

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ
(численное интегрирование,
решение обыкновенных
дифференциальных уравнений)**

**Методические указания по курсу
«Численные методы и математическое
моделирование» для студентов
2 курса физического факультета**



Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2005

Методические указания подготовлены
кафедрой компьютерной физики

Утверждено
учебно-методической комиссией
физического факультета
6 октября 2004 г.

Составитель В. А. Чернышев

Рассматриваются методы приближенного вычисления определенных интегралов, численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Приводятся краткие теоретические сведения, необходимые для правильного применения рассматриваемых методов. Подробно разбирается ряд задач, предлагаемых студентам 2-го курса физического факультета на практических занятиях по курсу «Численные методы и математическое моделирование».

1. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, тогда определенный интеграл

$$J = \int_a^b f(x) dx \quad (1.1)$$

равен

$$J = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (1.2)$$

по формуле Ньютона – Лейбница. В тех случаях, когда первообразная функция $F(x)$ не может быть выражена через элементарные функции или $f(x)$ задана в виде таблицы, используют приближенные методы вычисления определенных интегралов. Рассмотрим несколько таких методов.

1.1. Методы левых, правых, средних прямоугольников

Определенный интеграл (1.1), согласно его геометрическому смыслу, численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$ (рис. 1).

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных частей точками $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$. Длина каждой части равна

$$h = \frac{b - a}{n}. \quad (1.3)$$

Обозначим $a = x_0$ и $b = x_n$. Через точки $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ проведем прямые, параллельные оси ординат (см. рис. 1). Площадь S будет равна сумме площадей n элементарных криволинейных трапеций:

$$J = S = s_1 + s_2 + \dots + s_n. \quad (1.4)$$

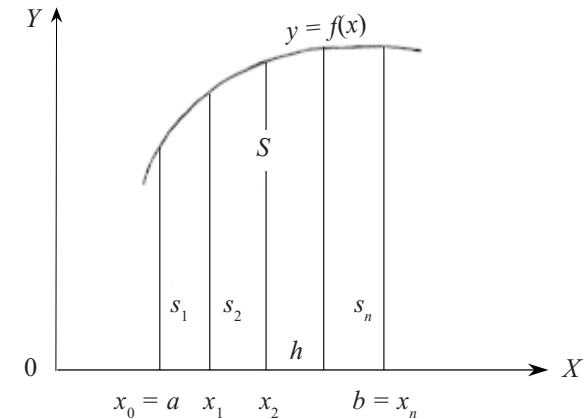


Рис. 1

Чтобы найти приближенное значение площади S в правой части равенства (1.4), заменим сумму площадей n криволинейных трапеций суммой площадей n прямоугольников (рис. 2). Высоту i -го прямоугольника будем считать равной значению функции $f(x)$ на левом конце отрезка $[x_{i-1}; x_i]$:

$$J = S \approx h f(x_0) + h f(x_1) + \dots + h f(x_{n-1}) = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Правую часть последнего равенства обозначим

$$J_{л.п} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i). \quad (1.5)$$

Формула (1.5) называется формулой *левых прямоугольников*.

Если в качестве высоты i -го прямоугольника при нахождении приближенного значения S брать значение функции $f(x)$ на правом конце отрезка $[x_{i-1}; x_i]$ (рис. 3), получим

$$J = S \approx h f(x_1) + h f(x_2) + \dots + h f(x_n) = h \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

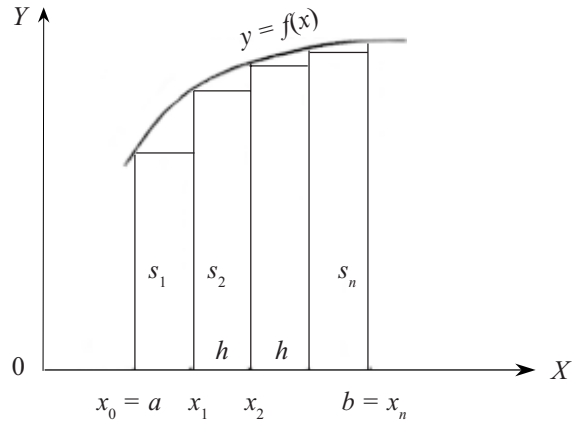


Рис. 2

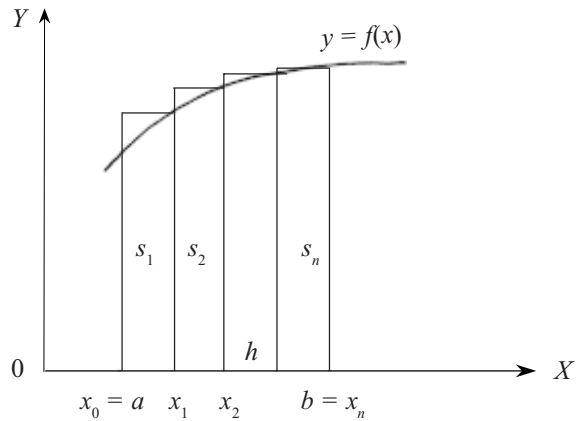


Рис. 3.

Правую часть последнего равенства обозначим

$$J_{\text{п.п.}} = h \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (1.6)$$

Формула (1.6) называется формулой *правых прямоугольников*.

Заметим, что если функция $f(x)$ выпукла вверх на отрезке интегрирования $[a; b]$, то точное значение интеграла

$$J_{\text{л.п.}} \leq J \leq J_{\text{п.п.}}$$

Теперь при нахождении приближенного значения S в качестве высоты i -го прямоугольника возьмем значение функции $f(x)$ в середине отрезка $[x_{i-1}; x_i]$ (рис. 4).

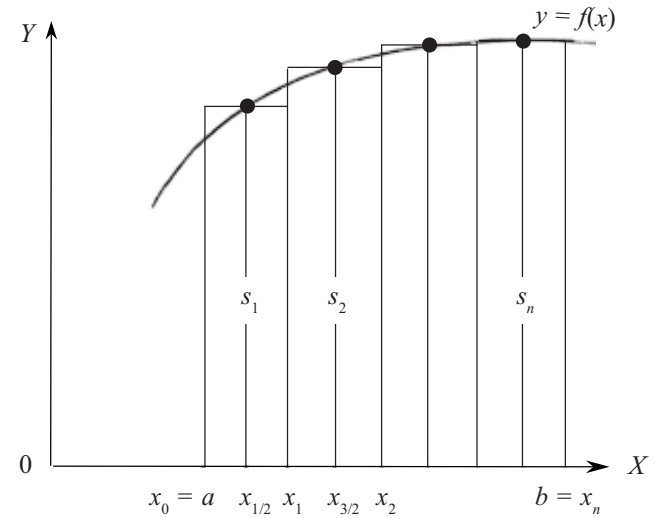


Рис. 4

Середина первого отрезка определится формулой $\frac{x_1 + x_0}{2}$, второ-

го $\frac{x_2 + x_1}{2}$, n -го $\frac{x_n + x_{n-1}}{2}$. Для значения интеграла J получим приближенное равенство

$$J = S \approx h f\left(\frac{x_1 + x_0}{2}\right) + h f\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) + \dots + h f\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right).$$

Обозначим середины отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ буквами x с дробными индексами:

$$\frac{x_1 + x_0}{2} = x_{1/2}; \quad \frac{x_2 + x_1}{2} = x_{3/2}; \quad \dots; \quad \frac{x_n + x_{n-1}}{2} = x_{n-1/2}.$$

Тогда правая часть приближенного равенства запишется в виде

$$J_{\text{ср.пр}} = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2}). \quad (1.7)$$

Формула (1.7) называется формулой *средних прямоугольников*.

1.2. Метод трапеций

Криволинейную трапецию площади S разделим, как и в предыдущих случаях, на n криволинейных трапеций (см. рис. 1).

$$J = S = s_1 + s_2 + \dots + s_n.$$

Верхние концы отрезков, параллельных оси ординат, последовательно соединим прямыми линиями (рис. 5). Таким образом, мы заменим криволинейные трапеции прямолинейными. Основания i -й трапеции равны соответственно $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$. Высоты всех трапеций

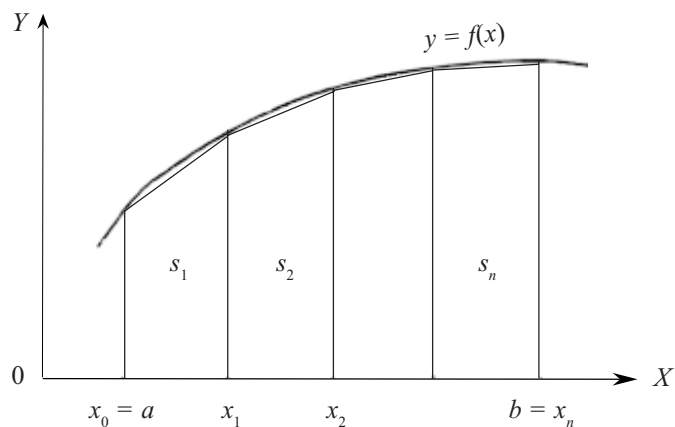


Рис. 5

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Для приближенного значения интеграла запишем

$$J = S \approx h \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + h \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}. \quad (1.8)$$

Правую часть приближенного равенства обозначим

$$J_{\text{тр}} = h \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right). \quad (1.9)$$

Формула (1.9) называется *формулой трапеций*. Из равенства (1.8) следует, что $J_{\text{тр}} = (J_{\text{п.п}} + J_{\text{п.п}})/2$.

1.3. Метод Симпсона

Так же, как и ранее, разделим криволинейную трапецию площади S на n элементарных криволинейных трапеций с помощью прямых, проходящих через точки $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ (см. рис. 1). Метод Симпсона основан на замене частей кривой $y = f(x)$ не прямыми, как было в методах прямоугольников и трапеций, а дугами парабол, оси которых параллельны оси OY .

Перенесем начало координат в точку a , сохраняя направление осей. По сути, это замена переменной. Возьмем участок кривой $y = f(x)$, соответствующий отрезку $[x_0; x_2]$ (рис. 6). Площадь двух элементарных трапеций, соответствующих этому отрезку, –

$$S_1 = \int_0^{2h} f(x) dx.$$

Часть *LKM* кривой $y = f(x)$ см. рис. 6) заменим частью параболы, ось которой параллельна оси OY . Уравнение параболы

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (*)$$

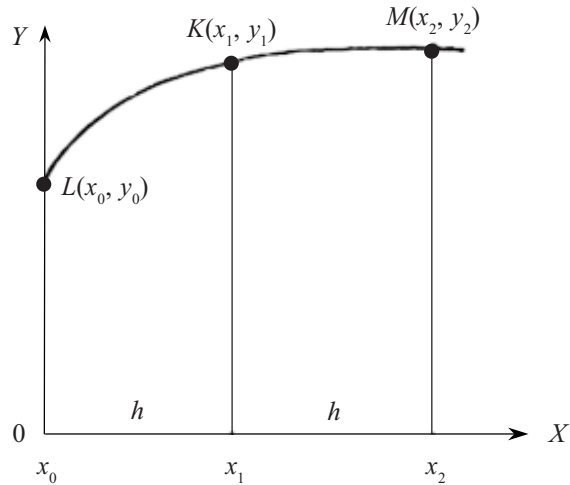


Рис. 6

Коэффициенты a , b и c определим так, чтобы парабола проходила через точки $L(x_0, y_0)$, $K(x_1, y_1)$ и $M(x_2, y_2)$. Координаты точек должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} y_0 = c \\ y_1 = ah^2 + bh + c \\ y_2 = a4h^2 + 2bh + c \end{cases} \quad (1.10)$$

Площадь фигуры, ограниченной параболой (*), осью OX и прямыми $y = x_0$ и $y = x_2$, равна

$$\int_0^{2h} (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} (8ah^2 + 6bh + 6c). \quad (1.11)$$

С другой стороны, из системы (1.10) следует, что выражение в скобках в правой части равенства (1.11) равно $y_0 + 4y_1 + y_2$, поэтому

$$\int_0^{2h} (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Для площади двух элементарных криволинейных трапеций, соответствующих отрезку $[x_0; x_2]$, запишем приближенное равенство

$$S_1 \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Для следующей пары элементарных криволинейных трапеций, соответствующих отрезку $[x_2; x_4]$, заменив кривую $y = f(x)$ частью параболы, получим

$$S_2 \approx \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Аналогичные соотношения могут быть записаны для следующих пар криволинейных трапеций. Если число n элементарных криволинейных трапеций четное, $n = 2k$, то площадь S можно представить в виде суммы

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_k \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + \dots + y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$

Правую часть приближенного равенства обозначим

$$J_{\text{Симп}} = \frac{h}{3} (y_0 + y_{2k} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2k-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{2k-2})). \quad (1.12)$$

Формула (1.12) называется *формулой Симпсона*. Заметим, что число отрезков n , на которое в данном случае разбит отрезок интегрирования $[a; b]$, должно быть четным: $n = 2k$.

1.4. Погрешность квадратурных формул

Соотношения для строгой оценки погрешности

В рассмотренных выше методах определенный интеграл заменялся конечной суммой

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_i \alpha_i f(x_i), \quad (1.13)$$

где α_i – некие числа. Соотношение (1.13) называется *квадратурной формулой*, его правая часть – *квадратурной суммой*. В зависимости от способа вычисления квадратурной суммы получаются разные методы приближенного интегрирования – прямоугольников, трапеций, Симпсона и т. д. Точки x_i называются узлами, а числа α_i – весовыми коэффициентами (весами) квадратурной формулы.

Погрешность при вычислении интеграла по квадратурной формуле равна

$$R = \int_a^b f(x) dx - \sum_i \alpha_i f(x_i).$$

Погрешность при интегрировании на отрезке $[a; b]$ можно представить в виде суммы погрешностей на каждом элементарном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$:

$$R = \sum_{i=1}^n r_i, \quad n - \text{число отрезков};$$

$r_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \sigma_i$, где σ_i – выражение, соответствующее квадратурной формуле на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$. Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки $x_{i-1/2}$ (середины отрезка $[x_{i-1}; x_i]$):

$$f(x) = y_{i-1/2} + y'_{i-1/2}(x - x_{i-1/2}) + \frac{1}{2!} f''(\xi_i)(x - x_{i-1/2})^2,$$

$$\xi_i \in (x_{i-1}; x_i).$$

Проинтегрируем обе части этого равенства на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = y_{i-1/2} h + \frac{1}{24} f''(\xi_i) h^3, \quad \xi_i \in (x_{i-1}; x_i). \quad (1.14)$$

Для метода средних прямоугольников $\sigma_i = y_{i-1/2} h$, что соответствует первому слагаемому в правой части формулы (1.14). Поэтому

$$r_i = \frac{1}{24} f''(\xi_i) h^3, \quad \xi_i \in (x_{i-1}; x_i). \quad (1.15)$$

Погрешность на всем отрезке $[a; b]$ будет равна

$$\begin{aligned} |R_{\text{ср.пр}}| &= \left| \sum_{i=1}^n r_i \right| = \frac{h^3}{24} \left| \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \right| \leq \frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^n |f''(\xi_i)| \leq \\ &\leq \frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^n M_2 = \frac{h^3}{24} n M_2 = \frac{(b-a)h^2}{24} M_2, \end{aligned}$$

где $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ – максимальное значение модуля второй производной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Таким образом, погрешность метода средних прямоугольников оценивается по формуле

$$|R_{\text{ср.пр}}| \leq \frac{(b-a)h^2}{24} M_2. \quad (1.16)$$

Аналогично можно получить для метода трапеций

$$|R_{\text{трап}}| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2; \quad (1.17)$$

метода левых (правых) прямоугольников

$$|R_{\substack{\text{л.п} \\ \text{(п.п)}}}| \leq \frac{(b-a)h}{2} M_1, \quad (1.18)$$

метода Симпсона

$$|R_{\text{Симп}}| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4, \quad (1.19)$$

где M_1 и M_4 – максимальные значения модуля первой и четвертой производной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

При выводе соотношения (1.17) для метода трапеций получается выражение для погрешности на i -м отрезке:

$$r_i = -\frac{h^3}{12} f''(\xi_i).$$

Из сравнения этого выражения с соотношением (1.15) – погрешностью на i -м отрезке в методе средних прямоугольников, следует, что погрешность метода трапеций имеет другой знак и приблизительно вдвое больше по модулю. Поэтому можно записать уточненную формулу для приближенного вычисления интеграла:

$$J \approx \frac{(2J_{\text{ср.пр}} + J_{\text{трап}})}{3}. \quad (1.20)$$

Погрешность R зависит от шага разбиения h и имеет вид

$$R = O(h^r)$$

(R есть O большое* от h^r при $h \rightarrow 0$). Показатель степени r называют *порядком точности* данного метода (данной квадратурной формулы).

Соотношения (1.16)–(1.19) дают строгую оценку погрешности, но их можно применять, когда существуют и могут быть вычислены соответствующие производные подынтегральной функции. Поэтому на практике часто используется способ приближенной оценки погрешности – метод *двойного пересчета* (метод Рунге), не связанный с вычислением производных.

* О понятии « O большое» см. прил., с. 52.

Учет погрешностей квадратурных формул методом двойного пересчета (метод Рунге)

Для погрешности метода средних прямоугольников на i -м элементарном отрезке мы записывали

$$r_i = \frac{1}{24} f''(\xi_i) h^3, \quad \xi_i \in (x_{i-1}; x_i);$$

$$r_i = \frac{(b-a)^3}{24n^3} f''(\xi_i).$$

Если отрезок $[a; b]$ разбить на $2n$ частей, получим

$$r_i = \frac{(b-a)^3}{24 \cdot 8n^3} f''(\xi_i^*), \quad \xi_i^* \in (x_{i-1}; x_i).$$

Для погрешности на всем отрезке $[a; b]$ можно записать

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i); \quad (1.21)$$

$$R_{2n} = \frac{(b-a)^3}{24 \cdot 8n^3} \sum_{i=1}^{2n} f''(\xi_i^*). \quad (1.22)$$

Будем считать, что значения производной $f''(x)$ *мало меняются* на отрезке $[a; b]$, т. е.

$$f''(\xi_i^*) \approx f''(\xi_i).$$

Тогда из соотношений (1.21) и (1.22) получим приближенное равенство

$$R_{2n} \approx \frac{R_n}{4}. \quad (1.23)$$

По определению, $R_{2n} = J - J_{2n}$, $R_n = J - J_n$ (здесь J – точное значение интеграла). Поэтому

$$\begin{aligned} R_{2n} &= J - J_{2n}, \\ J_{2n} - J_n &= R_n - R_{2n}. \end{aligned}$$

С учетом приближенного равенства (1.23) получим

$$\begin{aligned} J_{2n} - J_n &\approx 3R_{2n}, \\ R_{2n} &\approx \frac{J_{2n} - J_n}{3}, \\ |R_{2n}| &\approx \left| \frac{J_{2n} - J_n}{3} \right|. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Соотношение (1.24) дает приближенную оценку погрешности значения J_{2n} , полученного по формуле средних прямоугольников. Для получения такой оценки расчет необходимо провести дважды: с разбиением отрезка интегрирования на n частей и на $2n$ частей.

Аналогичные оценки существуют для других квадратурных формул. Для формулы левых (правых) прямоугольников:

$$|R_{2n}| \approx |J_{2n} - J_n|, \quad (1.25)$$

для формулы трапеций:

$$|R_{2n}| \approx \left| \frac{J_{2n} - J_n}{3} \right|, \quad (1.26)$$

для формулы Симпсона:

$$|R_{2n}| \approx \left| \frac{J_{2n} - J_n}{15} \right|. \quad (1.27)$$

По соотношениям (1.24)–(1.27) оценивается погрешность значения J_{2n} : например, из формулы (1.27) для метода Симпсона следует, что число верных знаков значения J_{2n} на единицу больше числа общих знаков, которые имеют J_n и J_{2n} .

Пример 1. Вычислить с точностью 0,00001 интеграл

$$F(\varphi; k) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

при $\varphi = 36^\circ$ и $k = 0,754710$.

Решение. Воспользуемся методом Симпсона. Возьмем $n = 4$.

Поскольку $a = 0$, $b = 36^\circ$, $h = \frac{b-a}{n} = 9^\circ$, $\frac{h}{3} = 3^\circ = 0,05235988$ рад.

Подынтегральная функция

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}.$$

Вычисления приведены в табл. 1.

Таблица 1

i	t_i^0	$f(t_i)$
0	0	1,00000
1	9	1,00704
2	18	1,02836
3	27	1,06443
4	36	1,11580

Согласно формуле (1.12)

$$\begin{aligned} J_{\text{Симп}} &= \frac{h}{3} [f(t_0) + f(t_4) + 4(f(t_1) + f(t_3)) + 2f(t_2)] = \\ &= 0,6523205. \end{aligned}$$

Оценим погрешность этого результата методом Рунге. Для этого проведем вычисления при $n = 2$, взяв точки с $i = 0, 2, 4$. При этом h увеличится вдвое. Получим

$$J_{\text{Симп}} = \frac{h'}{3} [f(t_0) + 4f(t_2) + f(t_4)] = 0,6523230.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J_{\text{Симп}} &= 0,6523205 \text{ при } n = 4; \\ J_{\text{Симп}} &= 0,6523230 \text{ при } n = 2. \end{aligned}$$

Согласно (1.27),

$$|R_4| \approx \left| \frac{J_4 - J_2}{15} \right| = \frac{|0,6523205 - 0,6523230|}{15} = 0,00000017.$$

Пример 2. Вычислить по формуле трапеций и формуле Симпсона число π исходя из равенства

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

и определить погрешность вычислений при $n = 10$.

Решение. В данном примере $b = 1$, $a = 0$, $n = 10$, $h = 0,1$. Подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Значения x_i и $y_i = f(x_i)$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

i	x_i	y_i
0	0,0	1,00000000
1	0,1	0,99009901
2	0,2	0,96153846
3	0,3	0,91743119
4	0,4	0,86206897
5	0,5	0,80000000
6	0,6	0,73529412
7	0,7	0,67114094
8	0,8	0,60975610
9	0,9	0,55248619
10	1,0	0,50000000

По формуле Симпсона (1.12) получим

$$J_{\text{Симп}} = \frac{h}{3} [y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)] = 0,785398154.$$

Исходя из формулы трапеций (1.9), имеем

$$J_{\text{тр}} = h \left[\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 \right] = 0,784981497.$$

Сделаем точную оценку погрешности по формулам (1.19) и (1.17). В данном примере

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\text{так что } f''(x) = -2 \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}; \quad f^{IV}(x) = +24 \frac{1-10x^2+5x^4}{(1+x^2)^5}.$$

На отрезке $[a; b] = [0; 1]$ вторая и четвертая производные функции $f(x)$ принимают максимальное по модулю значение в точке $x = 0$. Следовательно,

$$M_2 = |f''(0)| = 2;$$

$$M_4 = |f^{IV}(0)| = 24.$$

По формулам (1.19) и (1.17) находим

$$|R_{\text{Симп}}| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 = \frac{24 \cdot 0,0001}{180} = 0,000013,$$

$$|R_{\text{трап}}| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 = \frac{2 \cdot 0,01}{12} = 0,0017.$$

Поскольку точное значение интеграла $\frac{\pi}{4} = 0,785398163\dots$, фактические погрешности

$$R_{\text{Симп}} = 0,0000000099,$$

$$R_{\text{трап}} = 0,000417.$$

Как видим, формулы для точной оценки погрешности дают завышенные результаты.

Пример 3. Вычислить по формуле Симпсона интеграл

$$\int_{-1}^1 f(x)dx, \text{ где } f(x) = \frac{x^7 \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(2-x)^{13}}}.$$

Решение. Исследуем функцию $f(x)$, для этого построим ее график на отрезке $[-1; 1]$ (рис. 7).

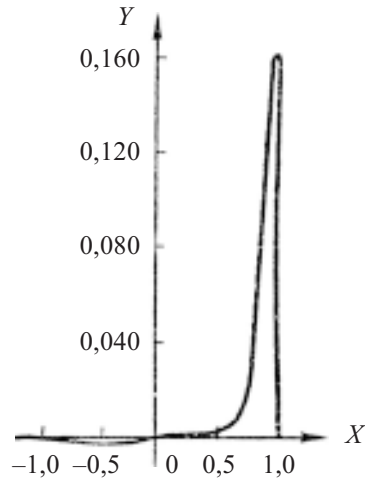


Рис. 7

Согласно графику, отрезок интегрирования целесообразно разбить на три части. Тогда

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^{0,5} f(x)dx + \int_{0,5}^{0,8} f(x)dx + \int_{0,8}^1 f(x)dx,$$

Каждый из интегралов вычислим по формуле Симпсона при соответствующем разбиении n . При этом n берем тем больше, чем быстрее изменяется функция на данном отрезке. Возьмем на первом отрезке $n = 6$, на втором также $n = 6$, а на третьем $n = 10$.

Значения x_i и $y_i = f(x_i)$ приведены в табл. 3.

Вычислим первый интеграл

$$J_{\text{Симп}} = \frac{h}{3} [y_0 + y_6 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)] = -0,0000031,$$

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
<i>Для первого и второго интегралов</i>					
0	-1,00	0,000000	0	0,50	0,000485
1	-0,75	-0,000123	1	0,55	0,001136
2	-0,50	-0,000018	2	0,60	0,002514
3	-0,25	0,000000	3	0,65	0,005297
4	0,00	0,000000	4	0,70	0,010687
5	0,25	0,000002	5	0,75	0,020702
6	0,50	0,000485	6	0,80	0,038468
<i>Для третьего интеграла</i>					
0	0,80	0,03847	6	0,92	0,13257
1	0,82	0,04866	7	0,94	0,15149
2	0,84	0,06102	8	0,96	0,16306
3	0,86	0,07576	9	0,98	0,15189
4	0,88	0,09292	10	1,00	0,00000
5	0,90	0,11221			

второй интеграл

$$J_{\text{Симп}} = \frac{h}{3} [y_0 + y_6 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)] = 0,0028982$$

и третий

$$J_{\text{Симп}} = \frac{h}{3} [y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)] = 0,0206508.$$

Сумма трех интегралов

$$-0,0000031 + 0,0028982 + 0,0206508 = 0,0235459.$$

Заметим, что на отдельных частях отрезка интегрирования можно применять различные квадратурные формулы.

1.5. Квадратурные формулы Котеса, Чебышева, Гаусса

Формула Котеса получается путем замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом Лагранжа степени n . Узлы интерполяции при этом задаются равноотстоящими и являются узлами квадратурной формулы. Весовые коэффициенты при заданных узлах определяются так, чтобы формула являлась точной для многочленов степени $\leq n - 1$.

При выводе квадратурной формулы Чебышева, напротив, накладываются ограничения на весовые коэффициенты; они полагаются равными между собой. При этом узлы и величина, которой равны коэффициенты, определяются так, чтобы формула была точной для многочленов степени $\leq n - 1$.

В квадратурной формуле Гаусса узлы и весовые коэффициенты определяются так, чтобы при заданном числе узлов она являлась точной для многочленов максимально высокой степени ($\leq 2n - 1$).

В квадратурной формуле Чебышева все весовые коэффициенты равны между собой. Поэтому она дает наиболее обоснованные результаты при вычислении интегралов от функции $f(x)$, найденной экспериментально, когда вероятность погрешности каждого измерения одна и та же. Действительно, в этом случае нет оснований различным значениям $f(x_i)$ приписывать различные веса, как, например, в формуле Симпсона, где первое и последнее значения берутся с весом 1, все промежуточные нечетные значения – с весом 4, а четные – с весом 2.

Квадратурная формула Котеса

Пусть дан интеграл

$$J = \int_a^b f(x) dx.$$

Преобразуем переменную так, чтобы пределы интегрирования были 0 и 1. Сделаем замену

$$x = a + (b - a)z.$$

Тогда

$$dx = (b - a) dz,$$

при x , равном a , z будет равен 0,
при x , равном b , z будет равен 1,
тогда

$$J = \int_a^b f(x) dx = (b - a) \int_0^1 f[a + (b - a)z] dz.$$

Это преобразование равносильно тому, что начало координат перенесено в точку a и длина отрезка интегрирования $[a; b]$ принята за 1.

Разделим отрезок интегрирования $[a; b]$ на n равных частей. Обозначим

$$h = \frac{b - a}{n},$$

тогда координаты точек деления будут

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_{n-1} = a + (n - 1)h, x_n = b.$$

Соответствующие им значения z равны

$$z_0 = 0, z_1 = \frac{1}{n}, z_2 = \frac{2}{n}, \dots, z_{n-1} = \frac{n-1}{n}, z_n = 1.$$

Значения функции в точках деления:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n).$$

Вместо кривой $y = f(x)$ возьмем кривую, уравнение которой

$$Y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_nx^n,$$

проходящую через вышеуказанные $n + 1$ точек кривой $y = f(x)$. Применим интерполяционную формулу Лагранжа, при этом вместо переменной x будем использовать переменную z :

$$\begin{aligned}
Y = & y_0 \frac{\left(z - \frac{1}{n}\right)\left(z - \frac{2}{n}\right) \dots (z-1)}{\left(0 - \frac{1}{n}\right)\left(0 - \frac{2}{n}\right) \dots (0-1)} + \\
& + y_1 \frac{(z-0)\left(z - \frac{2}{n}\right) \dots (z-1)}{\left(\frac{1}{n} - 0\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n}\right) \dots \left(\frac{1}{n} - 1\right)} + \\
& + \dots + \\
& + y_n \frac{(z-0)\left(z - \frac{1}{n}\right) \dots \left(z - \frac{n-1}{n}\right)}{(1-0)\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

Заменим площадь под кривой $y = f(x)$ площадью под кривой Y , т. е. запишем приближенное равенство

$$J = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \int_0^1 Y dz.$$

Подставив в него Y из формулы Лагранжа, получим

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[y_0 \frac{\int_0^1 \left(z - \frac{1}{n}\right)\left(z - \frac{2}{n}\right) \dots (z-1) dz}{\left(0 - \frac{1}{n}\right)\left(0 - \frac{2}{n}\right) \dots (0-1)} + \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
& + y_1 \frac{\int_0^1 (z-0)\left(z - \frac{2}{n}\right) \dots (z-1) dz}{\left(\frac{1}{n} - 0\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n}\right) \dots \left(\frac{1}{n} - 1\right)} + \\
& + \dots + \\
& + y_n \frac{\int_0^1 (z-0)\left(z - \frac{1}{n}\right) \dots \left(z - \frac{n-1}{n}\right) dz}{(1-0)\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}. \quad (**)
\end{aligned}$$

При заданном n интегралы в правой части равенства могут быть вычислены. Обозначив

$$\begin{aligned}
C_n^0 &= \frac{\int_0^1 \left(z - \frac{1}{n}\right)\left(z - \frac{2}{n}\right) \dots (z-1) dz}{\left(0 - \frac{1}{n}\right)\left(0 - \frac{2}{n}\right) \dots (0-1)}, \\
C_n^1 &= \frac{\int_0^1 (z-0)\left(z - \frac{2}{n}\right) \dots (z-1) dz}{\left(\frac{1}{n} - 0\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n}\right) \dots \left(\frac{1}{n} - 1\right)}, \\
& \dots, \\
C_n^n &= \frac{\int_0^1 (z-0)\left(z - \frac{1}{n}\right) \dots \left(z - \frac{n-1}{n}\right) dz}{(1-0)\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

и задавая n , можно вычислить коэффициенты $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$. Тогда формула (***) примет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) [C_n^0 y_0 + C_n^1 y_1 + \dots + C_n^n y_n],$$

или, иначе,

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) [C_n^0 f(x_0) + C_n^1 f(x_1) + \dots + C_n^n f(x_n)], \quad (1.28)$$

где $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_n = b$, и $h = \frac{b-a}{n}$. Формула (1.28) носит название *формулы Котеса*.

Вычислим коэффициенты C_n^i при нескольких значениях числа n . Пусть $n = 1$. Кривую заменяем прямой. Коэффициенты

$$C_1^0 = \frac{\int_0^1 (z-1) dz}{0-1} = \frac{1}{2}, \quad C_1^1 = \frac{\int_0^1 z dz}{0-1} = \frac{1}{2}.$$

Тогда формула Котеса (1.28) примет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}.$$

Это формула трапеций при разбиении $n = 1$, т. е. вся криволинейная трапеция заменяется одной прямолинейной.

Пусть $n = 2$. Кривую заменяем параболой. Коэффициенты

$$C_2^0 = \frac{\int_0^1 \left(z - \frac{1}{2}\right)(z-1) dz}{\left(0 - \frac{1}{2}\right)(0-1)} = \frac{1}{6},$$

$$C_2^1 = \frac{\int_0^1 (z-0)(z-1) dz}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \frac{4}{6},$$

$$C_2^2 = \frac{\int_0^1 (z-0)\left(z - \frac{1}{2}\right) dz}{(1-0)\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{6}.$$

Тогда формула Котеса (1.28) примет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{6} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

При разбиении $n = 2$ формула Котеса совпадает с формулой Симпсона.

Коэффициенты C_n^i для $n = 3, 4, 5, \dots$ могут быть вычислены подобным образом, и составлена таблица:

$$\begin{aligned} n=1; & \quad C_1^0 = C_1^1 = \frac{1}{2}; \\ n=2; & \quad C_2^0 = C_2^2 = \frac{1}{6}; \quad C_2^1 = \frac{4}{6}; \\ n=3; & \quad C_3^0 = C_3^3 = \frac{1}{8}; \quad C_3^1 = C_3^2 = \frac{3}{8}; \\ & \dots \end{aligned}$$

Таблица коэффициентов формулы Котеса до $n = 10$ приведена в приложении. Заметим, что в результате замены переменной, которая была сделана в начале вывода формулы Котеса, коэффициенты C_n^i не зависят от пределов интегрирования a и b . В противном случае C_n^i пришлось бы каждый раз вычислять для определенных a и b .

или переписать иначе:

$$2C_n \{ na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \dots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}) \}.$$

Эта величина должна равняться величине интеграла (1.33):

$$2 \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \dots \right)$$

для любой функции вида (***) . Следовательно, при любых значениях коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n должно выполняться равенство

$$2 \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \dots \right) = 2C_n \{ na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \dots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}) \}.$$

Исходя из этого

$$1 = C_n n,$$

откуда

$$C_n = \frac{1}{n},$$

и затем

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \frac{n}{3},$$

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0,$$

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 = \frac{n}{5},$$

.....

Уравнений получится столько, сколько коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, т. е. n штук, неизвестных тоже n : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Эта система уравнений была решена при различных n и определены неизвестные $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Таким образом, определен коэффициент C_n и узлы x_1, x_2, \dots, x_n квадратурной формулы Чебышева

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \frac{2}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]. \quad (1.34)$$

Составлены таблицы значений узлов при различных количествах узлов n в формуле Чебышева (1.34) (табл. 4):

Таблица 4

Число узлов, n	Значения узлов
2	$x_1 = -x_2 = 0,577350$
3	$x_1 = -x_3 = 0,707107$ $x_2 = 0$
4	$x_1 = -x_4 = 0,794654$ $x_2 = -x_3 = 0,187592$
...

Значения узлов до $n = 9$ приведены в приложении.

Если пределы интегрирования a и b , формула Чебышева принимает вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [f(X_1) + f(X_2) + \dots + f(X_n)],$$

где

$$X_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i,$$

а x_i берется из таблицы.

Квадратурная формула Гаусса

Общая формула

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) [C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \dots + C_n f(x_n)] \quad (1.35)$$

для приближенного вычисления интеграла заключает $2n$ произвольных величин: C_1, C_2, \dots, C_n и x_1, x_2, \dots, x_n . Гаусс предложил выбрать их так, чтобы при данном числе узлов n эта формула давала наибольшую точность. Это будет достигнуто, если коэффициенты C_1, C_2, \dots, C_n и узлы x_1, x_2, \dots, x_n определить так, чтобы формула была точной для многочленов максимально высокой степени (степени не выше $2n - 1$):

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{2n-1} x^{2n-1}. \quad (1.36)$$

Заметим, что при том же числе узлов n формулы Котеса и Чебышева верны для многочленов, степень которых не выше $n - 1$.

При выводе формулы Гаусса предположим, что пределы интеграла $+1$ и -1 , и начнем с вычисления узлов x_1, x_2, \dots, x_n , а когда узлы будут найдены, коэффициенты C_i можно будет вычислить по формуле (1.30).

Пусть есть функция

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n,$$

такая, что ее корни x_1, x_2, \dots, x_n . Если мы найдем функцию $F(x)$, т. е. коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_n , то нахождение узлов сведется к решению уравнения

$$F(x) = 0.$$

Многочлен

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{2n-1} x^{2n-1}$$

степени $2n - 1$, для которого приближенное равенство (1.35) должно выполняться точно

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = (b-a) [C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \dots + C_n f(x_n)], \quad (1.37)$$

всегда можно разделить на многочлен $F(x)$ со степенью n . Обозначив частное через $Q(x)$ и остаток через $R(x)$, запишем тождество

$$f(x) = F(x) Q(x) + R(x), \quad (1.38)$$

причем степени многочленов $Q(x)$ и $R(x)$ будут не выше $n - 1$. Очевидно, что

$$f(x_1) = R(x_1), \quad f(x_2) = R(x_2), \quad \dots, \quad f(x_n) = R(x_n),$$

поскольку при

$$x = x_1, \quad x = x_2, \quad \dots, \quad x = x_n$$

функция $F(x)$ обращается в нуль. Поэтому равенство (1.37) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} f(x) dx &= \int_{-1}^{+1} F(x) Q(x) dx + \int_{-1}^{+1} R(x) dx = \\ &= C_1 R(x_1) + C_2 R(x_2) + \dots + C_n R(x_n). \end{aligned}$$

С другой стороны, многочлен $R(x)$ степени $n - 1$, т. е. ниже $2n - 1$, поэтому это же равенство (1.37) должно выполняться точно и для многочлена $R(x)$:

$$\int_{-1}^{+1} R(x) dx = C_1 R(x_1) + C_2 R(x_2) + \dots + C_n R(x_n).$$

Вычитая это равенство из предыдущего, получаем

$$\int_{-1}^{+1} F(x) Q(x) dx = 0. \quad (1.39)$$

Этим равенством многочлен $F(x)$ вполне определяется. Действительно, поскольку при записи тождества (1.38) предполагалось, что $f(x)$ произвольный многочлен степени $2n - 1$, то и $Q(x)$ – произвольный многочлен степени $n - 1$:

$$Q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}.$$

Равенство (1.39) должно выполняться при любых величинах

$$b_0, b_1, \dots, b_{n-2}, b_{n-1},$$

следовательно, должно выполняться в отдельности:

$$\int_{-1}^{+1} x^{n-1} F(x) dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} x^{n-2} F(x) dx = 0,$$

.....

$$\int_{-1}^{+1} x F(x) dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} F(x) dx = 0.$$

Подставив в эти равенства

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

и проинтегрировав, мы получим n уравнений для определения n коэффициентов:

$$A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n.$$

Определив из этих уравнений коэффициенты A , составим функцию $F(x)$. Приравняв ее к нулю, найдем корни

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Зная корни, вычислим коэффициенты C по общей формуле (1.30).

Возьмем, например, $n = 2$, тогда функция $F(x)$ определится условиями

$$\int_{-1}^{+1} x F(x) dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} F(x) dx = 0,$$

причем $F(x) = x^2 + A_1 x + A_2$. Проинтегрировав, получим уравнения

$$\frac{A_1}{3} = 0, \quad \frac{1}{3} + A_2 = 0,$$

следовательно, $F(x) = x^2 - \frac{1}{3}$.

Отсюда корни: $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Коэффициент C_1 найдем по формуле (1.30):

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} dx = \int_{-1}^{+1} \frac{x - \frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}} dx = 1.$$

Точно так же получим $C_2 = 1$.

Узлы и коэффициенты (веса) формулы Гаусса вычислены для различных n .

В общем случае, если пределы интеграла a и b , формула Гаусса принимает вид

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) [A_1 f(X_1) + A_2 f(X_2) + \dots + A_n f(X_n)]. \quad (1.40)$$

В табл. 5 приведены узлы и коэффициенты формулы Гаусса для пределов интеграла

$$a = 0, b = 1,$$

при которых формула Гаусса будет

$$\int_0^1 f(x) dx = A_1 f(X_1) + A_2 f(X_2) + \dots + A_n f(X_n).$$

Таблица 5

Число узлов, n	Значения узлов	Коэффициенты
1	$x_1 = 0,5$	$A_1 = 1$
2	$x_1 = 0,21132487$	$A_1 = \frac{1}{2}$
	$x_2 = 0,78867513$	$A_2 = \frac{1}{2}$
3	$x_1 = 0,11270167$	$A_1 = \frac{5}{18}$
	$x_2 = 0,5$	$A_2 = \frac{4}{9}$
	$x_3 = 0,88729833$	$A_3 = \frac{5}{18}$
...

Если интеграл имеет пределы a и b , вычисления ведутся по формуле (1.40). При этом

$$X_i = a + (b - a) \bar{x}_i,$$

а x_i берется из таблицы.

Значения коэффициентов и узлов до $n = 8$ приведены в приложении.

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

по приближенным формулам – трапеций, Симпсона, Чебышева, Гаусса.

Решение

1. Формула трапеций

Пусть $n = 10$. Тогда величина промежутка h будет

$$h = \frac{1}{10} \frac{\pi}{2} = 0,1570796... = 9^0$$

и значения аргумента x будут

$$0^0, 9^0, 18^0, 27^0, \dots, 81^0, 90^0.$$

По формуле трапеций

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \approx h \left[\frac{1}{2} \sin 0^0 + \sin 9^0 + \dots + \sin 81^0 + \frac{1}{2} \sin 90^0 \right] = 0,997943.$$

Значения $\sin x$ приведены в табл. 6.

Таблица 6

$1/2 \sin 0^0 = 0,00000$	$\sin 54^0 = 0,80902$
$\sin 9^0 = 0,15643$	$\sin 63^0 = 0,89101$
$\sin 18^0 = 0,30902$	$\sin 72^0 = 0,95106$
$\sin 27^0 = 0,45399$	$\sin 81^0 = 0,98769$
$\sin 36^0 = 0,58779$	$1/2 \sin 90^0 = 0,50000$
$\sin 45^0 = 0,70711$	

$$J_{\text{трап}} = 0,997943.$$

2. Формула Симпсона

Пусть $n = 10$, $h = \frac{1}{10} \frac{\pi}{2} = 0,1570796...$ По формуле Симпсона

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \approx \frac{1}{3} h \left[\sin 0^0 + 4 \sin 9^0 + 2 \sin 18^0 + 4 \sin 27^0 + 2 \sin 36^0 + 4 \sin 45^0 + 2 \sin 54^0 + 4 \sin 63^0 + 2 \sin 72^0 + 4 \sin 81^0 + \sin 90^0 \right] = 1,000003.$$

Значения $\sin x$, необходимые для вычислений, приведены в табл. 6. Таким образом,

$$J_{\text{Симп}} = 1,000003.$$

3. Формула Чебышева

Вычислим тот же интеграл, применив формулу Чебышева и взяв, например, пять узлов ($n = 5$). Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \approx \frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) [\sin X_1 + \sin X_2 + \sin X_3 + \sin X_4 + \sin X_5]. \quad (*)$$

Узлы X_1, \dots, X_5 определяются по формуле

$$X_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i.$$

По таблице (см. прил., с. 49) для $n = 5$ имеем

$$\begin{aligned} x_1 = -x_5 &= 0,832498, \\ x_2 = -x_4 &= 0,374541, \\ x_3 &= 0,000000. \end{aligned}$$

Здесь

$$a = 0, \quad b = \frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{4} = 0,78539816\dots, \quad \frac{b-a}{2} = \frac{\pi}{4} = 0,78539816\dots$$

Значения X_i и $\sin X_i$ приведены в табл. 7.

$$\text{Подставив } \sin X_1, \sin X_2, \dots, \sin X_5 \text{ и } h = \frac{\pi}{2} \frac{1}{10} = 0,15707963\dots$$

в формулу (*), получим $J_{\text{Чебышева}} = 1,000003$.

Таблица 7

$X_1 = 1,439241$	$\sin X_1 = 0,99136$
$X_2 = 1,079562$	$\sin X_2 = 0,88175$
$X_3 = 0,785398$	$\sin X_3 = 0,70711$
$X_4 = 0,491234$	$\sin X_4 = 0,47171$
$X_5 = 0,131556$	$\sin X_5 = 0,13118$

4. Формула Гаусса

Вычислим интеграл по формуле Гаусса, также взяв пять узлов:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \approx \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) [A_1 \sin X_1 + A_2 \sin X_2 + A_3 \sin X_3 + A_4 \sin X_4 + A_5 \sin X_5], \quad (**)$$

где узлы X_i вычисляются по формуле

$$X_i = a + (b - a) x_i.$$

Величины x_i и A_i берутся из таблицы для $n = 5$ (см. прил., с. 51).

Здесь

$$a = 0, \quad b = \frac{\pi}{2}, \quad b - a = \frac{\pi}{2} = 1,570796326\dots$$

Составим таблицу.

Таблица 8

i	x_i	X_i	A_i	$A_i \sin X_i$
1	0,04691008	0,07368618	0,11846344	0,00872122
2	0,23076534	0,36248535	0,23931433	0,08486066
3	0,5	0,78539816	0,28444444	0,20113260
4	0,76923466	1,20831098	0,23931433	0,22376330
5	0,95308992	1,49711015	0,11846344	0,11814198

Подставив в формулу (**) значения $A_i \sin X_i$ и учтя, что

$$\frac{\pi}{2} = 1,57079633\dots,$$

получим $J_{\text{Гаусса}} = 1,0000000$.

В результате при значении интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 1$$

формулы для приближенного вычисления дали следующие результаты:

$$\begin{array}{ll} J_{\text{трап}} = 0,997943, & J_{\text{Симп}} = 1,000003, \\ J_{\text{Чебышева}} = 1,000003, & J_{\text{Гаусса}} = 1,000000. \end{array}$$

Формулы Чебышева и Гаусса при вдвое меньшем числе узлов дают более точные результаты, чем формула трапеций. Заметим, что формула Чебышева при количестве узлов $n = 5$ дает такой же результат, как формула Симпсона при $n = 10$. Результат, наиболее близкий к точному, обеспечивает формула Гаусса. Погрешность формулы Гаусса при n узлах можно оценить из соотношения

$$|R| \leq \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{[(n+1)(n+2)\dots 2n]^3} M_{2n},$$

где M_{2n} – максимум модуля $2n$ -й производной подынтегральной функции $f(x)$ на отрезке интегрирования $[a; b]$.

Наибольшую точность в данном примере обеспечила формула Гаусса. Однако это не всегда имеет место. Рассмотрим следующий пример.

Пример 5. Дана функция

$$F(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)^2.$$

По формуле Ньютона – Лейбница можно легко вычислить интеграл

$$\int_{-1}^{+1} F(x) dx = 11,63636.$$

Если для приближенного вычисления этого интеграла применить формулу Гаусса при $n = 5$, то получим

$$J_{\text{Гаусса}} = 0,$$

поскольку функция

$$F(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)^2$$

обращается в нуль при значениях x , соответствующих пяти узлам формулы Гаусса:

$$\begin{array}{ll} X_1 = -1 + 2 \times 0,04691008 = -0,90617984, & F(X_1) = 0; \\ X_2 = -1 + 2 \times 0,23076534 = -0,53846932, & F(X_2) = 0; \\ X_3 = -1 + 2 \times 0,5 = 0, & F(X_3) = 0; \\ X_4 = -1 + 2 \times 0,76923466 = 0,53846932, & F(X_4) = 0; \\ X_5 = -1 + 2 \times 0,95308992 = 0,90617984, & F(X_5) = 0. \end{array}$$

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ (задача Коши). Решением этого уравнения является функция $y(x)$ – такая, что

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{2.2}$$

и $y(x_0) = y_0$.

Точные методы позволяют найти аналитический вид функции $y(x)$, а в тех случаях, когда это невозможно или трудно, использу-

ются численные методы, дающие решение задачи в виде таблицы приближенных значений $y(x)$ на отрезке $[x_0, x_m]$.

Зададим на отрезке $[x_0, x_m]$ равноотстоящие точки

$$x_i = x_0 + i h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad h = \frac{x_m - x_0}{n},$$

которые разбивают отрезок на n частей. Проинтегрируем обе части равенства (2.2) на отрезке $[x_0; x_1]$:

$$\int_{x_0}^{x_1} y'(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) dx,$$

$$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) dx,$$

или

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) dx. \quad (2.3)$$

Для вычисления интеграла в правой части равенства (2.3) используются различные приближенные методы. Вычислим этот интеграл, например, используя метод *левых прямоугольников*. При этом не будем разбивать на части отрезок интегрирования $[x_0; x_1]$:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) dx \approx h f(x_0, y(x_0)). \quad (2.4)$$

Тогда равенство (2.3) примет вид

$$y(x_1) \approx y(x_0) + h f(x_0, y(x_0)).$$

Повторив те же рассуждения для следующего отрезка $[x_1; x_2]$, получим

$$y(x_2) \approx y(x_1) + h f(x_1, y(x_1))$$

и т. д. Приближенное значение $y(x)$ в точке x_{i+1} найдется по формуле

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h f(x_i, y(x_i)),$$

где

$$x_{i+1} = x_i + h.$$

Приближенные значения функции $y(x)$ в точках x_i обозначим y_i :

$$y_{i+1} \approx y_i + h f(x_i, y_i). \quad (2.5)$$

Формула (2.5) позволяет последовательно находить приближенные значения функции $y(x)$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_n = x_m$. Описанный метод решения дифференциального уравнения называется *методом Эйлера*.

На каждом шаге метод Эйлера имеет погрешность. Например, для первого шага

$$\begin{aligned} \Delta &= y(x_1) - [y(x_0) + h f(x_0, y_0)] = \\ &= y_0 + y'(x_0) h + O(h^2) - [y(x_0) + h f(x_0, y_0)] = O(h^2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из соотношения (2.6) видно, что локальная погрешность – на одном шаге – есть $O(h^2)$. После n шагов суммарная погрешность Δ_s будет равна $n \cdot O(h^2)$. Поскольку $n \sim 1/h$, то

$$\Delta_s = O(h).$$

Поэтому метод Эйлера – метод первого порядка точности по h .

Существуют различные усовершенствования метода Эйлера. Например, в методе *Эйлера – Коши* вычисления проводятся по формулам

$$\begin{aligned} y_{i+1}^* &= y_i + h f(x_i, y_i), \\ y_{i+1} &= y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)}{2}. \end{aligned}$$

Тем самым для расчета интеграла в правой части равенства (2.3) используется *метод трапеций*. При этом одно из оснований трапеции есть значение подынтегральной функции на правом конце отрезка и вычисляется приближенно (поскольку y_{i+1}^* – приближение y_{i+1} -го, найденное методом Эйлера).

Для того чтобы интеграл в правой части равенства (2.3) вычислить методом *средних прямоугольников*, необходимо значение функции $f(x, y)$ в середине отрезка $[x_i; x_{i+1}]$. Для этого найдем

$$x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2} \quad (2.7)$$

и приближенно, методом Эйлера найдем

$$y_{i+1/2}^* = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i). \quad (2.8)$$

Тогда для y_{i+1} получим

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}^*). \quad (2.9)$$

Метод, использующий алгоритм (2.7)–(2.9), называется *методом серединных точек*.

Суммарная погрешность метода Эйлера – Коши и метода серединных точек равна

$$\Delta_S = O(h^2),$$

т. е. это методы второго порядка точности: они на порядок точнее метода Эйлера.

Погрешности значений y_i можно приближенно оценить методом *двойного пересчета* (метод Рунге). Для этого на отрезке $[x_0, x_m]$ находят значения y_i с шагом h , затем проводят вычисления с шагом $h/2$. В результате каждой из точек

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

будет соответствовать два приближенных значения функции: y_i – полученное при расчетах с шагом h , и y_i^* , полученное при расчетах с шагом $h/2$. Приближение y_i^* является более точным, его и следует взять в качестве ответа. Погрешность этого приближения, т. е. различие между y_i^* и точным значением функции в точке x_i , оценивается по формуле

$$\left| R_{y_i^*} \right| \approx \left| y_i - y_i^* \right| \quad (2.10)$$

для метода Эйлера и по формуле

$$\left| R_{y_i^*} \right| \approx \frac{\left| y_i - y_i^* \right|}{3} \quad (2.11)$$

для методов трапеций и серединных точек.

Пример 6. Используя метод Эйлера и метод серединных точек, на отрезке $[1; 1,2]$ найти численное решение дифференциального уравнения

$$y' = x^2 + y^2$$

удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$, и оценить погрешность решения при $x = 1,2$.

Решение

1. *Метод Эйлера*

Пусть $n = 5$, тогда

$$h = \frac{x_m - x_0}{n} = \frac{1,2 - 1}{5} = 0,04.$$

Воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h f(x_i, y_i), \\ x_{i+1} &= x_i + h. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь $f(x, y) = x^2 + y^2$, $i = 0, 1, 2, \dots, 5$.

Учтя, что

$$x_0 = 1, y_0 = 1,$$

по формулам (2.12) найдем x_1, y_1 и т. д. Составим таблицу приближенных значений функции (табл. 9):

Таблица 9

i	x_i	y_i
0	1,000	1,0000
1	1,040	1,0800
2	1,080	1,1699
3	1,120	1,2713
4	1,160	1,3862
5	1,200	1,5168

Теперь возьмем $n^* = 2n = 10$, тогда

$$h = \frac{x_m - x_0}{n^*} = \frac{1,2 - 1}{10} = 0,02,$$

$i = 0, 1, 2, \dots, 10$.

Снова проведем вычисления по формулам (2.12) и составим таблицу.

Таблица 10

i	x_i	y_i
0	1,000	1,0000
1	1,020	1,0400
2	1,040	1,0824
3	1,060	1,1275
4	1,080	1,1754
5	1,100	1,2264
6	1,120	1,2806
7	1,140	1,3385
8	1,160	1,4004
9	1,180	1,4665
10	1,200	1,5373

В результате для $x = 1,2$ мы получили два приближенных значения функции: $y_n = 1,5168$ и $y_{n^*} = 1,5373$. В качестве ответа возьмем более точное приближение $y_{n^*} = 1,5373$, соответствующее меньшему шагу. Погрешность его оценим по формуле (2.10):

$$\Delta \approx |y_n - y_{n^*}| = |1,5168 - 1,5373| = 0,021.$$

Поэтому

$$y(1,2) = 1,537, \Delta \approx 0,021.$$

2. Метод серединных точек

Пусть $n = 5$, тогда длина отрезка

$$h = \frac{x_m - x_0}{n} = \frac{1,2 - 1}{5} = 0,04.$$

Для нахождения приближенных значений функции y_i воспользуемся формулами

$$x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2},$$

$$y_{i+1/2}^* = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}^*),$$

$$x_{i+1} = x_i + h.$$

Здесь $f(x, y) = x^2 + y^2$, $i = 0, 1, 2, \dots, 5$ и $x_0 = 1, y_0 = 1$. Получим значение y_1 в точке x_1 :

$$x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2} = 1,000 + \frac{0,04}{2} = 1,020,$$

$$y_{1/2}^* = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0) = 1,000 + \frac{0,04}{2} (1^2 + 1^2) = 1,040.$$

Теперь мы сможем найти функцию $f(x, y)$ в середине отрезка $[x_0; x_1]$ и вычислить y_1 :

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h f(x_{1/2}, y_{1/2}^*) = \\ &= 1,000 + 0,04 \cdot (1,020^2 + 1,040^2) = 1,08488. \end{aligned}$$

Найдем

$$x_1 = x_0 + h = 1,000 + 0,04 = 1,040.$$

Таким образом, в точке $x_1 = 1,040$ имеем $y_1 = 1,08488$. Действуя так же, найдем x_2, y_2 и т. д. Составим таблицу приближенных значений функции.

Таблица 11

i	x_i	y_i
0	1,000	1,0000
1	1,040	1,0849
2	1,080	1,1809
3	1,120	1,2900
4	1,160	1,4147
5	1,200	1,5583

Теперь возьмем $n^* = 2n = 10$, тогда

$$h = \frac{x_m - x_0}{n^*} = \frac{1,2 - 1}{10} = 0,02,$$

$i = 0, 1, 2, \dots, 10$.

Снова проведем вычисления и составим таблицу.

Таблица 12

i	x_i	y_i
0	1,000	1,0000
1	1,020	1,0412
2	1,040	1,0850
3	1,060	1,1316
4	1,080	1,1812
5	1,100	1,2341
6	1,120	1,2906
7	1,140	1,3509
8	1,160	1,4156
9	1,180	1,4850
10	1,200	1,5595

Таким образом, для $x = 1,2$ мы получили два приближенных значения функции: $y_n = 1,5583$ и $y_{n^*} = 1,5595$. В качестве ответа возьмем более точное приближение $y_{n^*} = 1,5595$, соответствующее меньшему шагу. Погрешность его оценим по формуле (2.11)

$$\Delta \approx \frac{|y_n - y_{n^*}|}{3} = \frac{|1,5583 - 1,5595|}{3} = 0,0004.$$

Следовательно,

$$y(1,2) = 1,5595, \Delta \approx 0,0004.$$

Сравним это значение с результатом, полученным методом Эйлера:

$$y(1,2) = 1,537, \Delta \approx 0,021.$$

Погрешность метода срединных точек на порядок меньше.

Узлы квадратурной формулы Чебышева

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \frac{2}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

Число узлов, n	Значения узлов
2	$x_1 = -x_2 = 0,577350$
3	$x_1 = -x_3 = 0,707107$ $x_2 = 0,000000$
4	$x_1 = -x_4 = 0,794654$ $x_2 = -x_3 = 0,187592$
5	$x_1 = -x_5 = 0,832498$ $x_2 = -x_4 = 0,374541$ $x_3 = 0,000000$
6	$x_1 = -x_6 = 0,866247$ $x_2 = -x_5 = 0,422519$ $x_3 = -x_4 = 0,266635$
7	$x_1 = -x_7 = 0,883862$ $x_2 = -x_6 = 0,529657$ $x_3 = -x_5 = 0,323912$ $x_4 = 0,000000$
9	$x_1 = -x_9 = 0,911589$ $x_2 = -x_8 = 0,601019$ $x_3 = -x_7 = 0,528762$ $x_4 = -x_6 = 0,167906$ $x_5 = 0,000000$

Коэффициенты формулы Котеса

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) [C_n^0 f(x_0) + C_n^1 f(x_1) + \dots + C_n^n f(x_n)].$$

$n = 1$	$C_1^0 = C_1^1 = \frac{1}{2}$
$n = 2$	$C_2^0 = C_2^2 = \frac{1}{6}; C_2^1 = \frac{4}{6}$
$n = 3$	$C_3^0 = C_3^3 = \frac{1}{8}; C_3^1 = C_3^2 = \frac{3}{8}$
$n = 4$	$C_4^0 = C_4^4 = \frac{7}{90}; C_4^1 = C_4^3 = \frac{16}{45}; C_4^2 = \frac{2}{15}$
$n = 5$	$C_5^0 = C_5^5 = \frac{19}{288}; C_5^1 = C_5^4 = \frac{25}{96}; C_5^2 = C_5^3 = \frac{25}{144}$
$n = 6$	$C_6^0 = C_6^6 = \frac{41}{840}; C_6^1 = C_6^5 = \frac{9}{35}; C_6^2 = C_6^4 = \frac{9}{280}; C_6^3 = \frac{34}{105}$
$n = 7$	$C_7^0 = C_7^7 = \frac{751}{17280}; C_7^1 = C_7^6 = \frac{3577}{17280}; C_7^2 = C_7^5 = \frac{1323}{17280};$ $C_7^3 = C_7^4 = \frac{2989}{17280}$
$n = 8$	$C_8^0 = C_8^8 = \frac{989}{28350}; C_8^1 = C_8^7 = \frac{5838}{28350}; C_8^2 = C_8^6 = \frac{-928}{28350};$ $C_8^3 = C_8^5 = \frac{10496}{28350}; C_8^4 = \frac{-4540}{28350}$
$n = 9$	$C_9^0 = C_9^9 = \frac{2857}{89600}; C_9^1 = C_9^8 = \frac{15741}{89600}; C_9^2 = C_9^7 = \frac{1080}{89600};$ $C_9^3 = C_9^6 = \frac{19344}{89600}; C_9^4 = C_9^5 = \frac{5778}{89600}$

Окончание табл.

$n = 10$	$C_{10}^0 = C_{10}^{10} = \frac{16067}{598752}; C_{10}^1 = C_{10}^9 = \frac{106300}{598752}; C_{10}^2 = C_{10}^8 = \frac{-48525}{598752};$ $C_{10}^3 = C_{10}^7 = \frac{272400}{598752}; C_{10}^4 = C_{10}^6 = \frac{-260550}{598752}; C_{10}^5 = \frac{427368}{598752}$
----------	---

Узлы и коэффициенты формулы Гаусса
(для пределов интеграла $a = 0, b = 1$)

$$\int_0^1 f(x)dx = A_1 f(X_1) + A_2 f(X_2) + \dots + A_n f(X_n).$$

n	x_i	A_i
1	$x_1 = 0,5$	$A_1 = 1$
2	$x_1 = 0,21132487$ $x_2 = 0,78867513$	$A_1 = 0,5$ $A_2 = 0,5$
3	$x_1 = 0,11270167$ $x_2 = 0,5,$ $x_3 = 0,88729833$	$A_1 = \frac{5}{18}$ $A_2 = \frac{4}{9}$ $A_3 = \frac{5}{18}$
4	$x_1 = 0,06943184$ $x_2 = 0,33000948$ $x_3 = 0,66999052$ $x_4 = 0,93056816$	$A_1 = A_4 = 0,17392742$ $A_2 = A_3 = 0,32607258$
5	$x_1 = 0,04691008$ $x_2 = 0,23076534$ $x_3 = 0,5$ $x_4 = 0,76923466$ $x_5 = 0,95308992$	$A_1 = A_5 = 0,11846344$ $A_2 = A_4 = 0,23931433$ $A_3 = 0,28444444$

Окончание табл.

n	x_i	A_i
6	$x_1 = 0,03376524$ $x_2 = 0,16939531$ $x_3 = 0,38069041$ $x_4 = 0,61930959$ $x_5 = 0,83060469$ $x_6 = 0,96623476$	$A_1 = A_6 = 0,08566225$ $A_2 = A_5 = 0,18038079$ $A_3 = A_4 = 0,23395697$
7	$x_1 = 0,02544604$ $x_2 = 0,12923441$ $x_3 = 0,29707742$ $x_4 = 0,5$ $x_5 = 0,70292258$ $x_6 = 0,87076559$ $x_7 = 0,97455396$	$A_1 = A_7 = 0,06474248$ $A_2 = A_6 = 0,13985269$ $A_3 = A_5 = 0,190915025$ $A_4 = 0,20897959$
8	$x_1 = 0,01985507$ $x_2 = 0,10166676$ $x_3 = 0,23723379$ $x_4 = 0,40828268$ $x_5 = 0,59171732$ $x_6 = 0,76276621$ $x_7 = 0,89833324$ $x_8 = 0,98014493$	$A_1 = A_8 = 0,05061427$ $A_2 = A_7 = 0,11119052$ $A_3 = A_6 = 0,15685332$ $A_4 = A_5 = 0,18134189$

Понятие « O большое»

Пусть $\varphi(h)$ – некоторая функция переменной h с конечной областью определения D_φ на полуоси $h > 0$, причем $h \in D_\varphi$ может принимать сколь угодно малые значения. Тогда, если существуют такие положительные числа h_0, c, k , что при всех $h \in D_\varphi$, удовлетворяющих условию $0 < h \leq h_0$, выполняется неравенство

$$|\varphi(h)| \leq ch^k,$$

пишут

$$\varphi(h) = O(h^k)$$

и говорят, что $\varphi(h)$ есть O большое от h^k (при $h \rightarrow 0$).

Пример: $\sin^2 2h = O(h^2)$, так как $\sin^2 2h \leq 4h^2$.

Список литературы

- Турчак Л. И., Плотников П. В.* Основы численных методов. М.: Физматлит, 2003.
- Поршнев С. В.* Вычислительная математика: Курс лекций. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
- Зализняк В. Е.* Основы научных вычислений: Введение в численные методы для физиков. М.: Едиториал УРСС, 2002.
- Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях. М.: Техтеоретлит., 1950.
- Вержбицкий В. М.* Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002.
- Фильчаков П. Ф.* Численные и графические методы прикладной математики. Киев: Наукова думка, 1970.
- Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2003.
- Волков Е. А.* Численные методы. СПб.: Лань, 2004.

Учебное издание

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ
(численное интегрирование,
решение обыкновенных дифференциальных уравнений)

Методические указания
по курсу «Численные методы и математическое моделирование»
для студентов 2 курса физического факультета

Составитель
Чернышев Владимир Артурович

Редактор и корректор Р. Н. Кислых
Компьютерная верстка Н. В. Комардина

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе УрГУ

Лицензия ИД № 05974 от 03.10.2001. Темплан 2005 г., поз. 22.
Подписано в печать 00.02.2005. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Уч.-изд. л. 2,6. Усл. печ. л. 3,25. Тираж 200 экз. Заказ

Издательство Уральского университета. 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

Отпечатано в ИПЦ «Издательство УрГУ». 620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.