ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 517.518+517.982

О СОПРЯЖЕННОСТИ ПРОСТРАНСТВА МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ[1]

В. В. Арестов

А. Фига-Таламанка доказал (1965), что пространство $M_r = M_r(G)$ линейных ограниченных операторов в пространстве L_r, $1 \le r \le \infty$, на локально компактной группе G, инвариантных относительно сдвига (точнее, операции группы), является сопряженным пространством для конструктивно описанного им пространства $A_r = A_r(G)$. В данной статье для пространства мультипликаторов $M_r = M_r(\mathbb{R}^m)$ лебегова пространства $L_r(\mathbb{R}^m)$, $1 \le r < \infty$, предъявлено банахово функциональное пространство $F_r = F_r(\mathbb{R}^m)$ с двумя свойствами. Пространство M_r является для F_r сопряженным: $F_r^* = M_r$; доказано, что на самом деле F_r совпадает с $A_r = A_r(\mathbb{R}^m)$. Пространство F_r описано в других терминах в сравнении с A_r. Пространство F_r возникло и используется автором начиная с 1980 года в исследованиях задачи Стечкина о наилучшем приближении операторов дифференцирования линейными ограниченными операторами в пространствах $L_\gamma(\mathbb{R}^m)$, $1 \le \gamma \le \infty$.

Ключевые слова: преддуальное пространство для пространства мультипликаторов.

V. V. Arestov. On the conjugacy of the space of multipliers.

A. Figà Talamanca proved (1965) that the space $M_r = M_r(G)$ of bounded linear operators in the space L_r, $1 \le r \le \infty$, on a locally compact group G that are translation invariant (more exactly, invariant under the group operation) is the conjugate space for a space $A_r = A_r(G)$, which he described constructively. In the present paper, for the space $M_r = M_r(\mathbb{R}^m)$ of multipliers of the Lebesgue space $L_r(\mathbb{R}^m)$, $1 \le r < \infty$, we present a Banach function space $F_r = F_r(\mathbb{R}^m)$ with two properties. The space M_r is conjugate to F_r: $F_r^* = M_r$; actually, it is proved that F_r coincides with $A_r = A_r(\mathbb{R}^m)$. The space F_r is described in different terms as compared to A_r. This space appeared and has been used by the author since 1975 in the studies of Stechkin's problem on the best approximation of differentiation operators by bounded linear operators in the spaces $L_\gamma(\mathbb{R}^m)$, $1 \le \gamma \le \infty$.

Keywords: predual space for the space of multipliers.

MSC: 47B38, 54C35

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-5-14

1. Основные обозначения

Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \ge 1$, есть m-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $t\eta = \sum_{j=1}^m t_j\eta_j$ точек $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$ и нормой $|t| = \sqrt{tt}$. В данной статье используются стандартные обозначения классических функциональных комплексных пространств Лебега на пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \ge 1$. При $1 \le \gamma < \infty$ через $L_\gamma = L_\gamma(\mathbb{R}^m)$ обозначается пространство измеримых на $\mathbb{R}^m$ функций f, у которых функция $|f|^\gamma$ суммируема на $\mathbb{R}^m$; это пространство наделено нормой

$$\|f\|_\gamma = \|f\|_{L_\gamma} = \left(\int |f(t)|^\gamma dt\right)^{1/\gamma};$$

здесь и ниже в интегралах по $\mathbb{R}^m$ множество интегрирования не указано. Пространство L_1 часто обозначается через L. Символами $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^m)$ обозначается пространство измеримых существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$; оно наделено нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| \colon t \in \mathbb{R}^m\}.$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00336) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Это пространство содержит пространство $C = C(\mathbb{R}^m)$ непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$, наделенное равномерной нормой $\|f\|_C = \sup\{|f(t)|\colon t \in \mathbb{R}^m\}$. В свою очередь $C = C(\mathbb{R}^m)$ содержит подпространство $C_0 = C_0(\mathbb{R}^m)$ функций, имеющих нулевой предел на бесконечности. Далее в большинстве ситуаций под L_∞ будет пониматься пространство C_0; эти ситуации будут оговариваться особо.

Обозначим через $V = V(\mathbb{R}^m)$ пространство (комплексных) ограниченных борелевских мер на $\mathbb{R}^m$. Норма в пространстве V есть полная вариация $\bigvee \mu = \bigvee_{\mathbb{R}^m} \mu$ меры $\mu \in V$. Будучи наделенным этой нормой, пространство V является банаховым.

Перечисленные пространства функций и их нормы инвариантны относительно группы сдвигов $\tau = \{\tau_h,\ h \in \mathbb{R}^m\}$, определенных формулой $(\tau_h f)(t) = f(t-h)$, $t \in \mathbb{R}^m$, и родственного семейства операторов $\sigma = \{\sigma_h,\ h \in \mathbb{R}^m\}$, заданных формулой $(\sigma_h f)(t) = f(h-t)$, $t \in \mathbb{R}^m$. Операторы этих двух семейств связаны соотношением $\sigma_h = \tau_h \sigma_0$, где σ_0 — оператор смены знака аргумента функции: $(\sigma_0 f)(t) = f(-t)$, $t \in \mathbb{R}^m$.

Прямое и обратное преобразования Фурье функций, по крайней мере, из пространства L, определим соответственно формулами

$$\widehat{f}\,(t) = \int e^{-2\pi t\eta i} f(\eta)\, d\eta, \quad \widecheck{f}\,(t) = \int e^{2\pi t\eta i} f(\eta)\, d\eta = (\sigma_0 \widehat{f}\,)(t).$$

Свойства преобразования Фурье можно найти, к примеру, в [12, гл. I, §§ 1, 2].

Пусть $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ есть (топологическое векторное) пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^m$. Точнее, $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ есть пространство бесконечно дифференцируемых функций f таких, что для любых мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ ограничена величина

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup\{|x^\alpha (D^\beta f)(x)| :\ x \in \mathbb{R}^m\}; \tag{1.1}$$

здесь $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$D^\beta f = \frac{\partial f^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_m^{\beta_m}}, \quad |\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m.$$

Структура топологического векторного пространства на $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ определяется системой функционалов (норм) (1.1). Пусть $\mathscr{S}' = \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ — соответствующее двойственное пространство непрерывных функционалов на $\mathscr{S}$, называемых обобщенными функциями или распределениями (см., например, [12, гл. I, § 3; 10, гл. 6]). Значение функционала $\theta \in \mathscr{S}'$ на функции $\phi \in \mathscr{S}$ будем обозначать через $\langle \theta, \phi \rangle$.

Пространство $\mathscr{S}'$ содержит множество $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ функций f, измеримых, локально суммируемых на $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяющих условию

$$\int (1 + |t|)^d |f(t)| dt < \infty$$

с некоторым $d = d(f) \in \mathbb{R}$; функции $f \in \mathscr{L}$ называют медленно растущими (классическими) функциями. Функции $f \in \mathscr{L}$ сопоставляется функционал $f \in \mathscr{S}'$ по формуле

$$\langle f, \phi \rangle = \int f(t) \phi(t) dt, \quad \phi \in \mathscr{S}.$$

Пространство $\mathscr{S}'$ замкнуто относительно важных классических операций. Для функционала $\theta \in \mathscr{S}'$ производной D^β, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, называют функционал $D^\beta \theta \in \mathscr{S}'$, определенный соотношением

$$\langle D^\beta \theta, \phi \rangle = (-1)^{|\beta|} \langle \theta, D^\beta \phi \rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}.$$

Преобразование Фурье функционала $\theta \in \mathscr{S}'$ есть функционал $\widehat{\theta} \in \mathscr{S}'$, действующий по формуле

$$\langle \widehat{\theta}\,, \phi\rangle = \langle \theta, \widehat{\phi}\rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}.$$

В пространстве $\mathscr{S}'$ определяется оператор сдвига по следующему правилу: для $\theta \in \mathscr{S}'$ и $h \in \mathbb{R}^m$ элемент $\tau_h\theta$ есть функционал, который действует по формуле

$$\langle \tau_h\theta,\, \phi\rangle = \langle \theta,\, \tau_{-h}\phi\rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}.$$

Сверткой $\theta * \phi$ элемента $\theta \in \mathscr{S}'$ и функции $\phi \in \mathscr{S}$ называют функцию $(\theta * \phi)(x) = \langle \theta, \sigma_x\phi\rangle$; если θ есть классическая функция из множества $\mathscr{L}$, то имеем

$$(\theta * \phi)(x) = \int \theta(\eta)\phi(x-\eta)d\eta.$$

Свертка $\theta * \phi$ элементов $\theta \in \mathscr{S}'$ и $\phi \in \mathscr{S}$ есть бесконечно дифференцируемая функция; она сама и любая ее производная $D^\beta(\theta * \phi)$ принадлежат пространству $\mathscr{L}$. Для свертки имеет место равенство [12, гл. I, § 3, (3.12) и теорема 3.13]

$$\langle \theta * \phi,\, \psi\rangle = \langle \theta,\, (\sigma_0\phi) * \psi\rangle, \quad \theta \in \mathscr{S}', \quad \phi,\ \psi \in \mathscr{S}. \tag{1.2}$$

2. Пространство мультипликаторов

Пусть $\mathcal{B}(L_r)$ есть множество всех линейных ограниченных операторов в пространстве L_r; при $r = \infty$ под $\mathcal{B}(L_\infty)$ здесь понимается пространство линейных ограниченных операторов из $C_0 = C_0(\mathbb{R}^m)$ в $C = C(\mathbb{R}^m)$. Обозначим через $\mathcal{T}(L_r)$ множество операторов $T \in \mathcal{B}(L_r)$, инвариантных относительно группы сдвигов на L_r.

Оператор $T \in \mathcal{T}(L_r)$, по крайней мере, на множестве $\mathscr{S}$, имеет вид свертки $Tf = \theta * f$ с некоторым элементом $\theta = \theta(T) \in \mathscr{S}'$ (см., например, [12, гл. I, теорема 3.16; 8, теорема 1.2]). Такие обобщенные функции θ называют *мультипликаторами пространства* L_r. Множество мультипликаторов M_r, наделенное нормой $\|\theta(T)\|_{M_r} = \|T\|_{L_r \to L_r}$, является банаховым пространством. Свойствам мультипликаторов посвящена обширная литература (см., в частности, монографии [8; 9; 12]).

Отметим некоторые известные факты относительно пространств мультипликаторов M_r при $1 \le r \le \infty$ (см., например, [12, гл. 1, § 3; 8, гл. I; 9, гл. 4]). Для пары сопряженных показателей $r,\ r'$ пространства мультипликаторов совпадают вместе с равенством норм элементов:

$$M_{r'} = M_r \quad \text{и} \quad \|\theta\|_{M_{r'}} = \|\theta\|_{M_r}, \quad \theta \in M_r.$$

Отсюда и из интерполяционной теоремы Рисса о выпуклости (см., например, [6, гл. VI, § 10, теорема 11] или [12, гл. V, § 1, теорема 1.16]) следует, что если параметр ρ заключен между r и r', то имеет место вложение

$$M_r \subset M_\rho, \quad \text{причем} \quad \|\theta\|_{M_\rho} \le \|\theta\|_{M_r}, \quad \theta \in M_r. \tag{2.1}$$

Как следствие при всех $r,\ 1 \le r \le \infty$,

$$M_\infty \subset M_r \subset M_2$$

с соответствующими неравенствами для норм мультипликаторов.

Точное описание пространства M_r известно только при $r = 2$ и $r = \infty$ $(r = 1)$ (см., например, [12, гл. 1, § 3; 8, гл. I; 9, гл. 4]). А именно,

$$M_2 = \widetilde{L_\infty} = \{\theta \in \mathscr{S}' \colon \widehat{\theta} \in L_\infty\}, \quad \text{причем} \quad \|\theta\|_{M_2} = \|\check{\theta}\|_{L_\infty}, \quad \theta \in M_2. \tag{2.2}$$

$$M_\infty = M_1 = V, \quad \text{причем} \quad \|\theta\|_{M_\infty} = \bigvee \theta, \quad \theta \in V. \tag{2.3}$$

А. Фига-Таламанка [7] доказал (1965), что пространство $\mathcal{T}(L_r(G))$ линейных ограниченных операторов в пространстве L_r, $1 \le r \le \infty$, на локально компактной группе G, инвариантных относительно сдвига (точнее, операции группы), является сопряженным пространством для конструктивно описанного им пространства $A_r = A_r(G)$. Точнее, в [7] доказано, что пространство $\mathcal{T}(L_r(G))$ изометрически изоморфно двойственному пространству для пространства A_r функций на G, являющихся суммами функциональных рядов

$$h = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu * g_\nu \colon f_\nu \in L_r, \quad g_\nu \in L_{r'}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_\nu\|_{L_r} \|g_\nu\|_{L_{r'}} < \infty. \tag{2.4}$$

Норма элемента (функции) $h \in A_r$ определяется формулой

$$\|h\|_{A_r} = \inf \Big\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_\nu\|_{L_r} \|g_\nu\|_{L_{r'}}, \ h = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu * g_\nu \Big\}. \tag{2.5}$$

Элементу $T \in \mathcal{T}(L_r(G))$ сопоставляется на A_r функционал $\varphi_T(h) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (T f_\nu * g_\nu)(0)$.

Относительно пары банаховых пространств X, Y со свойством, в соответствии с которым Y является сопряженным для X, т. е. $X^* = Y$, говорят, что пространство X является преддуальным для пространства Y. В этой терминологии результат работы [7] означает, что пространство A_r является преддуальным для постранства $\mathcal{T}(L_r(G))$.

Приведенный результат работы [7] справедлив, в частности, для пространства $\mathcal{T}(L_r(\mathbb{R}^m))$ линейных ограниченных операторов в пространстве $L_r(\mathbb{R}^m)$, инвариантных относительно группы сдвигов τ или, что эквивалентно, для пространства мультипликаторов $M_r = M_r(\mathbb{R}^m)$.

В статье автора [1] при исследовании задачи Стечкина [11] о наилучшем приближении в пространствах Лебега $L_\gamma(\mathbb{R}^m)$ операторов дифференцирования и, в более общем случае, неограниченных операторов, инвариантных относительно сдвига, линейными ограниченными операторами, было построено и применено функциональное пространство, которое в данной работе ниже обозначено через F_r; эта тема была развита в [2] и более полно изложена в [3, § 6]. В перечисленных работах использовалось вложение $M_r \subset F_r^*$. Конструкции пространств F_r и $A_r = A_r(\mathbb{R}^m)$ различные. Однако, как оказалось, эти два пространства совпадают. Цель данной статьи как раз и состоит в доказательстве этого утверждения.

Ниже в теореме 1 будет доказано, что F_r является преддуальным пространством для M_r, т. е. $M_r = F_r^*$. Затем в теореме 2 уже с использованием этого факта будет доказано, что на самом деле пространства F_r и $A_r(\mathbb{R}^m)$ совпадают.

3. Преддуальное пространство для пространства мультипликаторов M_r

При $1 \le r \le \infty$ определим на множестве $\mathscr{S}$ функционал

$$\|\phi\|_{(r)} = \sup\{|\langle \theta, \phi \rangle| \colon \theta \in M_r, \ \|\theta\|_{M_r} \le 1\}, \quad \phi \in \mathscr{S}, \tag{3.1}$$

который, как нетрудно понять, является на $\mathscr{S}$ нормой; пространство $\mathscr{S}$ с этой нормой обозначим через $\mathscr{S}_{(r)}$. Из (2.2), (2.3) и (2.1) следует, что

$$\|\phi\|_{(2)} = \|\,\widehat{\phi}\,\|_L \ge \|\phi\|_{(r)} \ge \|\phi\|_{(\infty)} = \|\phi\|_{C_0}, \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{3.2}$$

Убедимся, что при всех $1 \le r \le \infty$ для нормы (3.1) свертки выполняется неравенство

$$\|\phi * \psi\|_{(r)} \le \|\phi\|_{L_r} \, \|\psi\|_{L_{r'}}, \quad \phi, \psi \in \mathscr{S}. \tag{3.3}$$

Свертка $\phi * \psi$ функций ϕ и ψ из $\mathscr{S}$ принадлежит $\mathscr{S}$, поэтому левая часть (3.3) определена корректно. Для функционала $\theta \in M_r$ и функций $\phi, \psi \in \mathscr{S}$ согласно (1.2) имеем $\langle \theta * \phi, \psi \rangle =$

$\langle\theta,\sigma_0\phi*\psi\rangle$, а следовательно, $|\langle\theta,\phi*\psi\rangle| = |\langle\theta*\sigma_0\phi,\psi\rangle \le \|\theta*\sigma_0\phi\|_r\,\|\psi\|_{r'} \le \|\theta\|_{M_r}\|\phi\|_r\,\|\psi\|_{r'}$. Отсюда и из определения (3.1) следует свойство (3.3).

Обозначим через $F_r = F_r(\mathbb{R}^m)$ пополнение $\mathscr{S}$ относительно нормы (3.1). В процитированных выше работах [1;2] возникло несколько экстремальных задач в пространствах F_r. Ряд этих задач был изучен автором в работах [1; 2; 4; 5] и в недавней статье (В. В. Арестов. Наилучшее равномерное приближение оператора дифференцирования ограниченными в пространстве L_2 операторами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. Р. 34–56.)

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *При $1 \le r \le \infty$ пространства F_r обладают следующими свойствами.*

1. *Пространство F_r вложено в пространство C_0*:

$$F_r \subset C_0 \quad \textit{и} \quad \|f\|_{C_0} \le \|f\|_{F_r}, \quad f \in F_r. \tag{3.4}$$

2. *Для сопряженных показателей r и r' пространства совпадают*: $F_r = F_{r'}$.

3. *Для конкретных значений параметра $r = 2$ и $r = \infty$ $(r = 1)$ пространства F_r имеют следующую структуру*:

$$F_2 = \check{L} = \{f \in C_0 \colon \widehat{f} \in L\}, \quad \|f\|_{F_2} = \|\widehat{f}\,\|_L, \quad f \in F_2. \tag{3.5}$$

$$F_\infty = C_0, \quad \|f\|_{F_\infty} = \|f\|_{C_0}, \quad f \in F_\infty. \tag{3.6}$$

4. *При $2 \le r \le \infty$ пространство F_r по r не убывает, а точнее, если $2 \le r_1 \le r_2 \le \infty$, то*

$$F_{r_1} \subset F_{r_2} \quad \textit{и} \quad \|f\|_{F_{r_2}} \le \|f\|_{F_{r_1}}, \quad f \in F_{r_1},$$

в частности, при $1 \le r \le \infty$

$$F_2 \subset F_r \quad \textit{и} \quad \|f\|_{F_r} \le \|f\|_{F_2} = \|\widehat{f}\,\|_L, \quad f \in F_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем исходить из конструкции пополнения F_r пространства $\mathscr{S}_{(r)}$ по Кантору (см. например, [6, гл. II, § 5]). А именно, пусть $\mathfrak{F}_r$ есть линейное пространство фундаментальных последовательностей функций из $\mathscr{S}_{(r)}$ с почленными операциями. Две последовательности из $\mathfrak{F}_r$ считаются эквивалентными, если их (почленная) разность сходится к нулю. Пространство F_r есть фактор-пространство пространства $\mathfrak{F}_r$ по этому отношению эквивалентности. Таким образом, элементами f пространства F_r являются классы эквивалентных фундаментальных последовательностей $\{\phi_n\} \subset \mathscr{S}_{(r)}$. Для фундаментальной последовательности $\{\phi_n\} \subset \mathscr{S}_{(r)}$ последовательность норм $\{\|\phi_n\|_{\mathscr{S}_{(r)}}\}$ сходится, и для эквивалентных последовательностей, составляющих f, этот предел один и тот же; полагают $\|f\|_{F_r} = \lim_{n\to\infty}\|\phi_n\|_{(r)}$.

В силу (3.2) последовательность $\{\phi_n\} \subset \mathscr{S}_{(r)}$, фундаментальная в $\mathscr{S}_{(r)}$, будет фундаментальной и в C_0. В силу полноты C_0 эта последовательность сходится в C_0 к некоторой функции $f \in C_0$. При этом эквивалентные последовательности из $\mathscr{S}_{(r)}$ имеют в C_0 один и тот же предел. Следовательно, пространство F_r можно отождествить с подмножеством пространства C_0 таких пределов. В этом смысле $F_r \subset C_0$. Далее, для норм членов фундаментальной последовательности $\{\phi_n\} \subset \mathscr{S}_{(r)}$ выполняются неравенства $\|\phi_n\|_{C_0} \le \|\phi_n\|_{\mathscr{S}_{(r)}}$. Поэтому такое же неравенство будет выполняться и для пределов норм. Тем самым доказано свойство (3.4).

Все оставшиеся утверждения леммы нетрудно получить из соответствующих перечисленных выше свойств пространств M_r. Лемму 1 можно считать доказанной. □

В дальнейшем будет использоваться ядро Гаусса

$$G_\alpha(t) = e^{-\pi\alpha^2|t|^2} \tag{3.7}$$

с параметром $\alpha > 0$; эта функция принадлежит $\mathscr{S}$. Для преобразования Фурье ядра Гаусса справедлива формула (см., например, [12, гл. I, § 1, теорема 1.13])

$$\widehat{G_\alpha}(t) = \alpha^{-m/2} e^{-\pi|t|^2/\alpha^2}; \tag{3.8}$$

эту формулу можно переписать в виде $\widehat{G_\alpha} = \alpha^{-m/2} G_{\alpha^{-1}}$. Для функции (3.8) справедливо равенство

$$\int \widehat{G_\alpha}(t)dt = G_\alpha(0) = 1.$$

Имеем $\|G_\alpha\|_{(\infty)} = \|G_\alpha\|_{C_0} = 1$, $\|G_\alpha\|_{(2)} = \|\widehat{G_\alpha}\|_L = 1$, а потому $\|G_\alpha\|_{(r)} = 1,\ 1 \le r \le \infty$.

Следующая техническая лемма будет использоваться несколько раз в дальнейшем.

Лемма 2. *При всех $1 \le r \le \infty$ свертка $\phi * g_\alpha$ функции $\phi \in \mathscr{S}$ и преобразования Фурье $g_\alpha = \widehat{G_\alpha}$ ядра Гаусса при $\alpha \to +0$ сходится в $\mathscr{S}_{(r)}$ к функции ϕ:*

$$\|\phi * g_\alpha - \phi\|_{(r)} \to 0, \quad \alpha \to +0. \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойства (3.2) утверждение (3.9) достаточно проверить при $r = 2$. Имеем

$$\|\phi * g_\alpha - \phi\|_{(2)} = \int |\widehat{\phi}(t)|(1 - G_\alpha(t))dt. \tag{3.10}$$

Из определения (3.7) ядра Гаусса видно, что $0 < G_\alpha(t) \le 1$, $t \in \mathbb{R}^m$, и $G_\alpha(t) \to 1$ при $\alpha \to +0$ поточечно на $\mathbb{R}^m$. Применяя теорему Лебега о мажорантной сходимости [6, гл. III, § 6, следствие 16], заключаем, что величина (3.10) сходится к нулю при $\alpha \to +0$; как следствие, имеет место (3.9). Лемма 2 доказана. $\square$

Отметим, что в доказательствах двух приведенных ниже теорем используются соображения работы [7].

Теорема 1. *При всех $1 \le r \le \infty$ пространство M_r является сопряженным для пространства F_r.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что $L^* = L_\infty$ и $C_0^* = V$ (см., например, [6, гл. IV]). Отсюда и из соотношений (2.2), (3.5), (2.3) и (3.6) заключаем, что утверждение теоремы 1 справедливо при $r = \infty$ $(r = 1)$ и $r = 2$. Из дальнейших рассуждений исключим лишь значения $r = 1$ и $r = \infty$; итак, будем предполагать, что $1 < r < \infty$. Пространство $\mathscr{S}_{(r)}$ плотно в пространстве F_r, и следовательно, $F_r^* = \mathscr{S}_{(r)}^*$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\mathscr{S}_{(r)}^* = M_r. \tag{3.11}$$

Точнее, нужно доказать равенство множеств и равенство норм элементов в этих множествах.

Определение (3.1) влечет, что для любого $\theta \in M_r$ справедливо неравенство

$$|\langle \theta, \phi \rangle| \le \|\theta\|_{M_r} \|\phi\|_{(r)}, \quad \phi \in M_r. \tag{3.12}$$

Следовательно, имеют место вложение $M_r \subset \mathscr{S}_{(r)}^*$ и неравенство $\|\theta\|_{\mathscr{S}_{(r)}^*} \le \|\theta\|_{M_r}$ для норм элементов $\theta \in M_r$.

Докажем обратное вложение $\mathscr{S}_{(r)}^* \subset M_r$. Для упрощения рассуждений воспользуемся обозначением S_ρ, $1 \le \rho < \infty$, для пространства $\mathscr{S}$ с нормой пространства L_ρ; важно, что S_ρ плотно в L_ρ.

Пусть ϑ есть линейный ограниченный функционал на $\mathscr{S}_{(r)}$, т. е. $\vartheta \in \mathscr{S}_{(r)}^* (= F_r^*)$. Значение функционала ϑ на функции $\phi \in \mathscr{S}$ будем записывать в виде $\vartheta[\phi]$. Для значения $\vartheta[(\sigma_0\phi) * \psi]$ функционала ϑ на свертке $(\sigma_0\phi) * \psi$ для функций $\phi, \psi \in \mathscr{S}$, применяя неравенство (3.3), получаем

$$|\vartheta[(\sigma_0\phi) * \psi]| \le \|\vartheta\|_{F_r^*} \|(\sigma_0\phi) * \psi\|_{(r)} \le \|\vartheta\|_{F_r^*} \|\phi\|_{L_r} \|\psi\|_{L_{r'}}. \tag{3.13}$$

Зафиксируем функцию ϕ. Тогда $\vartheta[(\sigma_0\phi) * \psi]$ есть линейный функционал по $\psi \in \mathscr{S}$. Более того, из (3.13) следует, что этот функционал является линейным ограниченным на $S_{r'}$ и норма этого функционала не превосходит величины $\|\vartheta\|_{F_r^*}\|\phi\|_{L_r}$. Поскольку пространство $S_{r'}$ плотно в пространстве $L_{r'}$, то существует, причем единственная, функция $u \in L_r$ с нормой $\|u\|_{L_r} \leq \|\vartheta\|_{F_r^*}\|\phi\|_{L_r}$такая, что

$$\vartheta[(\sigma_0\phi) * \psi] = \int u(x)\psi(x)dx, \quad \psi \in \mathscr{S}. \tag{3.14}$$

Функция u однозначно определяется функцией ϕ; рассмотрим оператор $T\colon \phi \to u = T\phi$. Справедлива оценка $\|T\phi\|_r \leq \|\vartheta\|_{F_r^*}\|\phi\|_{L_r}$, $\phi \in \mathscr{S}$. Для любых функций $\phi_1, \phi_2, \psi \in \mathscr{S}$ и любых констант c_1, c_2 имеем

$$\int \left(T(c_1\phi_1 + c_2\phi_2)(x) - c_1T(\phi_1)(x) - c_2T(\phi_2)(x)\right)\psi(x)dx$$

$$= \vartheta[(c_1\sigma_0\phi_1 + c_2\sigma_0\phi_2) * \psi] - c_1\vartheta[\sigma_0\phi_1 * \psi] - c_2\vartheta[\sigma_0\phi_2 * \psi] = 0.$$

В силу произвольности функции ψ заключаем, что $T(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) = c_1T\phi_1 + c_2T\phi_2$. Таким образом, T — линейный ограниченный оператор из S_r в L_r и, более того, $\|T\|_{S_r \to L_r} \leq \|\vartheta\|_{F_r^*}$.

Наконец, убедимся, что оператор T инвариантен относительно сдвига на $\mathscr{S}$, т. е. для любой функции $\phi \in \mathscr{S}$ и для любого $h \in \mathbb{R}^m$ имеет место равенство

$$T\tau_h\phi = \tau_hT\phi. \tag{3.15}$$

В самом деле, для $\phi, \psi \in \mathscr{S}$ и $h \in \mathbb{R}^m$ имеем $(\sigma_0\tau_h)\phi = (\tau_{-h}\sigma_0)\phi$. С помощью этого равенства получаем $(\sigma_0\tau_h\phi) * \psi = ((\tau_{-h}\sigma_0)\phi) * \psi = (\sigma_0\phi) * (\tau_{-h}\psi)$. Поэтому

$$\int (T\tau_h\phi)(x)\psi(x)dx = \vartheta[(\sigma_0(\tau_h\phi)) * \psi] = \vartheta[(\sigma_0\phi) * (\tau_{-h}\psi] = \int (T\phi)(x)\psi(x+h)dx$$

$$= \int (T\phi)(x-h)\psi(x)dx = \int (\tau_h(T\phi))(x)\psi(x)dx$$

и окончательно

$$\int (T\tau_h\phi)(x)\psi(x)dx = \int (\tau_hT\phi)(x)\psi(x)dx.$$

Последнее равенство как раз и влечет свойство (3.15).

Оператор T продолжается по непрерывности до оператора в пространстве L_r; обозначим продолжение тем же символом T. Оператор T в L_r линейный, ограниченный с $\|T\| \leq \|\vartheta\|_{F_r^*}$ и инвариантный относительно сдвига. Следовательно, на $\mathscr{S}$ он является сверткой $T\phi = \theta * \phi$, $\phi \in \mathscr{S}$, с некоторым элементом $\theta \in M_r$.

Наконец, проверим, что

$$\vartheta[\phi] = \langle \theta, \phi \rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{3.16}$$

В терминах элемента θ формула (3.14) имеет вид

$$\vartheta[(\sigma_0\phi) * \psi] = \langle \theta * \phi, \psi \rangle, \quad \phi,\, \psi \in \mathscr{S}.$$

Согласно этой формуле для функции $\phi \in \mathscr{S}$ и преобразования Фурье $g_\alpha(t) = \widehat{G_\alpha}(t) = \alpha^{-m/2}e^{-\pi t^2/\alpha^2}$ ядра Гаусса (3.7) имеем

$$\vartheta[\phi * g_\alpha] = \langle \theta * \sigma_0\phi, g_\alpha \rangle. \tag{3.17}$$

Перейдем в соотношении (3.17) к пределу при $\alpha \to +0$. Свойство (3.9) леммы 2 влечет, что $\lim_{\alpha \to +0} \vartheta[\phi * g_\alpha] = \vartheta[\phi]$. Функция $\theta * \sigma_0\phi$ непрерывная медленно растущая, т. е. принадлежит множеству $\mathscr{L}$. Семейство функций $g_\alpha = \widehat{G_\alpha}$ при $\alpha \to +0$ является δ-образным, и, как следствие,

$$\lim_{\alpha \to +0} \langle \theta * \sigma_0\phi, g_\alpha \rangle = (\theta * \sigma_0\phi)(0) = \langle \theta, \sigma_0\sigma_0\phi \rangle = \langle \theta, \phi \rangle.$$

Таким образом, соотношение (3.17) в пределе при $\alpha \to 0$ превращается в (3.16).

Наряду с равенством функционалов (3.16) имеет место и равенство норм

$$\|\vartheta\|_{F_r^*} = \|\theta\|_{M_r}. \tag{3.18}$$

Действительно, полученное ранее неравенство $\|T\| \le \|\vartheta\|_{F_r^*}$ в данной ситуации означает, что $\|\theta\|_{M_r} \le \|\vartheta\|_{F_r^*}$. С другой стороны, из (3.16) и (3.12) следует неравенство

$$|\vartheta[\phi]| = |\langle\theta, \phi\rangle| \le \|\theta\|_{M_r}\,\|\phi\|_{(r)}, \quad \phi \in \mathscr{S}.$$

А это влечет $\|\vartheta\|_{F_r^*} \le \|\theta\|_{M_r}$. Следовательно, действительно имеет место (3.18).

Представление (3.16) функционалов $\vartheta \in \mathscr{S}_{(r)}^*$ означает, что имеет место вложение $\mathscr{S}_{(r)}^* \subset M_r$, а значит, и равенство множеств (3.11). При этом имеет место и равенство норм элементов множеств в (3.11). Теорема 1 доказана полностью. $\square$

Теорема 2. *При всех* $1 \le r \le \infty$ *пространства* $F_r(\mathbb{R}^m)$ *и* $A_r(\mathbb{R}^m)$ *совпадают*:

$$F_r(\mathbb{R}^m) = A_r(\mathbb{R}^m). \tag{3.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим сразу, что поскольку оба пространства в (3.19) имеют одно и то же сопряженное, то нормы общих элементов этих пространств совпадают.

Убедимся вначале, что имеет место вложение

$$F_r \subset A_r. \tag{3.20}$$

Свертка $\phi * \psi$ функций $\phi, \psi \in \mathscr{S}$ принадлежит как $\mathscr{S}$, так и A_r. Как следствие леммы 2 множество $\mathscr{S} * \mathscr{S}$ плотно в пространстве $\mathscr{S}_{(r)}$. Следовательно, $\mathscr{S}_{(r)} \subset A_r$. Поскольку $\mathscr{S}_{(r)}$ плотно в F_r, то имеет место и вложение (3.20).

Проверим теперь обратное вложение

$$A_r \subset F_r. \tag{3.21}$$

Линейная оболочка множества $\mathscr{S} * \mathscr{S}$ плотна в A_r. В самом деле, пусть $h \in A_r$ и (2.4) — одно из представлений функции h. С помощью двух конечных множеств функций $\{\phi\}_{\nu=1}^N$ и $\{\psi\}_{\nu=1}^N$ из $\mathscr{S}$ образуем функцию

$$w = \sum_{\nu=1}^N \phi_\nu * \psi_\nu.$$

Рассмотрим разность

$$h - w = S_N + R_N, \quad S_N = \sum_{\nu=1}^N (f_\nu * g_\nu - \phi_\nu * \psi_\nu), \quad R_N = \sum_{\nu=N+1}^\infty f_\nu * g_\nu.$$

Функцию S_N запишем в виде

$$S_N = \sum_{\nu=1}^N \left((f_\nu - \phi_\nu) * g_\nu + \phi_\nu * (g_\nu - \psi_\nu)\right).$$

Согласно определению (2.5) нормы в A_r имеем

$$\|h - w\|_{A_r} \le s_N + r_N,$$

$$s_N = \sum_{\nu=1}^N \left(\|f_\nu - \phi_\nu\|_{L_r}\|g_\nu\|_{L_{r'}} + \|\phi_\nu\|_{L_r}\|g_\nu - \psi_\nu\|_{L_{r'}}\right), \quad r_N = \sum_{\nu=N+1}^\infty \|f_\nu\|_{L_r}\|g_\nu\|_{L_{r'}}.$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Выберем вначале N столь большим, чтобы $r_N < \varepsilon/2$. Множество $\mathscr{S}$ плотно в пространствах L_r и $L_{r'}$. Поэтому функции $\{\phi\}_{\nu=1}^N$ и $\{\psi\}_{\nu=1}^N$ можно выбрать так, чтобы $s_N < \varepsilon/2$. В этом случае будем иметь $\|h - w\|_{A_r} < \varepsilon$. Таким образом, линейная оболочка $\mathfrak{S}$ множества $\mathscr{S} * \mathscr{S}$ действительно плотна в A_r.

Поскольку $\mathfrak{S} \subset \mathscr{S}$, то имеет место вложение (3.21). Вложения (3.20) и (3.21) влекут равенство (3.19). Теорема 2 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В.В.** Приближение операторов типа свертки линейными ограниченными операторами // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 3–19.
2. **Арестов В.В.** Наилучшее приближение неограниченных операторов, инвариантных относительно сдвига, линейными ограниченными операторами // Тр. МИАН. 1992. Т. 198. С. 3–20.
3. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 89–124. doi: 10.4213/rm1019 .
4. **Arestov V.V.** On the best approximation of the differentiation operator // Ural Math. J. 2015. Vol. 1, no. 1. P. 20–29. doi: 10.15826/umj.2015.1.002 .
5. **Arestov V.V.** Best approximation of a differentiation operator on the set of smooth functions with exactly or approximately given Fourier transform // Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019) / eds. M. Khachay, Y. Kochetov, P. Pardalos. Cham: Springer, 2019. P. 434-448. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11548). doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_30 .
6. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Едиториал УРСС, 2004. 896 с.
7. **Figà-Talamanca A.** Translation invariant operators in L^p // Duke. Math. J. 1965. Vol. 32. P. 495–502.
8. **Хермандер Л.** Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 71 с.
9. **Larsen R.** An introduction to the theory of multipliers. Berlin etc.: Springer, 1971. 282 p.
10. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 443 с.
11. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.
12. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.

Поступила 15.09.2019
После доработки 14.10.2019
Принята к публикации 18.10.2019

Арестов Виталий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет;
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru

REFERENCES

1. Arestov V.V. Approximation of operators of convolution type by linear bounded operators. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1981, vol. 145, pp. 1–18.
2. Arestov V.V. Best approximation of unbounded shift-invariant operators by linear bounded operators. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1994, vol. 198, pp. 1–16.
3. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russ. Math. Surv.*, 1996, vol. 51, no. 6, pp. 1093–1126. doi: 10.1070/RM1996v051n06ABEH003001 .
4. Arestov V.V. On the best approximation of the differentiation operator. *Ural Math. J.*, 2015, vol. 1, no. 1, pp. 20–29. doi: 10.15826/umj.2015.1.002 .
5. Arestov V.V. Best Approximation of a Differentiation Operator on the Set of Smooth Functions with Exactly or Approximately Given Fourier Transform. In: Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. (eds), *Mathematical Optimization Theory and Operations Research*, 2019, Lecture Notes in Computer Science, vol. 11548, Springer, Cham, pp. 434–448. doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_30 .
6. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear Operators. Part* 1: *General Theory.* N Y: Interscience, 1988. 872 p. ISBN: 978-0-471-60848-6 . Translated to Russian under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya.* Moscow: Editorial URSS, 2004, 896 p.

7. Figà-Talamanca A. Translation invariant operators in L^p. *Duke Math. J.*, 1965, vol. 32, no. 3, pp. 495–502. doi: 10.1215/S0012-7094-65-03250-3 .
8. Hörmander L. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces. *Acta Mathematica*, 1960, vol. 104, no. 1-2, pp. 93–140. doi: 10.1007/BF02547187 . Translated to Russian under the title *Otsenki dlya operatorov, invariantnykh otnositel'no sdviga.* Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1962, 71 p.
9. Larsen R. *An introduction to the theory of multipliers.* Berlin etc.: Springer, 1971, 282 p. doi: 10.1007/978-3-642-65030-7 .
10. Rudin W. *Functional analysis.* N Y: McGraw-Hill, 1973, 397 p. ISBN: 0070542252 . Translated to Russian under the title *Funktsional'nyi analiz.* Moscow: Mir Publ., 1975, 443 p.
11. Stechkin S.B. Best approximation of linear operators. *Math. Notes.* 1967, vol. 1, iss. 2, pp. 91–99. doi: https://doi.org/10.1007/BF01268056 .
12. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9781400883899 . Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh.* Moscow: Mir Publ., 1974, 333 p.

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00336) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Received September 15, 2019
Revised October 14, 2019
Accepted October 18, 2019

Vitalii Vladimirovich Arestov, Dr. Phys.-Math. Sci., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru .

Cite this article as: V. V. Arestov. On the conjugacy of the space of multipliers, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 5–14 .