ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА — СЕГЕ В ПРОСТРАНСТВЕ L_0 ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ[1]

А. О. Леонтьева

Неравенства вида $\|f_n^{(\alpha)}\cos\theta+\tilde f_n^{(\alpha)}\sin\theta\|_p\le B_n(\alpha,\theta)_p\|f_n\|_p$ для классических производных при $\alpha\in\mathbb{N}$ и производных Вейля вещественного порядка $\alpha\ge 0$ тригонометрических полиномов f_n порядка $n\ge 1$ и их сопряженных при вещественном θ и $0\le p\le\infty$ называют неравенствами Бернштейна — Сеге. Они являются обобщением классического неравенства Бернштейна ($\alpha=1$, $\theta=0$, $p=\infty$). Такие неравенства изучаются уже более 90 лет. Задача исследования неравенства Бернштейна — Сеге состоит в изучении свойств наилучшей (наименьшей) константы $B_n(\alpha,\theta)_p$, ее точного значения и экстремальных полиномов, на которых это неравенство обращается в равенство. Г. Сеге (1928), А. Зигмунд (1933), А. И. Козко (1998) показали, что в случае $p\ge 1$ для вещественных $\alpha\ge 1$ и любых вещественных θ для наилучшей константы выполняется равенство $B_n(\alpha,\theta)_p=n^\alpha$. Представляют интерес неравенства Бернштейна — Сеге при $p=0$ как минимум по той причине, что среди всех $0\le p\le\infty$ константа $B_n(\alpha,\theta)_p$ является наибольшей по p при $p=0$. В 1981 г. В. В. Арестов доказал, что при $r\in\mathbb{N}$ и $\theta=0$ в пространствах L_p, $0\le p<1$, неравенство Бернштейна выполняется с константой n^r, т. е. $B_n(r,0)_p=n^r$. В 1994 г. он доказал, что при $p=0$ для производной сопряженного полинома порядка $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, т. е. при $\theta=\pi/2$, точная константа имеет показательный рост по n, а точнее, справедливо соотношение $B_n(r,\pi/2)_0=4^{n+o(n)}$. В двух недавних работах автора (2018) получен подобный результат для производных Вейля положительного нецелого порядка при любом вещественном θ. В данной работе доказано, что формула $B_n(\alpha,\theta)_0=4^{n+o(n)}$ имеет место и для производных неотрицательных целых порядков α и произвольных вещественных $\theta\ne\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ключевые слова: тригонометрический полином, сопряженный полином, производная Вейля, неравенство Бернштейна — Сеге, пространство L_0.

A. O. Leont'eva. Bernstein–Szegő inequality for trigonometric polynomials in the space L_0.

Inequalities of the form $\|f_n^{(\alpha)}\cos\theta+\tilde f_n^{(\alpha)}\sin\theta\|_p\le B_n(\alpha,\theta)_p\|f_n\|_p$ for classical derivatives of order $\alpha\in\mathbb{N}$ and Weyl derivatives of real order $\alpha\ge 0$ of trigonometric polynomials f_n of order $n\ge 1$ and their conjugates for real θ and $0\le p\le\infty$ are called Bernstein–Szegő inequalities. They are generalizations of the classical Bernstein inequality ($\alpha=1$, $\theta=0$, $p=\infty$). Such inequalities have been studied for more than 90 years. The problem of studying the Bernstein–Szegő inequality consists in analyzing the properties of the best (the smallest) constant $B_n(\alpha,\theta)_p$, its exact value, and extremal polynomials for which this inequality turns into an equality. G. Szegő (1928), A. Zygmund (1933), and A. I. Kozko (1998) showed that, in the case $p\ge 1$ for real $\alpha\ge 1$ and any real θ, the best constant $B_n(\alpha,\theta)_p$ is n^α. For $p=0$, Bernstein–Szegő inequalities are of interest at least because the constant $B_n(\alpha,\theta)_p$ is the largest for $p=0$ over $0\le p\le\infty$. In 1981, V. V. Arestov proved that, for $r\in\mathbb{N}$ and $\theta=0$, the Bernstein inequality is true with the constant n^r in the spaces L_p, $0\le p<1$; i.e., $B_n(r,0)_p=n^r$. In 1994, he proved that, for $p=0$ and the derivative of the conjugate polynomial of order $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, i.e., for $\theta=\pi/2$, the exact constant grows exponentially in n; more precisely, $B_n(r,\pi/2)_0=4^{n+o(n)}$. In two recent papers of the author (2018), a similar result was obtained for Weyl derivatives of positive noninteger order for any real θ. In the present paper, we prove that the formula $B_n(\alpha,\theta)_0=4^{n+o(n)}$ holds for derivatives of nonnegative integer orders α and any real $\theta\ne\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Keywords: trigonometric polynomial, conjugate polynomial, Weyl derivative, Bernstein–Szegő inequality, space L_0.

MSC: 42A05, 41A17, 26A33

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-129-135

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00336) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

1. Постановка задачи

Обозначим через $\mathscr{T}_n$ множество тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1.1}$$

порядка n с комплексными коэффициентами. Вместе с полиномом (1.1) будем рассматривать тригонометрически сопряженный ему полином

$$\tilde{f}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (b_k \cos kt - a_k \sin kt).$$

Для значений $0 \le p \le \infty$ параметра p рассмотрим на множестве $\mathscr{T}_n$ функционал $\|\cdot\|_p$, определенный следующими формулами:

$$\|f_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty;$$

$$\|f_n\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f_n\|_p = \max_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)| = \|f_n\|_C;$$

$$\|f_n\|_0 = \lim_{p\to 0} \|f_n\|_p = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f_n(t)| dt \right);$$

лишь при $p \ge 1$ этот функционал является нормой.

Для вещественного параметра $\alpha \ge 0$ рассмотрим производную Вейля [9] (см. также [8, гл. 19, § 4]) порядка α полинома (1.1)

$$D^\alpha f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \left(a_k \cos \left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} \right) + b_k \sin \left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right).$$

При натуральных α производная Вейля совпадает с классической производной: $D^\alpha f_n = f_n^{(\alpha)}$. В дальнейшем вместо $D^\alpha f_n$ будем писать $f_n^{(\alpha)}$. Производная Вейля обладает полугрупповым свойством: $D^\beta D^\alpha = D^{\alpha+\beta}$ для $\alpha, \beta \ge 0$. В случае $\alpha = 0$ она отбрасывает свободный член полинома: $D^0 f_n = f_n - a_0/2$.

Для вещественного числа θ рассмотрим на $\mathscr{T}_n$ оператор Вейля — Сеге D_θ^α, определенный формулой

$$\begin{aligned} D_\theta^\alpha f_n(t) &= f_n^{(\alpha)}(t) \cos\theta + \tilde{f}_n^{(\alpha)}(t) \sin\theta \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \left(a_k \cos \left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta \right) + b_k \sin \left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta \right) \right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Нас интересует норма оператора (1.2) относительно функционала $\|\cdot\|_p$, т. е. точная (наименьшая) константа $B_n(\alpha, \theta)_p$ в неравенстве

$$\|f_n^{(\alpha)} \cos\theta + \tilde{f}_n^{(\alpha)} \sin\theta\|_p \le B_n(\alpha, \theta)_p \|f_n\|_p, \quad f_n \in \mathscr{T}_n. \tag{1.3}$$

Неравенства такого типа называются неравенствами Бернштейна — Сеге. Эти неравенства имеют богатую историю (см., к примеру, работы [3–5] и приведенную в них библиографию). В данной статье неравенство (1.3) обсуждается при $p = 0$; этот случай важен, в частности, по той причине, что константа $B_n(\alpha, \theta)_p$ является наибольшей по p для $0 \le p \le \infty$ именно при $p = 0$ [1, следствие 1].

В работе (А. О. Леонтьева. Неравенство Бернштейна — Сеге для производной Вейля тригонометрических полиномов в пространстве L_0 // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 199–207) была получена логарифмическая асимптотика точной константы в неравенстве Бернштейна — Сеге (1.3) при $p = 0$ для производной положительного нецелого порядка α

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{B_n(\alpha,\theta)_0} = 4, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \notin \mathbb{N}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

В настоящей статье получен аналогичный результат для производных целого неотрицательного порядка, а именно, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть r — неотрицательное целое число, θ — произвольное вещественное число, не равное πk, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда для точной константы в неравенстве* (1.3) *при $p = 0$ справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{B_n(r,\theta)_0} = 4.$$

2. Вспомогательные результаты

Формула

$$f_n(t) = e^{-int} P_{2n}(e^{it}) \tag{2.1}$$

устанавливает взаимнооднозначное соответствие между множеством $\mathscr{P}_{2n}$ алгебраических многочленов степени (не выше) $2n$ и множеством $\mathscr{T}_n$ тригонометрических полиномов порядка n. С помощью формулы (2.1) экстремальные задачи для тригонометрических полиномов можно переформулировать в терминах задач для алгебраических многочленов на единичной окружности комплексной плоскости.

На множестве $\mathscr{P}_n$ алгебраических многочленов степени n будем рассматривать функционалы

$$\|P_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P_n(e^{it})|^p dt\right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty;$$

$$\|P_n\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|f_n\|_p = \max\{|P_n(e^{it})| \colon t \in \mathbb{R}\};$$

$$\|P_n\|_0 = \lim_{p\to+0} \|P_n\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|P_n(e^{it})| dt\right).$$

Видно, что если $P_{2n}(e^{it}) = e^{int} f_n(t)$, то $\|P_{2n}\|_p = \|f_n\|_p$.

Для многочленов P_n и Λ_n степени не выше n, записанных в виде

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k a_k z^k, \quad \Lambda_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda_k z^k,$$

многочлен

$$\Lambda_n P_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda_k a_k z^k, \quad \text{где} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{2.2}$$

называется композицией Сеге многочленов Λ_n и P_n. Свойства композиции Сеге можно найти в [7, отд. V; 6, гл. 4]. При фиксированном Λ_n композиция Сеге (2.2) является линейным оператором в $\mathscr{P}_n$.

В. В. Арестов [1] доказал, что для композиции Сеге справедливо неравенство

$$\|\Lambda_n P_n\|_0 \le \|\Lambda_n\|_0 \|P_n\|_0. \tag{2.3}$$

Неравенство (2.3) точное и обращается в равенство на многочлене $P_n^*(z) = (1+z)^n$.

Убедимся, что оператору D_θ^α на множестве $\mathscr{T}_n$ соответствует во множестве $\mathscr{P}_{2n}$ операция композиции Сеге

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = e^{-int}\left(\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta} P_{2n}\right)(e^{it}), \quad f_n(t) = e^{-int} P_{2n}(e^{it}), \tag{2.4}$$

с многочленом

$$\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}(z) = \sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} |k|^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)\operatorname{sign} k} z^{n+k}.$$

Запишем тригонометрический полином f_n в виде

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} c_k e^{ikt}. \tag{2.5}$$

По формуле (2.1) ему будет соответствовать алгебраический многочлен

$$P_{2n}(z) = \sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} c_k z^{n+k}.$$

В этом случае

$$\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta} P_{2n}(z) = \sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} c_k |k|^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)\operatorname{sign} k} z^{n+k},$$

и, следовательно,

$$e^{-int}\left(\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta} P_{2n}\right)(e^{it}) = \sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} c_k |k|^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)\operatorname{sign} k} e^{ikt}. \tag{2.6}$$

С другой стороны, при $1 \le k \le n$

$$D_\theta^\alpha e^{\pm ikt} = D_\theta^\alpha(\cos kt \pm i \sin kt)$$
$$= k^\alpha\left(\cos\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right) \pm i \sin\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right)\right) = |\pm k|^\alpha e^{\pm i(\pi\alpha/2+\theta)} e^{\pm ikt};$$

помимо того, константу оператор D_θ^α обращает в ноль. Следовательно, для полинома (2.5) справедлива формула

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} c_k |k|^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)\operatorname{sign} k} e^{ikt}. \tag{2.7}$$

Формулы (2.6) и (2.7) влекут (2.4).

Экстремальному в неравенстве (2.3) для $\left\|\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta} P_{2n}\right\|_0$ многочлену $P_{2n}^*(z) = (1+z)^{2n}$ по формуле (2.1) соответствует полином

$$e^{-int} P_{2n}^*(e^{it}) = e^{-int}(1+e^{it})^{2n} = 4^n h_n(t),$$

в силу (2.4) экстремальный в неравенстве (1.3) при $p = 0$, как и полином

$$h_n(t) = \cos^{2n}\frac{t}{2}. \tag{2.8}$$

Для полинома (2.8) по формуле (2.4) получаем

$$4^n D_\theta^\alpha h_n(t) = e^{-int}\left(\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta} P_{2n}^*\right)(e^{it}) = e^{-int}\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}(e^{it}).$$

Отсюда и из неравенства (2.3) следует, что

$$B_n(\alpha,\theta)_0 = \|\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}\|_0 = 4^n \|D_\theta^\alpha h_n\|_0.$$

Таким образом, полином h_n экстремален в неравенстве (1.3) при $p = 0$, и задача вычисления точной константы сводится к изучению производной Вейля — Сеге этого полинома.

3. Поточечная асимптотика производной Вейля — Сеге неотрицательного целого порядка экстремального полинома

В доказательстве теоремы 1 важную роль играет асимптотика полинома

$$D_\theta^r h_n(x) = h_n^{(r)}(x)\cos\theta + \tilde{h}_n^{(r)}(x)\sin\theta \tag{3.1}$$

при неотрицательном целом r для фиксированного $x \in (0, 2\pi)$ при $n \to \infty$. Приведем асимптотическую формулу для r-й производной сопряженного полинома.

Лемма 1 [2, лемма 4]. *Пусть r — неотрицательное целое число, $h_n(x) = \cos^{2n}\dfrac{x}{2}$. Тогда для производной сопряженного полинома $\tilde{h}_n^{(r)}(x)$ при $x \in (0, 2\pi)$ справедливо асимптотическое соотношение $\tilde{h}_n^{(r)}(x) \sim -\dfrac{1}{2^r\sqrt{\pi n}}\operatorname{ctg}^{(r)}\dfrac{x}{2}$.*

Осталось получить в (3.1) асимптотику для r-й производной экстремального полинома.

Лемма 2. *Для производной неотрицательного целого порядка r полинома h_n, определенного формулой (2.8), при фиксированном $x \in (0, 2\pi)$ справедливы следующие соотношения:*

$$h_n^{(0)}(x) \sim -\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

$$\left|h_n^{(r)}(x)\right| \le n^r \cos^{2(n-r)}\frac{x}{2} \quad \text{при} \quad r \in \mathbb{N}, \quad 1 \le r \le n,$$

так что производная фиксированного порядка $r \ge 1$ экспоненциально стремится к нулю при $n \to \infty$.

Сначала докажем первое утверждение леммы 2. Найдем асимптотику $h_n^{(0)}(x)$ при $x \in (0, 2\pi)$. Запишем полином h_n в экспоненциальной форме

$$h_n(x) = \cos^{2n}\frac{x}{2} = \Big(\frac{e^{ix/2} + e^{-ix/2}}{2}\Big)^{2n} = e^{-inx}\Big(\frac{1+e^{ix}}{2}\Big)^{2n} = \frac{e^{-inx}}{4^n}\sum_{j=0}^{2n} C_{2n}^j e^{ijx}$$

$$= \frac{e^{-inx}}{4^n}\sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} e^{i(n+k)x} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} e^{ikx}.$$

Свободный член полинома h_n равен $\dfrac{C_{2n}^n}{4^n}$. В силу формулы Стирлинга $\dfrac{C_{2n}^n}{4^n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

С другой стороны, полином $h_n(x) = \cos^{2n}(x/2)$ при $x \in (0, 2\pi)$ стремится к нулю с экспоненциальной скоростью при $n \to \infty$. Поэтому при $x \in (0, 2\pi)$

$$h_n^{(0)}(x) = h_n(x) - \frac{C_{2n}^n}{4^n} \sim -\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \text{при } n \to \infty.$$

Теперь докажем второе утверждение леммы 2. Для этого покажем, что при $1 \le r \le n$ имеет место представление

$$h_n^{(r)}(t) = \Big(\cos^{2(n-r)}\frac{t}{2}\Big)\, g_r(t), \tag{3.2}$$

в котором g_r есть тригонометрический полином порядка r, для равномерной нормы которого справедлива оценка

$$\|g_r\|_\infty \leqslant n^r. \tag{3.3}$$

Докажем (3.2) и (3.3) индукцией по r. При $r = 1$ имеем

$$h_n'(t) = -n\cos^{2n-1}\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} = -n\Big(\cos^{2(n-1)}\frac{t}{2}\Big)\frac{1}{2}\sin t,$$

и равенство (3.2) вместе с оценкой (3.3) выполняются. Теперь предположим, что они верны для $1 \le r \le n-1$, и докажем их для производной порядка $r+1$. По предположению индукции имеет место представление (3.2), в котором полином g_r обладает свойством (3.3). Продифференцируем (3.2); в результате получим

$$h_n^{(r+1)}(t) = -(n-r)\cos^{2n-2r-1}\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}g_r(t) + g_r'(t)\cos^{2(n-r)}\frac{t}{2} = \Big(\cos^{2(n-r-1)}\frac{t}{2}\Big)g_{r+1}(t),$$

где $g_{r+1}(t) = -(n-r)\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}g_r(t) + \cos^2\frac{t}{2}g_r'(t)$. Имеем

$$\Big\|\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\Big\|_\infty = \frac{1}{2}\,\|\sin t\|_\infty = \frac{1}{2}, \quad \Big\|\cos^2\frac{t}{2}\Big\|_\infty = 1.$$

Используя неравенство Бернштейна в равномерной норме, получим оценку сверху для равномерной нормы полинома g_{r+1}

$$\|g_{r+1}\|_\infty \le \frac{n-r}{2}\|g_r\|_\infty + r\|g_r\|_\infty \le \frac{n+r}{2}\|g_r\|_\infty \le n\|g_r\|_\infty.$$

Тем самым показано, что равенство (3.2) и оценка (3.3) справедливы для всех $1 \le r \le n$, и второе утверждение леммы 2 также доказано. □

Из лемм 1, 2 вытекает

Теорема 2. *Для производной Вейля — Сеге неотрицательного целого порядка r экстремального полинома $h_n(x)$ при $x \in (0, 2\pi)$ и при $n \to \infty$ справедливы асимптотические соотношения*

$$D_\theta^0 h_n(x) \sim -\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\cos\theta + \Big(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\Big)\sin\theta\right), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

$$D_\theta^r h_n(x) \sim -\frac{\sin\theta}{2^r\sqrt{\pi n}}\operatorname{ctg}^{(r)}\frac{x}{2}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad \theta \ne \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Завершим доказательство теоремы 1, используя метод, разработанный В. В. Арестовым (см. [2]), и результаты теоремы 2. Для случая производной Вейля — Сеге нулевого порядка важно, что в силу монотонности функции $\operatorname{ctg}(x/2)$ при $x \in (0, 2\pi)$ функция $\cos\theta + (\sin\theta)\operatorname{ctg}(x/2)$ не обращается в ноль нигде на $(0, 2\pi)$, кроме, быть может, одной точки. □

Автор благодарит своего научного руководителя профессора В. В. Арестова за постановку задачи и постоянное внимание к исследованиям автора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В. В.** Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 7–18.
2. **Арестов В. В.** Неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома в L_0 // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 6. С. 10–26.
3. **Леонтьева А. О.** Неравенство Бернштейна для производных Вейля тригонометрических полиномов в пространстве L_0 // Мат. заметки. 2018. Т. 104, вып. 2. С. 255–264.
4. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. М.: Наука, 1978. Т. 1: 391 с.; Т. 2: 431 с.
5. **Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 638 с.
6. **Arestov V. V.** Sharp integral inequalities for trigonometric polynomials // Constructive theory of functions: in memory of Borislav Bojanov: Proc. Internat. Conf. / eds. G. Nikolov and R. Uluchev (Sozopol, 2010). Sofia: Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, 2012. P. 30–45.
7. **Arestov V. V., Glazyrina P. Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164. P. 1501–1512. doi:10.1016/j.jat.2012.08.004.
8. **Marden M.** The geometry of the zeros of polynomials in a complex variable. N Y: Amer. Math. Soc, 1949. 184 p. (Math. Survey, № 3.)

9. **Weyl H.** Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung // Vierteljahrcsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich. 1917. Bd 62, № 1–2. S. 296–302.

Поступила 6.08.2019
После доработки 21.10.2019
Принята к публикации 28.10.2019

Леонтьева Анастасия Олеговна
аспирант
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина;
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
г. Екатеринбург
e-mail: sinusoida2012@yandex.ru

REFERENCES

1. Arestov V.V. Integral inequalities for algebraic polynomials on the unit circle. *Math. Notes*, 1990, vol. 48, no. 4, pp. 977–984. doi: 10.1007/BF01139596 .
2. Arestov V.V. The Szegő inequality for derivatives of a conjugate trigonometric polynomial in L_0. *Math. Notes*, 1994, vol. 56, no. 6, pp. 1216–1227. doi 10.1007/BF02266689 .
3. Arestov V.V. Sharp integral inequalities for trigonometric polynomials. In: Nikolov G., Uluchev R. (eds), *Proc. Internat. Conf. "Constructive theory of functions: in memory of Borislav Bojanov"* (Sozopol, 2010). Sofia: Prof. Marin Drinov Acad. Publ. House, 2012, pp. 30–45. ISBN: 978-954-322-490-6 .
4. Arestov V.V., Glazyrina P.Yu. Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials. *J. Approx. Theory*, 2012, vol. 164, no. 11, pp. 1501–1512. doi: 10.1016/j.jat.2012.08.004 .
5. Leont'eva A.O. Bernstein inequality for the Weyl derivatives of trigonometric polynomials in the space L_0. *Math. Notes*, 2018, vol. 104, no. 2, pp. 263–270. doi: 10.1134/S0001434618070271 .
6. Marden M. *The geometry of the zeros of polynomials in a complex variable.* Math. Survey, no. 3. N Y: Amer. Math. Soc., 1949, 184 p.
7. Polya G., Szegő G. *Problems and Theorems in Analysis,* I. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998, 386 p. ISBN: 3-540-63640-4/pbk . Translated to Russian under the title *Zadachi i teoremy iz analiza,* I, Moscow: Nauka Publ., 1978, 391 p.
8. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications.* Yverdon: Gordon and Breach Sci. Publ., 1993, 976 p. ISBN: 9782881248641 . Original Russian text published in Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya*, Minsk: Nauka i Tekhnika Publ., 1987, 638 p.
9. Weyl H. Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. *Vierteljahrcsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*, 1917, vol. 62, no. 1–2, pp. 296–302.

Received August 6, 2019
Revised October 21, 2019
Accepted October 28, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00336) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Anastasia Olegovna Leont'eva, doctoral student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: sinusoida2012@yandex.ru .

Cite this article as: A. O. Leont'eva. Bernstein–Szegő inequality for trigonometric polynomials in the space L_0, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 129–135 .