

УДК 519.16 + 519.85

**АППРОКСИМАЦИОННАЯ СХЕМА ХАЙМОВИЧА — РИННОЙ КАНА
ДЛЯ CVRP В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ
ФИКСИРОВАННОЙ РАЗМЕРНОСТИ УДВОЕНИЯ¹****М. Ю. Хачай, Ю. Ю. Огородников**

Задача маршрутизации транспорта с ограничением на грузоподъемность (Capacitated Vehicle Routing Problem, CVRP) — одна из классических маршрутных экстремальных комбинаторных задач, обладающих большим числом приложений в области исследования операций. Оставаясь NP-трудной в сильном смысле как в общем случае, так и на евклидовой плоскости, задача CVRP допускает квазиполиномиальные и даже полиномиальные приближенные схемы (QPTAS и PTAS) в евклидовых пространствах фиксированной размерности. В то же время метрическая постановка задачи APX-полна даже в случае произвольной фиксированной грузоподъемности $q \geq 3$. В данной работе показывается, что классический алгоритм М. Хаймовича и А. Ринной Кана реализует полиномиальную приближенную схему PTAS и эффективную полиномиальную приближенную схему (EPTAS) в произвольном метрическом пространстве фиксированной размерности при $q = o(\log \log n)$ и произвольной постоянной грузоподъемности соответственно.

Ключевые слова: задача маршрутизации транспорта с ограничением на грузоподъемность (CVRP), полиномиально приближенная схема (PTAS), метрическое пространство, размерность удвоения.

M. Yu. Khachai, Yu. Yu. Ogorodnikov. Haimovich–Rinnooy Kan polynomial-time approximation scheme for the CVRP in metric spaces of a fixed doubling dimension.

The Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP) is a classical extremal combinatorial routing problem with numerous applications in operations research. Although the CVRP is strongly NP-hard both in the general case and in the Euclidean plane, it admits quasipolynomial- and even polynomial-time approximation schemes (QPTAS and PTAS) in Euclidean spaces of fixed dimension. At the same time, the metric setting of the problem is APX-complete even for an arbitrary fixed capacity $q \geq 3$. In this paper, we show that the classical Haimovich–Rinnooy Kan algorithm implements a PTAS and an Efficient Polynomial-Time Approximation Scheme (EPTAS) in an arbitrary metric space of fixed doubling dimension for $q = o(\log \log n)$ and for an arbitrary constant capacity, respectively.

Keywords: Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP), Polynomial-Time Approximation Scheme (PTAS), metric space, doubling dimension.

MSC: 90C27, 90C59, 90B06

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-235-248

Введение

Задача маршрутизации с ограничением на грузоподъемность транспортных средств (Capacitated Vehicle Routing Problem, CVRP) — одна из наиболее известных экстремальных комбинаторных задач, обладающая широким спектром приложений в области исследования операций [11; 27]. По-видимому первая постановка задачи CVRP была приведена Г. Данцигом и Дж. Рамсером в их классической работе [9], посвященной построению экономически эффективного набора маршрутов, обеспечивающих доставку топлива с центрального терминала по сети заправок станций, распределенной на местности.

Как и для большинства задач комбинаторной оптимизации, результаты в области алгоритмического анализа задачи CVRP условно могут быть разделены на три основных направления.

Первое направление связано с редукцией исследуемой задачи к подходящей постановке задачи целочисленной (смешанной) оптимизации и применением для поиска оптимального

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 19-07-01243 и 17-08-01385).

решения последней одной из модификаций метода ветвей и границ (см. обзор в [27]). К сожалению, ввиду известной NP-трудности задачи CVRP размеры постановок, поддающихся эффективному решению в рамках данного подхода, остаются достаточно скромными, несмотря на стремительные темпы развития вычислительной техники и очевидные успехи последних лет [22–24] в области совершенствования алгоритмов.

Второе направление связано с применением специализированных эвристик и метаэвристик, среди которых: методы локального поиска [3], переменных окрестностей (VNS) [25], поиска с запретами [26], генетические [28] и биоинспирированные алгоритмы [20], а также их комбинации [19]. Методы этой группы зачастую демонстрируют потрясающую производительность, позволяя эффективно находить близкие к оптимальным или даже точные решения для постановок CVRP чрезвычайно большого размера. Тем не менее отсутствие теоретически обоснованных оценок точности и трудоемкости влечет дополнительные трудозатраты, связанные с численным оцениванием производительности (и возможной донстройкой параметров) алгоритмов при переходе к каждому новому классу постановок. Кроме того, нередко необходимые для этого тестовые наборы данных не могут быть предоставлены заказчиком, например, из соображений безопасности.

Последнее подтверждает актуальность развития третьего направления, связанного с аппроксимируемостью задачи в классе эффективных алгоритмов с гарантированными оценками. Являясь обобщением классической задачи коммивояжера, задача CVRP NP-трудна в сильном смысле и сохраняет труднорешаемость (при условии, что грузоподъемность является частью входа) даже на евклидовой плоскости [21]. Метрическая постановка задачи APX-полна² [5;12], более того, CVRP APX-трудна даже при произвольной фиксированной грузоподъемности $q \geq 3$ и метрики со значениями 0, 1 и 2.

Наибольших успехов в области аппроксимируемости задачи CVRP удалось достичь в конечномерных числовых пространствах. Известные результаты в этой области восходят к классическим работам М. Хаймовича, А. Ринной Кана [12] и С. Ароры [4]. Так, в статье [12] предложена первая полиномиальная приближенная схема (PTAS) для планарной задачи CVRP при $q = o(\log \log n)$, которую впоследствии удалось распространить на случаи более слабых верхних оценок грузоподъемности (см., например, [5;16]), произвольной фиксированной размерности [17;18], дополнительных ограничений на временные промежутки обслуживания [14] и неоднородность спроса [15]. Результат работы [4] — PTAS для евклидовой задачи коммивояжера — лег в основу полиномиальной приближенной схемы [2], находящей $(1 + \varepsilon)$ -приближенное решение для задачи CVRP на плоскости при рекордно слабой верхней оценке $q \leq 2^{\log^{\delta(\varepsilon)} n}$, и квазиполиномиальной приближенной схемы (QPTAS) [10] для наиболее общей постановки планарной CVRP в условиях отсутствия каких-либо дополнительных ограничений на грузоподъемность.

Таким образом, известные классы эффективно аппроксимируемых случаев задачи CVRP за редким исключением, быть может, случаев описанных в работе [8], исчерпываются либо геометрическими постановками задачи. В то же время, как показано в недавней работе Я. Бартала и коллег [7], близкая к CVRP задача коммивояжера обладает PTAS в существенно более общем случае — в произвольном метрическом пространстве конечной размерности удвоения (doubling dimension).

По-видимому, в данной работе впервые удалось получить аналогичный результат для задачи CVRP.

Мы показываем, что в классе постановок CVRP, задаваемых метрикой размерности удвоения $d > 2$ такой, что расстояние $\rho(x, y)$ от произвольного потребителя x до склада y удовлетворяет соотношению $a \leq \rho(x, y) \leq b$ для наперед заданных вещественных чисел $0 < a < b$, приближенный алгоритм Хаймовича — Ринной Кана сохраняет свойства, обоснованные ранее в классической работе [12] для случая евклидовой плоскости. А именно:

²Т. е. задача аппроксимируема в классе полиномиальных приближенных алгоритмов с фиксированной точностью, и построение для нее полиномиальной приближенной схемы влечет $P = NP$.

- 1) реализует полиномиальную приближенную схему (PTAS) при условии $q = o(\log \log n)$,
- 2) является эффективной полиномиальной приближенной схемой (EPTAS) при произвольной фиксированной грузоподъемности q .

1. Постановка задачи

Содержательная постановка задачи CVRP задается множеством потребителей X , обладающих идентичным объемом спроса на однородную продукцию (без ограничения общности полагаемым единичным), складом y , хранящим неограниченный запас этой продукции, и штатом одинаковых транспортных средств, обладающих заданной грузоподъемностью q . Задача состоит в построении набора циклических маршрутов, начинающихся и завершающихся на складе, удовлетворяющих совокупный потребительский спрос и доставляющих минимальные транспортные издержки.

В свою очередь математическая постановка задачи может быть сформулирована следующим образом. Пусть заданы полный взвешенный граф $G = (X \cup \{y\}, E, w)$ и натуральное число q . Симметричная весовая функция $w: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ произвольной паре узлов $\{u, v\} \subset X \cup \{y\}$ сопоставляет транспортные издержки $w(u, v)$. Допустимым маршрутом называется произвольный простой цикл $R = y, x_{i_1}, \dots, x_{i_s}, y$ в графе G , удовлетворяющий ограничению на грузоподъемность $s \leq q$. Как обычно, стоимостью маршрута R называем величину $w(R) = w(y, x_{i_1}) + w(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + w(x_{i_{s-1}}, x_{i_s}) + w(x_{i_s}, y)$. Задача CVRP состоит в построении множества допустимых маршрутов $S = \{R_1, \dots, R_l\}$ минимальной суммарной стоимости $w(S) = \sum_{j=1}^l w(R_j)$, удовлетворяющих совокупный потребительский спрос.

Если весовая функция w удовлетворяет *неравенству треугольника*, т. е. для произвольного подмножества $\{v_1, v_2, v_3\} \subset X \cup \{y\}$ справедливо соотношение $w(v_1, v_2) \leq w(v_1, v_3) + w(v_3, v_2)$, то величину $w(u, v)$ принято называть *расстоянием* между точками u и v , стоимость $w(R)$ произвольного маршрута R — его *длиной*, а саму задачу — *метрической*.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением исключительно метрических постановок задачи CVRP. Более того, задавшись произвольным натуральным числом $d > 2$ и вещественными числами $0 < a < b$, мы потребуем, чтобы каждая рассматриваемая постановка задачи обладала следующими свойствами.

С в о й с т в о 1. Пара (Z, ρ) , в которой $Z = X \cup \{y\}$ и $\rho|_E \equiv w$, задает метрическое пространство фиксированной *размерности удвоения* $d > 2$.

С в о й с т в о 2. Расстояние $\rho(x, y)$ от произвольного потребителя $x \in X$ до склада y удовлетворяет двустороннему ограничению $a \leq \rho(x, y) \leq b$.

По традиции всюду ниже мы будем использовать обозначения $\text{CVRP}^*(X)$ и $\text{TSP}^*(X)$ для оптимальных значений постановок задач маршрутизации и коммивояжера, задаваемых множеством потребителей X .

2. Метрические пространства фиксированной размерности удвоения

Нам потребуется несколько определений и вспомогательных результатов, полученных в теории конечных метрических пространств (см., например, [1]).

О п р е д е л е н и е 1. Метрическое пространство (Z, ρ) имеет размерность удвоения d , если для произвольных $z_0 \in Z$ и $R > 0$ найдутся число $M \leq 2^d$ и точки $z_1, \dots, z_M \in Z$ такие, что метрический шар

$$B(z_0, R) = \{z \in Z: \rho(z_0, z) \leq R\} \subset \bigcup_{j=1}^M B(z_j, R/2).$$

Нас будут интересовать инъективные отображения (вложения) f заданного метрического пространства (Z, ρ) в конечномерные линейные нормированные пространства.

О п р е д е л е н и е 2. Конечное метрическое пространство (Z, ρ) , $|Z| = n$ вкладывается в пространство l_p^D с искажением L , если существует билипшицево вложение $f: Z \rightarrow l_p^D$, для которого соотношение

$$\rho(z_1, z_2) \leq \|f(z_1) - f(z_2)\|_p \leq L \cdot \rho(z_1, z_2)$$

выполнено для произвольных $z_1, z_2 \in Z$.

Как правило, размерность D результирующего пространства и константа Липшица L зависят от мощности исходного пространства (Z, ρ) . Однако для метрических пространств (Z, ρ^α) , получаемых из пространств фиксированной размерности удвоения (Z, ρ) путем возведения метрики ρ в произвольную степень $\alpha \in (0, 1)$, справедлива известная теорема П. Ассuada [6], гарантирующая вложение таких пространств с константным искажением в пространства фиксированной размерности. Для дальнейших рассуждений нам потребуется более современная версия этого результата [1, теорема 17].

Лемма 1. Пусть (Z, ρ) — произвольное метрическое пространство размерности удвоения d , $p > 1$, $0 < \alpha < 1$, $\theta > 0$ и $2^{192/\theta} \leq k \leq d$. Существует билипшицево вложение $f: Z \rightarrow l_p^D$ такое, что

$$L = O(k^{1+\theta} 2^{d/(pk)} / (1 - \alpha)) \quad \text{и} \quad D = O\left(\frac{d 2^{d/k}}{\alpha \theta} \left(1 - \frac{\log(1 - \alpha)}{\log k}\right)\right).$$

В частности, для используемых нами конкретных значений параметров $p = 2$, $\alpha = 1/2$, $\theta = 192/\log \log d$ и $k = d$ лемма 1 гарантирует существование вложения $f: (Z, \rho) \rightarrow l_2^D$ с константой Липшица $L = \text{poly}(d)$ в пространство размерности $D = O(d \log \log d)$.

3. Схема Хаймовича — Ринной Кана

В классической статье М. Хаймовича и А. Ринной Кана [12] предложен приведенный ниже приближенный алгоритм для метрической задачи CVRP и показано, что он реализует полиномиальную приближенную схему (PTAS) для постановок задачи на евклидовой плоскости, удовлетворяющих соотношению $q = o(\log \log n)$.

Алгоритм основан на разбиении множества X на два непересекающихся подмножества X_{out} и X_{in} внешних и внутренних потребителей соответственно. Принципиальный момент, на котором базируется обоснование полиномиальности данной схемы, состоит в том, что для поиска $(1 + \varepsilon)$ -приближенного решения исходной задачи можно ограничиться разбиениями, в которых $|X_{out}|$ не зависит от n , что позволяет применять для поиска решения соответствующей “внешней” подзадачи точные алгоритмы экспоненциальной трудоемкости. В свою очередь приближенное решение “внутренней” подзадачи, задаваемой подмножеством X_{in} , может быть найдено существенно более грубым, но высокопроизводительным приближенным методом итерированного разбиения маршрута (ИТР) [12], принимающим на вход произвольное β -приближенное решение вспомогательной метрической задачи коммивояжера.

А л г о р и т м Хаймовича — Ринной Кана

1. Упорядочить множество потребителей X по убыванию расстояния $r_i = \rho(x_i, y)$ от склада.
2. Для заданного $\varepsilon > 0$ найти наименьшее значение $\tilde{k} = \tilde{k}(\varepsilon, q, \beta)$, для которого относительная погрешность алгоритма удовлетворяет соотношению

$$e(\tilde{k}) = \frac{\text{CVRP}^*(X_{out}) + \text{ИТР}(X_{in}) - \text{CVRP}^*(X)}{\text{CVRP}^*(X)} \leq \varepsilon.$$

Здесь $X_{out} = \{x_1, \dots, x_{\tilde{k}-1}\}$, $X_{in} = X \setminus X_{out}$ и $\text{ИТР}(X_{in})$ — верхняя оценка стоимости приближенного решения, возвращаемого алгоритмом ИТР.

3. Для поиска точного решения S_{DP} “внешней” подзадачи и приближенного решения S_{ITP} “внутренней” применить схему динамического программирования Хорна [13] и алгоритм ИТР соответственно.
4. Выдать приближенное решение исходной задачи в виде $S = S_{DP} \cup S_{ITP}$.

4. Основной результат

В этом разделе мы покажем, что результат Хаймовича — Ринной Кана справедлив для гораздо более широкого (чем евклидова плоскость) класса постановок CVRP.

Теорема. $(1 + \varepsilon)$ -приближенное решение произвольной метрической постановки задачи CVRP, обладающей свойствами 1 и 2, может быть получено для произвольного $\varepsilon > 0$ за время

$$O(qk^3 2^k) + \text{TIME}(\text{TSP}, \beta, n) + O(n^2),$$

где

$$k = k(\varepsilon, q, \beta, D, a) = O\left(\left(\frac{q}{\varepsilon}\right)^D \left(\frac{4\sqrt{2}\beta D^{(1+3/D)/2} L}{\sqrt{a}}\right)^D + \frac{\beta D^2 2^D L}{2\sqrt{a}}\right) \left(\exp\left(\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)^2,$$

$\text{TIME}(\text{TSP}, \beta, n)$ — время решения вспомогательной задачи коммивояжера, $D = O(d \log \log d)$ и $L = \text{poly}(d)$.

Доказательство теоремы следует из приведенных ниже известных лемм (см., например, [5; 12]).

Лемма 2. Стоимость $w(S_{ITP})$ приближенного решения, получаемого методом ИТР для произвольной (необязательно метрической) постановки CVRP, удовлетворяет соотношению

$$\text{ITP}(X) = w(S_{ITP}) \leq 2 \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil \frac{\sum_{i=1}^n r_i}{n} + (1 - 1/q) \text{TSP}^*(X).$$

Лемма 3. Стоимость оптимального решения $\text{CVRP}^*(X)$ произвольной метрической постановки задачи CVRP допускает нижнюю оценку

$$\text{CVRP}^*(X) \geq \max\left\{\text{TSP}^*(X \cup \{y\}), 2r_1, \frac{2}{q} \sum_{i=1}^n r_i\right\}.$$

Следующая лемма устанавливает верхнюю оценку неустранимой погрешности, возникающей на шаге 2 схемы Хаймовича — Ринной Кана при декомпозиции исходной постановки.

Лемма 4. Для произвольного $1 \leq k \leq n$ и разбиения множества потребителей X произвольной метрической постановки CVRP на подмножества X_{in} и X_{out} справедливо соотношение

$$\text{CVRP}^*(X_{in}) + \text{CVRP}^*(X_{out}) \leq \text{CVRP}^*(X) + 4(k - 1)r_k.$$

Последняя лемма из ранее доказанных устанавливает верхнюю оценку для веса оптимального решения задачи коммивояжера на множестве потребителей $X \in l_2^D$. Впервые данный технический результат был представлен в работе [17, лемма 5].

Лемма 5. Пусть $X \subset B(0, R) = \{x \in l_2^D : \|x\|_2 \leq R\}$. Для длины $\text{TSP}^*(X)$ оптимального маршрута коммивояжера справедлива верхняя оценка

$$\text{TSP}^*(X) \leq C_D R + C_D^* R^{1/D} \left(\sum_{i=1}^n r_i\right)^{1-1/D}, \tag{1}$$

где $C_D = D^2 2^{D+1}$ и $C_D^* = 4\sqrt{2} D^{(1+3/D)/2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Рассмотрим метрическое пространство $\mathcal{S} = (S^{D-1}, dist)$, задаваемое на поверхности единичной сферы S^{D-1} пространства l_2^D угловым расстоянием $dist(\xi_1, \xi_2) = \arccos(\xi_1, \xi_2)$. Проверим, что пространство \mathcal{S} содержит конечное δ -плотное подмножество для произвольного достаточно малого $\delta > 0$. В самом деле, поместим сферу S^{D-1} в D -мерный гиперкуб со стороной 2. Задав произвольным $h \in (0, 2]$, разобьем каждое одномерное ребро гиперкуба на $\left\lceil \frac{2}{h} \right\rceil$ ячеек, каждая из которых, за исключением, может быть, одной, имеет длину h . В свою очередь каждая фасета гиперкуба будет содержать $\left\lceil \frac{2}{h} \right\rceil^{D-1}$ ячеек размерности $D - 1$, а общее число ячеек на его поверхности составит

$$2D \left\lceil \frac{2}{h} \right\rceil^{D-1} \leq 2D(1 + 2/h)^{D-1} = 2^D D h^{1-D} (1 + h/2)^{D-1} \leq \tilde{C}_D h^{1-D},$$

где $2\tilde{C}_D = D4^D$.

Легко убедиться в том, что множество \mathcal{S}'_h , состоящее из проекций геометрических центров построенных ячеек на поверхность сферы S^{D-1} , является искомым δ -плотным подмножеством \mathcal{S} при $\delta = h\sqrt{D-1}/2$, мощность которого не превосходит $\tilde{C}_D h^{1-D}$.

2. Для получения искомой верхней оценки $TSP^*(X)$ сделаем следующее:

- через каждую точку $\xi_j \in \mathcal{S}'_h$ проведем радиус шара $B(0, R)$, содержащего множество X ;
- произвольную точку $x_i \in X$ соединим перпендикуляром с ближайшим к ней радиусом;
- построим замкнутый маршрут, проходящий по каждому из построенных радиусов от начала координат до поверхности шара $B(0, R)$, посещая при необходимости присоединенные к нему точки x_i .

Легко видеть, что длина построенного маршрута не превосходит величины

$$W(h) = 2\tilde{C}_D h^{1-D} R + h\sqrt{D-1} \sum_{i=1}^n r_i,$$

и, следовательно,

$$TSP^*(X) \leq \min\{W(h) : 0 < h \leq 2\}. \quad (2)$$

В силу выпуклости функции $W = W(h)$ оптимум в задаче (2) достигается либо в стационарной точке

$$h^* = \left(\frac{2\tilde{C}_D R \sqrt{D-1}}{\sum_{i=1}^n r_i} \right)^{1/D}, \quad (3)$$

в которой

$$W'(h) = 2\tilde{C}_D(1-D)Rh^{-D} + \sqrt{D-1} \sum_{i=1}^n r_i = 0,$$

либо при $h^* \geq 2$ на правой границе интервала.

Рассмотрим каждый из случаев в отдельности. Пусть $h^* < 2$, тогда

$$\begin{aligned} TSP^* &\leq W(h^*) = 2\tilde{C}_D R \left(\frac{2\tilde{C}_D R \sqrt{D-1}}{\sum_{i=1}^n r_i} \right)^{\frac{1-D}{D}} + \left(\frac{2\tilde{C}_D R \sqrt{D-1}}{\sum_{i=1}^n r_i} \right)^{1/D} \sqrt{D-1} \sum_{i=1}^n r_i \\ &= (2\tilde{C}_D)^{1/D} \left((D-1)^{\frac{1-D}{2D}} + (D-1)^{\frac{D+1}{2D}} \right) R^{1/D} \left(\sum_{i=1}^n r_i \right)^{1-1/D} \leq C_D^* R^{1/D} \left(\sum_{i=1}^n r_i \right)^{1-1/D}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $4D^{1/D} \left((D-1)^{\frac{1-D}{2D}} + (D-1)^{\frac{D+1}{2D}} \right) \leq C_D^* = 4\sqrt{2} D^{(1+3/D)/2}$ при произвольном $D > 1$.

Если $h^* \geq 2$, то из соотношения (3) имеем $\sum_{i=1}^n r_i \leq 2^{1-D} \tilde{C}_D R \sqrt{D-1}$, откуда

$$\begin{aligned} \text{TSP}^* &\leq W(2) = 2\tilde{C}_D 2^{1-D} R + 2\sqrt{D-1} \sum_{i=1}^n r_i \\ &\leq 2^{2-D} \tilde{C}_D R + 2^{2-D} (D-1) \tilde{C}_D R = 2^{1-D} D^2 2^{2D} R = D^2 2^{D+1} \cdot R. \end{aligned} \quad (5)$$

Полагая $C_D = D^2 2^{D+1}$ и суммируя оценки (4) и (5), завершаем обоснование неравенства (1).

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь произвольную метрическую постановку задачи CVRP, обладающую свойствами 1 и 2. Зададимся произвольным непустым подмножеством $X' = X \cap B(y, R)$ множества потребителей, определим $R = \max\{r_i : x_i \in X'\}$ и получим верхнюю оценку длины $\text{TSP}^*(X')$ оптимального маршрута коммивояжера в терминах расстояний от потребителей до складов, подобную оценке (1). Без ограничения общности полагаем $b \leq 1/2$.

Пусть $f: Z \rightarrow l_2^D$ — вложение пространства $(Z, \rho^{1/2})$ в конечномерное евклидово пространство, соответствующее конкретным значениям параметров $p = 2$, $\alpha = 1/2$, $\theta = 192/\log \log d$ и $k = d$, удовлетворяющее соотношению

$$\rho^{1/2}(z_1, z_2) \leq \|f(z_1) - f(z_2)\|_2 \leq L \rho^{1/2}(z_1, z_2). \quad (6)$$

Существование вложения f гарантируется леммой 1 для размерности $D = O(d \log \log d)$ и $L = \text{poly}(d)$. По построению неравенство

$$\rho(z_1, z_2) \leq \rho^{1/2}(z_1, z_2) \leq 1 \quad (7)$$

верно для произвольной пары $\{z_1, z_2\}$ из подмножества $Z' = X' \cup \{y\}$.

Обозначим длину оптимальных маршрутов коммивояжера на множестве X' в исходной метрике ρ , метрике $\rho^{1/2}$ и на множестве $f(X') \subset l_2^D$ в метрике, порождаемой евклидовой нормой через $\text{TSP}_\rho^*(X')$, $\text{TSP}_{\rho^{1/2}}^*(X')$ и $\text{TSP}_{l_2^D}^*(X')$ соответственно.

Лемма 6. *Справедлива следующая оценка:*

$$\text{TSP}_\rho^*(X') \leq \text{TSP}_{\rho^{1/2}}^*(X') \leq \text{TSP}_{l_2^D}^*(X') \leq \frac{C_D L}{\sqrt{a}} R + \frac{C_D^* L}{\sqrt{a}} R^{1/D} \left(\sum_{x_i \in X'} r_i \right)^{1-1/D}.$$

Доказательство. Неравенства $\text{TSP}_\rho^*(X') \leq \text{TSP}_{\rho^{1/2}}^*(X') \leq \text{TSP}_{l_2^D}^*(X')$ следуют непосредственно из соотношений (6) и (7). В самом деле, обоснуем, например, первое из них. Пусть T — оптимальный маршрут коммивояжера в метрике $\rho^{1/2}$. Неравенство (7) влечет соотношение $w_\rho(T) \leq w_{\rho^{1/2}}(T)$ для весов маршрута T в исходной метрике и метрике $\rho^{1/2}$ соответственно. Следовательно,

$$\text{TSP}_\rho^*(X') \leq w_\rho(T) \leq w_{\rho^{1/2}}(T) = \text{TSP}_{\rho^{1/2}}^*(X').$$

Далее, по лемме 5

$$\text{TSP}_{l_2^D}^*(X') \leq C_D \tilde{R} + C_D^* \tilde{R}^{1/D} \left(\sum_{x_i \in X'} \tilde{r}_i \right)^{1-1/D}, \quad (8)$$

где $\tilde{r}_i = \|f(x_i) - f(y)\|_2$ и $\tilde{R} = \max\{\tilde{r}_i : x_i \in X'\}$. Поскольку рассматриваемая постановка обладает свойством 2, для каждого $x_i \in X'$ имеем $\sqrt{\tilde{r}_i} \leq r_i/\sqrt{a}$, и, следовательно, в силу (6) $\tilde{r}_i \leq L\sqrt{\tilde{r}_i} \leq L/\sqrt{a} r_i$. Применяя это соображение к соотношению (8) и учитывая доказанное выше, получаем искомую оценку.

Лемма доказана.

Далее оценим относительную погрешность $e(k)$ исследуемой схемы.

Лемма 7. Для любого $k < n$ относительная погрешность $e(k)$ может быть оценена следующим образом:

$$e(k) \leq q \left(2k + 1 + \frac{\beta C_D L}{2\sqrt{a}} \right) \frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} + \frac{q\beta C_D^* L}{2\sqrt{a}} \left(\frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} \right)^{1/D},$$

где β — точность решения вспомогательной задачи коммивояжера.

Доказательство. По определению для рассматриваемой схемы $e(k)$ имеет вид

$$e(k) = \frac{\text{CVRP}^*(X_{out}) + \text{ITP}(X_{in}) - \text{CVRP}^*(X)}{\text{CVRP}^*(X)}.$$

Добавим и вычтем в числителе величину $\text{CVRP}^*(X_{in})$:

$$e(k) = \frac{\text{CVRP}^*(X_{out}) + \text{ITP}(X_{in}) - \text{CVRP}^*(X) + \text{CVRP}^*(X_{in}) - \text{CVRP}^*(X_{in})}{\text{CVRP}^*(X)}.$$

Воспользовавшись леммами 2–6, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} e(k) &\leq \frac{4(k-1)r_k + \frac{2}{q} \sum_{i=k}^n r_i + \beta \text{TSP}^*(X_{in}) + 2r_k - \frac{2}{q} \sum_{i=k}^n r_i}{\frac{2}{q} \sum_{i=1}^n r_i} \\ &\leq \frac{4kr_k + \beta \left(\frac{C_D L r_k}{\sqrt{a}} + \frac{C_D^* L r_k^{1/D}}{\sqrt{a}} \left(\sum_{i=k}^n r_i \right)^{1-1/D} \right) + 2r_k}{\frac{2}{q} \sum_{i=1}^n r_i} \\ &\leq q \left(2k + 1 + \frac{\beta C_D L}{2\sqrt{a}} \right) \frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} + \frac{q\beta C_D^* L}{2\sqrt{a}} \left(\frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} \right)^{1/D}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство существования для произвольного заданного $\varepsilon > 0$ номера $k = k(\varepsilon)$, обеспечивающего верхнюю оценку относительно погрешности $e(k) < \varepsilon$, основано на следующей технической лемме.

Лемма 8. Пусть для некоторых чисел $A, B, C > 0$ и $D > 1$ система

$$s_k^D + \frac{2B}{2k+A} s_k - \frac{C}{2k+A} \geq 0 \quad (1 \leq k \leq \tilde{k}) \quad (9)$$

обладает решением $s_1, s_2, \dots, s_{\tilde{k}}$, для которого $\sum_{k=1}^{\tilde{k}} s_k^D \leq 1$. Тогда

$$\tilde{k} \leq \left(\left(\frac{C}{4B} \right)^{-D} + A + 1 \right) \exp\left(\frac{2}{C} \right).$$

Доказательство. В самом деле, зададимся произвольным решением $s_1, s_2, \dots, s_{\tilde{k}}$ системы (9), удовлетворяющим соотношению $\sum_{k=1}^{\tilde{k}} s_k^D \leq 1$. Для произвольного $1 \leq k \leq \tilde{k}$ возможен один из двух вариантов

$$s_k^D \leq \frac{C/2}{2k+A} \quad \text{и} \quad s_k^D > \frac{C/2}{2k+A}.$$

Пусть $K \subset \{1, \dots, \tilde{k}\}$ — подмножество номеров неравенств, для которых справедлива первая альтернатива. Для каждого $k \in K$ из соответствующего неравенства системы (9) имеем

$$\frac{2B}{2k+A} s_k \geq \frac{C/2}{2k+A},$$

т. е. $s_k^D \geq \frac{C}{4B}$. Таким образом,

$$1 \geq \sum_{k=1}^{\tilde{k}} s_k^D = \sum_{k \in K} s_k^D + \sum_{k \notin K} s_k^D \geq \left(\frac{C}{4B}\right)^D |K| + \frac{C}{2} \sum_{k \notin K} \frac{1}{2k+A} \geq \left(\frac{C}{4B}\right)^D |K| + \frac{C}{2} \sum_{k=|K|+1}^{\tilde{k}} \frac{1}{2k+A},$$

где справедливость последнего неравенства следует из монотонности функции $1/(2k+A)$. Поскольку для произвольного $|K| < \tilde{k}$

$$\left(\frac{C}{4B}\right)^D |K| + \int_{|K|+1}^{\tilde{k}} \frac{C dx}{2(x+A)} = \left(\frac{C}{4B}\right)^D |K| + \frac{C}{2} \ln\left(\frac{\tilde{k}+A}{|K|+1+A}\right),$$

то

$$1 \geq \max\left\{\frac{C}{2} \ln\left(\frac{\tilde{k}+A}{|K|+1+A}\right), \left(\frac{C}{4B}\right)^D |K|\right\},$$

откуда

$$\tilde{k} \leq (|K|+1+A) \exp\left(\frac{2}{C}\right) = \left(\left(\frac{C}{4B}\right)^{-D} + A + 1\right) \exp\left(\frac{2}{C}\right).$$

Лемма доказана.

Следующая лемма, устанавливающая точность алгоритма Хаймовича — Ринной Кана, является непосредственным следствием леммы 8.

Лемма 9. Для произвольных значений параметров $\varepsilon > 0$, $\beta \geq 1$, $D > 2$, $q > 1$ существует значение

$$\tilde{k} = \tilde{k}(\varepsilon, q, \beta, D, a) = O\left(\left(\frac{q}{\varepsilon}\right)^D \left(\frac{4\sqrt{2}\beta D^{(1+3/D)/2} L}{\sqrt{a}}\right)^D + \frac{\beta D^2 2^D L}{2\sqrt{a}}\right) \left(\exp\left(\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)^2$$

такое, что условие

$$e(k) \leq q \left(2k+1 + \frac{\beta C_D L}{2\sqrt{a}} \frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i}\right) + \frac{q \beta C_D^* L}{2\sqrt{a}} \left(\frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i}\right)^{1/D} < \varepsilon$$

выполнено по крайней мере для одного значения k из интервала $1 \leq k \leq \tilde{k}$.

Доказательство. В самом деле, достаточно положить

$$s_k = \left(\frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i}\right)^{1/D}, \quad A = 1 + \frac{\beta D^2 2^D L}{2\sqrt{a}}, \quad B = \frac{\beta \sqrt{2} D^{(1+3/D)/2} L}{\sqrt{a}}, \quad C = \frac{\varepsilon}{q},$$

после чего применить утверждение леммы 8.

Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы оценим трудоемкость схемы Хаймовича — Ринной Кана. В самом деле, трудоемкость поиска оптимального решения “внешней” подзадачи для подмножества потребителей X_{out} посредством схемы динамического программирования Хорна [13] не превосходит $O(q\tilde{k}^3 2^{\tilde{k}})$, где верхняя оценка \tilde{k} приведена в лемме 9. Трудоемкость приближенного решения “внутренней” подзадачи определяется трудоемкостью $\text{TIME}(\text{TSP}, \beta, n)$ β -приближенного алгоритма для вспомогательной метрической задачи коммивояжера³. Учитывая известную верхнюю оценку $O(n^2)$ времени работы алгоритма ИТР, получаем суммарную общую оценку

$$O(q\tilde{k}^3 2^{\tilde{k}}) + \text{TIME}(\text{TSP}, \beta, n) + O(n^2)$$

трудоемкости исследуемой схемы, чем завершаем доказательство теоремы.

Следствие. Алгоритм Хаймовича — Ринной Кана в классе метрических постановок CVRP, обладающих свойствами 1 и 2, реализует полиномиально приближенную схему (PTAS) при $q = o(\log \log n)$ и эффективную полиномиально приближенную схему (EPTAS) для произвольного фиксированного значения q .

5. Заключение

В данной работе впервые показано, что семейство постановок задачи CVRP, аппроксимируемых за полиномиальное время с любой заданной точностью, не ограничено постановками, заданными в конечномерных числовых пространствах. В частности, доказано, что классический алгоритм М. Хаймовича и А. Ринной Кана сохраняет аппроксимационные свойства, обоснованные ранее для конечномерных евклидовых пространств, в пространствах существенно более общей природы — метрических пространствах с фиксированной размерностью удвоения. Как следует из результатов статьи, данный алгоритм реализует полиномиальную приближенную схему (PTAS) при условии отделимости потребителей от склада и ограничении на грузоподъемность $q = o(\log \log n)$ и является эффективной полиномиальной приближенной схемой (EPTAS) при произвольном фиксированном q . Отметим, что процедура поиска $(1 + \varepsilon)$ -приближенного решения задачи CVRP реализуется исследуемым в работе алгоритмом непосредственно в исходном метрическом пространстве. Техника билипшицевого вложения метрического пространства в пространство l_2^D подходящей размерности используется в доказательстве теоремы исключительно при обосновании точности приближения. Из вопросов, оставшихся на данный момент открытыми, отметим возможность распространения результата А. Дас и К. Матье [10] об аппроксимируемости CVRP без ограничения роста грузоподъемности в классе квазиполиномиальных приближенных схем (QPTAS) на семейство метрических постановок в пространствах ограниченной размерности удвоения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abraham I., Bartal Y., Neiman O. Advances in metric embedding theory // Advances in Mathematics. 2011. Vol. 228, no. 6. P. 3026–3126. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.08.003>
2. Adamaszek A., Czumaj A., Lingas A. PTAS for k -tour cover problem on the plane for moderately large values of k // Inter. J. of Foundations of Computer Science. 2010. Vol. 21, no. 06. P. 893–904. <https://doi.org/10.1142/S0129054110007623>
3. Arnold F., Sörensen K. Knowledge-guided local search for the vehicle routing problem // Comput. Oper. Res. 2019. Vol. 105. P. 32–46. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2019.01.002>
4. Arora S. Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems // J. ACM. 1998. Vol. 45. P. 753–782.

³Например, для алгоритма Кристофидеса — Сердюкова $\beta = 3/2$ и $\text{TIME}(\text{TSP}, \beta, n) = O(n^3)$.

5. **Asano T., Katoh N., Tamaki H., Tokuyama T.** Covering points in the plane by k -tours: Towards a polynomial time approximation scheme for general k // Proceedings of the Twenty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '97). N Y: ACM, 1997. P. 275–283. <https://doi.org/10.1145/258533.258602>
6. **Assouad P.** Plongements lipschitziens dans \mathbb{R}^n // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1983. Vol. 111. P. 429–448. <http://eudml.org/doc/87452>
7. **Bartal Y., Gottlieb L. A., Krauthgamer R.** The traveling salesman problem: Low-dimensionality implies a polynomial time approximation scheme // SIAM J. Computing. 2016. Vol. 45, no. 4. P. 1563–1581. <https://doi.org/10.1137/130913328>
8. **Becker A., Klein P. N., Schild A.** A PTAS for bounded-capacity vehicle routing in planar graphs // Algorithms and Data Structures / eds. Z. Friggstad., J.-R. Sack, M. Salavatipour. Cham: Springer, 2019. P. 99–111. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11646).
9. **Dantzig G. B., Ramser J. H.** The truck dispatching problem // Management science. 1959. Vol. 6, no. 1. P. 80–91.
10. **Das A., Mathieu C.** A quasipolynomial time approximation scheme for Euclidean capacitated vehicle routing // Algorithmica. 2015. Vol. 73. P. 115–142. <https://doi.org/10.1007/s00453-014-9906-4>
11. **Demir E., Huckle K., Syntetos A., Lahy A., Wilson M.** Vehicle routing problem: Past and future // Contemporary Operations and Logistics / ed. P. Wells Cham: Springer, 2019. P. 97–117. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14493-7_7
12. **Haimovich M., Rinnooy Kan A. H. G.** Bounds and heuristics for capacitated routing problems // Math. Oper. Res. 1985. Vol. 10, no. 4. P. 527–542. <https://doi.org/10.1287/moor.10.4.527>
13. **van Hoorn J. J.** Dynamic programming for routing and scheduling: Optimizing sequences of decisions. Ph. D. thesis, 2016. 210 p. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.14344.88329>
14. **Khachay M., Ogorodnikov Y.** Efficient PTAS for the Euclidean CVRP with time windows // Analysis of Images, Social Networks and Texts (AIST 2018) / ed. van der W. Aalst. Cham: Springer, 2018. P. 318–328. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11179). https://doi.org/10.1007/978-3-030-11027-7_30
15. **Khachay M., Ogorodnikov Y.** Approximation scheme for the capacitated vehicle routing problem with time windows and non-uniform demand // Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019) / eds. M. Khachay, Y. Kochetov, P. Pardalos. Cham: Springer, 2019. P. 309–327. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11548). https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9_22
16. **Khachay M., Ogorodnikov Y.** Improved polynomial time approximation scheme for capacitated vehicle routing problem with time windows // Optimization and Applications (OPTIMA 2018) / Y. Evtushenko, M. Jaćimović, M. Khachay, Y. Kochetov, V. Malkova, M. Posypkin. Cham: Springer, 2019. P. 155–169. (Communications in Computer and Information Science; vol. 974). https://doi.org/10.1007/978-3-030-10934-9_12
17. **Khachay M., Dubinin R.** PTAS for the Euclidean capacitated vehicle routing problem in R^d // Discrete Optimization and Operations Research / eds. Y. Kochetov, M. Khachay, V. Beresnev, E. Nurminski, P. Pardalos. Cham: Springer, 2016. P. 193–205. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 9869). https://doi.org/10.1007/978-3-319-44914-2_16
18. **Khachay M., Zaytseva H.** Polynomial time approximation scheme for single-depot Euclidean capacitated vehicle routing problem // Combinatorial Optimization and Applications / eds. Z. Lu, D. Kim, W. Wu, W. Li, D.Z Du. Cham: Springer, 2015. P. 178–190. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 9486). https://doi.org/10.1007/978-3-319-26626-8_14
19. **Nalepa J., Blocho M.** Adaptive memetic algorithm for minimizing distance in the vehicle routing problem with time windows // Soft Computing. 2016. Vol. 20, no. 6. P. 2309–2327. <https://doi.org/10.1007/s00500-015-1642-4>
20. **Necula R., Breaban M., Raschip M.** Tackling dynamic vehicle routing problem with time windows by means of ant colony system // IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2017. P. 2480–2487. <https://doi.org/10.1109/CEC.2017.7969606>
21. **Papadimitriou C.** Euclidean TSP is NP-complete // Theoret. Comput. Sci. 1977. Vol. 4. P. 237–244.
22. **Pecin D., Pessoa A., Poggi M., Uchoa E.** Improved branch-cut-and-price for capacitated vehicle routing // Mathematical Programming Computation. 2017. Vol. 9, no. 1. P. 61–100. <https://doi.org/10.1007/s12532-016-0108-8>
23. **Pessoa A. A., Sadykov R., Uchoa E.** Enhanced branch-cut-and-price algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems // European J. Oper. Res. 2018. Vol. 270, no. 2. P. 530–543. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.04.009>

24. **Pessoa A. A., Sadykov R., Uchoa E., Vanderbeck F.** A generic exact solver for vehicle routing and related problems // *Integer Programming and Combinatorial Optimization: Proc. 20th Inter. Conf.* / eds. A. Lodi, V. Nagarajan. Cham: Springer, 2019, pp. 354–369. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11480). https://doi.org/10.1007/978-3-030-17953-3_27
25. **Polat O.** A parallel variable neighborhood search for the vehicle routing problem with divisible deliveries and pickups // *Comput. Oper. Res.* 2017. Vol. 85. P. 71–86. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2017.03.009>
26. **Qiu M., Fu Z., Eglese R., Tang Q.** A tabu search algorithm for the vehicle routing problem with discrete split deliveries and pickups // *Comput. Oper. Res.* 2018. Vol. 100. P. 102–116. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.07.021>
27. **Toth P., Vigo D.** *Vehicle routing: Problems, methods and applications*. Second Edition. MOS-Siam Series on Optimization, SIAM, 2 edn. 2014. 481 p.
28. **Vidal T., Crainic T. G., Gendreau M., Prins C.** A hybrid genetic algorithm with adaptive diversity management for a large class of vehicle routing problems with time-windows // *Comput. Oper. Res.* 2013. Vol. 40, no. 1. P. 475–489. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2012.07.018>

Поступила 30.08.2019

После доработки 30.09.2019

Принята к публикации 7.10.2019

Хачай Михаил Юрьевич

д-р физ.-мат. наук

профессор РАН

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

г. Екатеринбург

Омский государственный технический университет

г. Омск

e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Огородников Юрий Юрьевич

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

г. Екатеринбург

e-mail: yogorodnikov@gmail.com

REFERENCES

1. Abraham I., Bartal Y., Neiman O. Advances in metric embedding theory. *Advances in Mathematics*, 2011, vol. 228, no. 6, pp. 3026–3126. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.08.003>
2. Adamaszek A., Czumaj A., Lingas A. PTAS for k -tour cover problem on the plane for moderately large values of k . *Inter. J. Foundations of Computer Science*, 2010, vol. 21, no. 06, pp. 893–904. <https://doi.org/10.1142/S0129054110007623>
3. Arnold F., Sörensen K. Knowledge-guided local search for the vehicle routing problem. *Comput. Oper. Res.*, 2019, vol. 105, pp. 32–46. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2019.01.002>
4. Arora S. Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems. *J. ACM*, 1998, vol. 45, pp. 753–782.
5. Asano T., Katoh N., Tamaki H., Tokuyama T. Covering points in the plane by k -tours: Towards a polynomial time approximation scheme for general k . In: *Proc. of the Twenty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '97)*, N Y, USA: ACM, 1997. P. 275–283. <https://doi.org/10.1145/258533.258602>
6. Assouad P. Plongements lipschitziens dans \mathbb{R}^n . *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1983, vol. 111, pp. 429–448. <http://eudml.org/doc/87452>
7. Bartal Y., Gottlieb L. A., Krauthgamer R. The traveling salesman problem: Low-dimensionality implies a polynomial time approximation scheme. *SIAM J. on Computing*, 2016, vol. 45, no. 4, pp. 1563–1581. <https://doi.org/10.1137/130913328>

8. Becker A., Klein P.N., Schild A. A PTAS for bounded-capacity vehicle routing in planar graphs. In: Friggstad Z., Sack J.-R., Salavatipour M. (eds), *Algorithms and Data Structures*, 2019, Lecture Notes in Computer Science, vol. 11646, Cham: Springer, pp. 99–111.
9. Dantzig G.B., Ramser J.H. The truck dispatching problem. *Management science*, 1959, vol. 6, no. 1, pp. 80–91.
10. Das A., Mathieu C. A quasipolynomial time approximation scheme for Euclidean capacitated vehicle routing. *Algorithmica*, 2015, vol. 73, pp. 115–142. <https://doi.org/10.1007/s00453-014-9906-4>
11. Demir E., Huckle K., Syntetos A., Lahy A., Wilson M. Vehicle routing problem: Past and future. In: Wells P. (ed.), *Contemporary Operations and Logistics*, Cham: Springer, 2019, pp. 97–117. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14493-7_7
12. Haimovich M., Rinnooy Kan A.H.G. Bounds and heuristics for capacitated routing problems. *Math. Oper. Res.*, 1985, vol. 10, no. 4, pp. 527–542. <https://doi.org/10.1287/moor.10.4.527>
13. van Hoorn J.J. Dynamic programming for routing and scheduling: Optimizing sequences of decisions. *Ph. D. thesis*, 2016, 210 p. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.14344.88329>
14. Khachay M., Ogorodnikov Y. Efficient PTAS for the Euclidean CVRP with time windows. In: van der Aalst W. et al. (eds), *Analysis of Images, Social Networks and Texts (AIST 2018)*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 11179, Cham: Springer, 2018, pp. 318–328. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11027-7_30
15. Khachay M., Ogorodnikov Y. Approximation scheme for the capacitated vehicle routing problem with time windows and non-uniform demand. In: Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. (eds), *Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019)*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 11548, Cham: Springer, 2019, pp. 309–327. https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9_22
16. Khachay M., Ogorodnikov Y. Improved polynomial time approximation scheme for capacitated vehicle routing problem with time windows. In: Evtushenko Y., Jaćimović M., Khachay M., Kochetov Y., Malkova V., Posypkin M. (eds), *Optimization and Applications (OPTIMA 2018)*, Communications in Computer and Information Science, vol. 974, Cham: Springer, 2019, pp. 155–169. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10934-9_12
17. Khachay M., Dubinin R. PTAS for the Euclidean capacitated vehicle routing problem in R^d . In: Kochetov Y., Khachay M., Beresnev V., Nurminski E., Pardalos P. (eds), *Discrete Optimization and Operations Research*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 9869, Cham: Springer, 2016, pp. 193–205. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44914-2_16
18. Khachay M., Zaytseva H. Polynomial time approximation scheme for single-depot Euclidean capacitated vehicle routing problem. In: Lu Z., Kim D., Wu W., Li W., Du D.Z. (eds), *Combinatorial Optimization and Applications*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 9486, Cham: Springer, 2015, pp. 178–190. https://doi.org/10.1007/978-3-319-26626-8_14
19. Nalepa J., Blocho M. Adaptive memetic algorithm for minimizing distance in the vehicle routing problem with time windows. *Soft Computing*, 2016, vol. 20, no. 6, pp. 2309–2327. <https://doi.org/10.1007/s00500-015-1642-4>
20. Necula R., Breaban M., Raschip M. Tackling dynamic vehicle routing problem with time windows by means of ant colony system. *IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, 2017, pp. 2480–2487. <https://doi.org/10.1109/CEC.2017.7969606>
21. Papadimitriou C. Euclidean TSP is NP-complete *Theoret. Comput. Sci.*, 1977, vol. 4, pp. 237–244.
22. Pecin D., Pessoa A., Poggi M., Uchoa E. Improved branch-cut-and-price for capacitated vehicle routing. *Math. Programming Computation*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 61–100. <https://doi.org/10.1007/s12532-016-0108-8>
23. Pessoa A.A., Sadykov R., Uchoa E. Enhanced branch-cut-and-price algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems. *European J. Oper. Res.*, 2018, vol. 270, no. 2, pp. 530–543. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.04.009>
24. Pessoa A.A., Sadykov R., Uchoa E., Vanderbeck F. A generic exact solver for vehicle routing and related problems. In: Lodi A., Nagarajan V. (eds), *Proc. 20th Inter. Conf. “Integer Programming and Combinatorial Optimization” (IPCO)*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 11480, Cham: Springer, 2019, pp. 354–369. https://doi.org/10.1007/978-3-030-17953-3_27
25. Polat O. A parallel variable neighborhood search for the vehicle routing problem with divisible deliveries and pickups. *Comput. Oper. Res.*, 2017, vol. 85, pp. 71–86. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2017.03.009>
26. Qiu M., Fu Z., Eglese R., Tang Q. A tabu search algorithm for the vehicle routing problem with discrete split deliveries and pickups. *Comput. Oper. Res.*, 2018, vol. 100, pp. 102–116. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.07.021>

27. Toth P., Vigo D. *Vehicle routing: Problems, methods and applications*. Philadelphia: SIAM, 2014, 481 p.
28. Vidal T., Crainic T. G., Gendreau M., Prins C. A hybrid genetic algorithm with adaptive diversity management for a large class of vehicle routing problems with time-windows. *Comput. Oper. Res.*, 2013, vol. 40, no. 1, pp. 475–489. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2012.07.018>

Received August 30, 2019

Revised September 30, 2019

Accepted October 7, 2019

Funding Agency: This research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 19-07-01243 and 17-08-01385).

Mikhail Yur'evich Khachai, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia; Omsk State Technical University, Omsk, 644050 Russia, e-mail: mkhachay@imm.uran.ru .

Yurii Yur'evich Ogorodnikov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: yogorodnikov@gmail.com .

Cite this article as: M. Yu. Khachai, Yu. Yu. Ogorodnikov. Haimovich–Rinnooy Kan polynomial-time approximation scheme for the CVRP in metric spaces of a fixed doubling dimension, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 235–248 .