_{Inndiag(S)}(x)|$. Таким образом, числа $\{r, r_2, r_4\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$. Пусть $\pi(G) = \pi(S)$. Ввиду [3, теорема 1] $\Gamma(S)$ состоит из двух непересекающихся клик, следовательно ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Пусть $n \geq 6$. Тогда ввиду [15, табл. 5.1.A] имеем $|Out(S)| = 2(q-1,2)m$. Если $(n,q) = (6,2)$, то $\pi(S) = \pi(Aut(S))$ и $\Gamma(S)$ состоит из двух непересекающихся клик ввиду [3, теорема 1], следовательно ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$. Если $n = 6$ и $q > 2$, то рассмотрим множество $\{r_3, r_4, r_6\}$, где $r_3 \in R_{3m}(p)$, $r_4 \in R_{4m}(p)$ и $r_6 \in R_{6m}(p)$, если $(m,p) \neq (2,2)$, и $r_3 = 7$, $r_4 = 17$ и $r_6 = 13$, если $(m,p) = (2,2)$. Заметим, что числа r_3, r_4 и r_6 нечетны и отличны от 3. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_3, r_4 и r_6 не делят $|Out(S)|$. Из [5, табл. 3] следует, что числа $\{r_3, r_4, r_6\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$, поэтому они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$ ввиду леммы 4.

Пусть $n \geq 8$. Рассмотрим множество $\{a, b, c\}$, где $a \in R_{mn}(p)$, $b \in R_{m(n-2)}(p)$ и $c \in R_{m(n-4)}(p)$, если $(m,n,p) \neq (1,8,2), (1,10,2)$; $\{a,b,c\} = \{5,7,17\}$, если $(m,n,p) = (1,8,2)$; $\{a,b,c\} = \{7,17,31\}$, если $(m,n,p) = (1,10,2)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа a, b и c не делят $|Out(S)|$. Из [5, табл. 2] следует, что числа $\{a,b,c\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$, поэтому они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$ ввиду леммы 4. Лемма доказана.

ЛЕММА 12. *Пусть $S \cong P\Omega_{n+1}(q)$, где $n \geq 6$ четно и $q = p^m$ нечетно. Тогда $\Gamma(G)$ содержит 3-коклику.*

Доказательство. Ввиду [4, предложения 3.1, 4.3] и [5, предложение 2.4] имеем $\Gamma(PSp_n(q)) = \Gamma(P\Omega_{n+1}(q))$. Ввиду [9] имеем $|Out(PSp_n(q))| = |Out(P\Omega_{n+1}(q))|$. Из доказательства леммы 11 следует, что $\Gamma(PSp_n(q))$ при $n \geq 6$ и нечетном q содержит 3-коклику $\{a,b,c\}$ такую, что числа a, b и c не делят $|Out(PSp_n(q))|$. Применение леммы 4 завершает доказательство.

ЛЕММА 13. *Пусть $S \cong P\Omega_n^{\varepsilon}(q)$, где $n \geq 8$ четно, $\varepsilon \in \{+,-\}$ и $q = p^m \geq 2$. Тогда*

(1) $\Gamma(G)$ *не содержит* 3-*коклик тогда и только тогда, когда* $S \cong P\Omega_8^+(2)$;

(2) *если* $S \cong P\Omega_8^+(2)$, *то существует разрешимая группа H такая, что* $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Доказательство. Ввиду [15, табл. 5.1.A] имеем $|Out(S)| = 2\lambda(q^{n/2} - \varepsilon 1, 4)m$, где $\lambda = 3$, если $(n,\varepsilon) = (8,+)$ и $\lambda = 1$ иначе. Если $(n,q,\varepsilon) = (8,2,+)$, то ввиду [3, теорема 1] $\Gamma(S)$ состоит из двух непересекающихся клик, следовательно ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Пусть $(n,q,\varepsilon) \neq (8,2,+)$. Ввиду [15, табл. 3.5.E, 3.5.F] в S существует максимальная подгруппа T, изоморфная $P\Omega_{n-1}(q)$. Ввиду [9] имеем $|Out(S)| = |Out(T)|$, если $(n,\varepsilon) \neq (8,+)$, и $\pi(Out(S)) \subseteq \pi(T) \cup \{3\}$, если $(n,\varepsilon) = (8,+)$. Кроме того, если q четно, то ввиду [9] имеем $PSp_n(q) \cong P\Omega_{n+1}(q)$. Из доказательств лемм 11 и 12 следует, что $\Gamma(T)$ содержит 3-коклику $\{a,b,c\}$ такую, что числа a, b и c не делят $|Out(T)|$. Кроме того, в случае $T \cong PSp_6(q)$, где $q \neq 2$, числа a, b и c отличны от 3. Применение леммы 4 завершает доказательство.

ЛЕММА 14. *Пусть S — простая исключительная группа лиева типа над полем порядка $q = p^m$. Тогда*

(1) $\Gamma(G)$ *не содержит* 3-*коклик тогда и только тогда, когда* $S \cong {}^3D_4(2)$;

(2) *если* $S \cong {}^3D_4(2)$, *то существует разрешимая группа H такая, что* $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Доказательство. Пусть $S \cong E_8(q)$. Ввиду [15, табл. 5.1.B] имеем $|Out(S)| = m$. Из [5, табл. 4] следует, что числа $r_{30} \in R_{30m}(p)$, $r_{24} \in R_{24m}(p)$ и $r_{20} \in R_{20m}(p)$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_{30}, r_{24} и r_{20} не делят $|Out(S)|$, ввиду леммы 4 они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$.

Пусть $S \cong E_7(q)$. Ввиду [15, табл. 5.1.B] имеем $|Out(S)| = (2, q-1)m$. Из [5, табл. 4] следует, что числа $r_{18} \in R_{18m}(p)$, $r_{14} \in R_{14m}(p)$ и $r_{12} \in R_{12m}(p)$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_{18}, r_{14} и r_{12} не делят $|Out(S)|$, ввиду леммы 4 они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$.

Пусть $S \cong E_6(q)$. Ввиду [15, табл. 5.1.B] имеем $|Out(S)| = 2(3, q-1)m$. Из [5, табл. 4] следует, что числа $r_9 \in R_{9m}(p)$, $r_8 \in R_{8m}(p)$ и $r_5 \in R_{5m}(p)$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_9, r_8 и r_5 не делят $|Out(S)|$, поэтому ввиду леммы 4 они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$.

Пусть $S \cong {}^2E_6(q)$. Ввиду [15, табл. 5.1.B] имеем $|Out(S)| = 2(3, q+1)m$. Из [5, табл. 4] следует, что числа из $r_{18} \in R_{18m}(p)$, $r_{12} \in R_{12m}(p)$ и $r_{10} \in R_{10m}(p)$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_{18}, r_{12} и r_{10} не делят $|Out(S)|$, поэтому ввиду леммы 4 они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$.

Пусть $S \cong {}^3D_4(q)$. Ввиду [15, табл. 5.1.B] имеем $|Out(S)| = 3m$. Если $q = 2$, то то ввиду [9] имеем $\pi(S) = \pi(Aut(S)) = \{2, 3, 7\} \cup \{13\}$ и множества $\{2, 3, 7\}$ и $\{13\}$ являются кликами в $\Gamma(S)$. Таким образом, ввиду леммы 3 существует разрешимая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$. Если $q = 4$, то числа $7 \in R_3(4)$, $13 \in R_6(4)$ и $241 \in R_{12}(4)$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$ и не делят $|Out(S)| = 6$, поэтому ввиду леммы 4 они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$. Предположим, что $q > 2$ и $q \neq 4$. Тогда из [5, табл. 4] следует, что числа из $r_3 \in R_{3m}(p)$, $r_6 \in R_{6m}(p)$ и $r_{12} \in R_{12m}(p)$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_3, r_6 и r_{12} не делят $|Out(S)|$, поэтому ввиду леммы 4 они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$.

Пусть $S \cong F_4(q)$. Ввиду [15, табл. 5.1.B] имеем $|Out(S)| = (2, p)m$. Из [5, табл. 4] следует, что числа $r_{12} \in R_{12m}(p)$, $r_8 \in R_{8m}(p)$ и $r_4 \in R_{4m}(p)$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_{12}, r_8 и r_4 не делят $|Out(S)|$, ввиду леммы 4 они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$.

Пусть $S \cong {}^2F_4(2^{2n+1})$, где $n \geq 1$. Ввиду [15, табл. 5.1.B] имеем $|Out(S)| = 2n + 1$. Пусть $n \geq 2$. Из [5, табл. 4] следует, что любые числа $s_2 \in R_{4n+2}(2) \subset \pi(2^{2n+1} + 1) \setminus \{3\}$, $s_3 \in R_{8n+4}(2) \subset \pi(2^{4n+2} + 1) \setminus \{3\}$ и $s_4 \in R_{12n+6}(2) \subset \pi(2^{4n+2} - 2^{2n+1} + 1) \setminus \{3\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа s_2, s_3 и s_4 не делят $2n+1$, теперь из леммы 4 следует, что они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$. Пусть $n = 1$. Из [5, табл. 4] следует, что числа 2, 19 и 37 образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$. Поскольку эти числа не делят $|Out(S)|$, из леммы 4 следует, что они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$.

Пусть $S \cong {}^2F_4(2)'$. Ввиду [9] имеем $|Out(S)| = 2$. Из [5, табл. 4] следует, что числа 3, 5 и 13 образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$. Поскольку эти числа не делят $|Out(S)|$, из леммы 4 следует, что они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$.

Пусть $S \cong G_2(q)$. Ввиду [15, табл. 5.1.B] имеем $|Out(S)| = 2^{\frac{(3,p)-1}{2}}m$. Пусть $r_6 \in R_{6m}(p)$, $r_3 \in R_{3m}(p)$ и $r_2 \in R_{2m}(p)$, если $(m,p) \neq (2,2), (3,2)$, $r_6 = 13$, $r_3 = 7$ и $r_2 = 5$, если $(m,p) = (2,2)$, $r_6 = 19$, $r_3 = 73$ и $r_2 = 7$, если $(m,p) = (3,2)$. Из [5, табл. 4] следует, что числа $\{r_6, r_3, r_2\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа r_6, r_3 и r_2 не делят $|Out(S)|$, поэтому ввиду леммы 4 они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$.

Пусть $S \cong {}^2G_2(3^{2n+1})$, где $n \geq 1$. Ввиду [15, табл. 5.1.B] имеем $|Out(S)| = 2n + 1$. Из [5, табл. 4] следует, что любые числа $s_1 \in R_{2n+1}(3) \subset \pi(3^{2n+1} - 1)$, $s_2 \in R_{4n+2}(3) \subset \pi(3^{2n+1} + 1)$ и $s_3 \in R_{12n+6}(3) \subset \pi(3^{4n+2} - 3^{2n+1} + 1)$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа s_1, s_2 и s_3 не делят $2n + 1$, теперь из леммы 4 следует, что они образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$.

Пусть $S \cong {}^2B_2(2^{2n+1})$, где $n \geq 1$. Ввиду [15, табл. 5.1.B] имеем $|Out(S)| = 2n + 1$. Из [5, табл. 4] следует, что числа 2, $s_1 \in R_{2n+1}(2) \subset \pi(2^{2n+1} - 1)$ и $s_2 \in R_{8n+4}(2) \subset \pi(2^{4n+2} + 1)$ образуют 3-коклику в $\Gamma(S)$. Ввиду малой теоремы Ферма числа s_1 и s_2 не делят $2n + 1$, теперь из леммы 4 следует, что числа $\{2, s_1, s_2\}$ образуют 3-коклику в $\Gamma(G)$. Лемма доказана.

Доказательство теорем 1 и 2 следует из лемм 7–14.

Список литературы

[1] *Lucido M. C.* The diameter of the prime graph of finite groups// J. Group Theory, Vol. 2, no. 2 (1999). P. 157–172.

[2] *Gruber A., et. al.*, A characterization of the prime graphs of solvable groups// J. Algebra. Vol. 442 (2015). P. 397–422.

[3] *Зиновьева М. Р., Мазуров В. Д.* О конечных группах с несвязным графом простых чисел // Труды ИММ УрО РАН. Т. 18, № 3 (2012). С. 99–105.

[4] *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы// Алгебра и логика. Т. 44, № 6 (2005). С. 682—725.

[5] *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы// Алгебра и логика. Т. 50, № 4 (2011). С. 425—470.

[6] *Higman G.* Finite groups in which every element has prime power order// J. London Math. Soc. (2). Vol. 32 (1957). P. 335–342.

[7] *Gorenstein D.* Finite groups. N. Y.: Harper and Row, 1968.

[8] *Harrary F.* Graph theory. Massachussets: Addison-Wesley, 1969.

[9] Atlas of finite groups/ J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985.

[10] *Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.* The classification of the finite simple groups, Number 3// Mathematical Surveys and Monographs. 1994. Vol. 40, № 3.

[11] *Zsigmondy K.* Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. V. 3, no. 1 (1892). P. 265–284.

[12] *Gerono G.C.* Note sur la r*é*solution en nombres entiers et positifs de l'*é*quation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). Vol. 9 (1870). P. 469–471.

[13] *Маслова Н. В.* О совпадении графов Грюнберга–Кегеля конечной простой группы и ее собственной подгруппы // Труды ИММ УрО РАН. Т. 20, № 1 (2014). С. 156–168.

[14] *Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.* Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов. // Сиб. мат. журн. Т. 41, № 2 (2000). С. 359–369.

[15] *Kleidman P., Liebeck M.* The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 303 p.

[16] *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных линейных и унитарных групп// Алгебра и логика. Т. 47, № 2 (2008). С. 157–173.

Сведения об авторах:

ГОРШКОВ Илья Борисович,

РОССИЯ, г. Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16, 620990,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
e-mail: ilygor8@gmail.com

МАСЛОВА Наталья Владимировна,

РОССИЯ, г. Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16, 620990,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
РОССИЯ, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, 620002,
Уральский федеральный университет,
e-mail: butterson@mail.ru