На правах рукописи

РУБАНОВА Наталия Алексеевна

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ И РАЗРАБОТКА ДЕКОМПОЗИЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ ИХ РЕШЕНИЯ

05.13.18 —математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург - 2007

Работа выполнена в Омском государственном
университете имени Ф.М. Достоевского
на кафедре прикладной и вычислительной математики

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Колоколов Александр Александрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Мазуров Владимир Данилович, кандидат физико-математических наук, доцент Симанчев Руслан Юрьевич
Ведущая организация:	Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН

Защита состоится 17 января 2007 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета К212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при Уральском государственном университете им. А.М. Горького по адресу: 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Уральского государственного университета им. А.М. Горького.

Автореферат разослан “___” ________ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н., профессор Пименов В.Г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. При планировании развития производства, в сфере сервиса и других областях часто возникает необходимость в решении задач оптимального размещения предприятий. Во многих случаях такие задачи являются весьма сложными и требуют применения методов математического моделирования, разработки алгоритмов и программ их решения.

Задачи оптимального размещения могут быть описаны в терминах дискретной оптимизации и образуют важное направление исследований в этой области, которое включает в себя изучение структуры и вычислительной сложности задач, разработку и анализ точных и приближенных методов их решения, выделение полиномиально разрешимых случаев, построение семейств "трудных" задач для определенных алгоритмов [1, 4, 7, 19, 20, 21]. Значительное число исследований посвящено простейшей задаче размещения и различным ее обобщениям, в том числе двухуровневой задаче размещения [3, 6, 11, 13, 22].

Рассматриваемые задачи относятся к классу NP-трудных проблем дискретной оптимизации [22], вследствие чего особую важность приобретает создание специальных алгоритмов их решения. Во многих случаях для разработки таких алгоритмов используются модели и методы целочисленного программирования (ЦП). Среди известных подходов к решению указанных задач размещения выделяются метод ветвей и границ, алгоритмы отсечения, метод направленного перебора и т.д. Для решения частично целочисленных задач широкое распространение получил метод декомпозиции Бендерса [12, 17, 18, 23], который пока еще недостаточно изучен с теоретической точки зрения. В частности, актуальными являются вопросы получения оценок числа итераций, построения семейств "трудных" задач и другие. При построении отсечений Бендерса оптимальные значения двойственных переменных определяются неоднозначно, что может существенным образом повлиять на эффективность алгоритмов. Исследования в этом направлени позволяют разрабатывать способы получения более сильных отсечений [20].

Для исследования задач целочисленного программирования, разработки и анализа алгоритмов А.А. Колоколовым был предложен подход, основанный на регулярных разбиениях, наиболее изученным из которых к настоящему времени является L-разбиение [9]. С помощью L-разбиения изучается сложность решения задач ЦП и их структура, вводятся новые классы отсечений, строятся оценки числа итераций различных алгорит-

мов, исследуется устойчивость задач и алгоритмов, разрабатываются новые алгоритмы [2, 8, 10]. Указанный подход оказался достаточно эффективным и для задач оптимального размещения [7, 11].

Целью работы является исследование простейшей задачи размещения предприятий и ее обобщения - двухуровневой задачи с использованием регулярных разбиений, разработка и анализ декомпозиционных алгоритмов с отсечениями Бендерса для решения этих задач.

Методы исследования. В работе использованы теория и методы целочисленного программирования, комбинаторной оптимизации, современная методология экспериментальных исследований с применением вычислительной техники.

Научная новизна. В диссертации получили дальнейшее развитие и применение методы декомпозиции Бендерса и регулярных разбиений в дискретной оптимизации. С использованием этих подходов предложены новые варианты точных алгоритмов решения известных задач размещения предприятий, получены оценки числа итераций для ряда декомпозиционных алгоритмов, изучена L-структура простейшей задачи размещения.

Основные результаты диссертации заключаются в следующем.

1. Разработаны алгоритмы решения простейшей и двухуровневой задач размещения предприятий, основанные на декомпозиции Бендерса и переборе L-классов.

2. Построены и исследованы семейства задач размещения, на основе которых получены оценки числа итераций предложенных декомпозиционных алгоритмов и ряда алгоритмов целочисленного программирования.

3. Проведен анализ зависимости отсечений Бендерса от выбора оптимальных значений двойственных переменных, найдены оценки глубины отсечений с использованием предложенных семейств задач, указаны способы повышения эффективности алгоритмов.

4. Выполнена реализация декомпозиционных алгоритмов для простейшей и двухуровневой задач размещения предприятий, проведено их экспериментальное исследование.

Практическая ценность. Предложенные декомпозиционные алгоритмы применимы для решения прикладных задач достаточно большой размерности. Разработанные программы и тестовые задачи могут быть использованы в учебном процессе и научных исследованиях.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Меж-

дународной научно-методической конференции "Математика в вузе" (Великий Новгород, 2000), Международной конференции "XII Meeting of EURO Working Group on Location Analysis" (Барселона, 2000), конференции с международным участием "Новые технологии ж/д транспорту" (Омск, 2000), XII Международной Байкальской конференции "Методы оптимизации и их приложения" (Иркутск, 2001), Российской конференции "Дискретный анализ и исследование операций" (Новосибирск, 2004), Международной конференции "European Chapter on Combinatorial Optimization ECCO XVIII" (Минск, 2005), на научных семинарах Омского филиала Института математики им С.Л. Соболева СО РАН и Института математики и механики УрО РАН.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [24-35].

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 116 страницах и состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во *введении* обосновывается актуальность темы диссертации, кратко описываются известные классы задач размещения и методы их решения, приводятся содержание и основные результаты работы.

В *первой главе* даются различные постановки дискретных задач размещения предприятий, приводятся сведения о сложности некоторых из них, излагаются методы решения.

В п.1.1 содержатся комбинаторные и целочисленные постановки ряда задач размещения производства, при этом особое внимание уделяется простейшей задаче размещения (ПЗР) и различным ее обобщениям.

Рассматривается следующая постановка ПЗР. Дано конечное множество $I = \{1, ..., n\}$ пунктов возможного размещения предприятий, производящих некоторый продукт в неограниченном количестве, и список клиентов $J = \{1, ..., m\}$. Известны стоимости размещения предприятий c_i^0 в указанных пунктах $i \in I$ и затраты c_{ij} на удовлетворение спроса каждого клиента $j \in J$ предприятием, расположенным в пункте i. Требуется разместить предприятия и прикрепить к ним клиентов так, чтобы суммарные затраты на размещение предприятий и обслуживание клиентов были минимальны. Модель целочисленного линейного программирова-

ния (ЦЛП) для ПЗР имеет вид:

$$F(z,x) = \sum_{i\in I} c_i^0 z_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{1}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \quad z_i \geq x_{ij},\ i\in I, j\in J, \tag{2}$$

$$z_i,\ x_{ij} \in \{0,1\},\ i\in I,\ j\in J, \tag{3}$$

где $x_{ij} = 1$, если j-й клиент прикрепляется к i-му пункту и 0 – в противном случае; $z_i = 1$, если предприятие i открыто и 0 – в противном случае.

К числу задач размещения производства относятся также p–простейшая задача размещения, p–активная простейшая задача размещения, задача о p-медиане, задача размещения с ограничениями на объемы производства, двухуровневая задача размещения и др [1, 4, 6, 20].

Двухуровневая задача размещения (ДЗР) состоит в следующем. Производитель некоторого продукта стремится разместить свои предприятия в ряде пунктов таким образом, чтобы минимизировать суммарные затраты, складывающиеся из затрат c_i^0 на размещение предприятия в i-м пункте, а также затрат c_{ij} на обслуживание j-го клиента предприятием, расположенным в i-м пункте, $i\in I, j\in J$. В свою очередь каждый клиент j этого производителя выбирает один из предложенных пунктов i, в котором величина d_{ij} его затрат на обслуживание минимальна.

Обозначим $z = (z_i), x = (x_{ij}),\ i\in I,\ j\in J$. Пусть $z_i = 1$, если предприятие в i-м пункте входит в число открытых, и $z_i = 0$ в противном случае; $x_{ij} = 1$, если j-й клиент обслуживается предприятием, расположенным в i-м пункте, и $x_{ij} = 0$ в противном случае. Тогда модель целочисленного линейного программирования для ДЗР имеет вид:

$$F(z,x) = \sum_{i\in I} c_i^0 z_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{4}$$

при условиях

$$z_i \in \{0,1\}, i\in I, z \neq 0, \tag{5}$$

где x - оптимальное решение задачи:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij}x_{ij} \to \min \tag{6}$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1,\ x_{ij} \leq z_i,\ x_{ij}\in\{0,1\},\ i\in I, j\in J. \tag{7}$$

П. 1.2 посвящен вопросам вычислительной сложности задач оптимального размещения.

В п. 1.3 рассматриваются алгоритмы точного и приближенного решения задач размещения, при этом дано подробное изложение метода декомпозиции Бендерса.

Глава 2 посвящена исследованию простейшей задачи размещения.

В п. 2.1 излагается подход к анализу и решению задач ЦП, основанный на разбиениях пространства R^n на классы эквивалентности, называемые L-классами.

Пусть $x, y \in R^n$ и $x \succ y$. Будем говорить, что точки x и y *отделимы*, если найдется $z \in Z^n$, для которого $x \succeq z \succeq y$. Точка z называется *отделяющей*. Если x и y не являются отделимыми, то они считаются L-эквивалентными.

Это отношение разбивает любое множество $X \subseteq R^n$ на непересекающиеся *L-классы*. Соответствующее фактор–множество X/L называется *L-разбиением* множества X. Каждая точка $z \in X \subseteq Z^n$ образует отдельный класс, остальные классы разбиения состоят только из нецелочисленных точек и называются *дробными*.

Для частично целочисленных задач, к которым можно отнести и ПЗР, по аналогии с L-разбиением введено *L_k-разбиение* (где k - число целочисленных переменных задачи, $k \leq n$) [8]. Пусть $x \in R^n$. Обозначим x^k- вектор, составленный из первых k координат вектора x. Векторы $x, y \in R^n$ $(x^k \succ y^k)$ являются L_k-эквивалентными, если не существует отделяющей их точки $z \in Z^{n,k}$ такой, что $x^k \succeq z^k \succeq y^k$. Здесь $Z^{n,k}$- множество всех n-мерных векторов, у которых первые k координат целые.

В п. 2.2 обсуждаются вопросы, касающиеся L–структуры задач ЦП. Здесь же предлагаются оценки мощности L_k–накрытий для некоторых семейств ПЗР.

Рассмотрим лексикографический вариант модели (1)-(3). Введем переменную z_0 и ограничение

$$z_0 - \sum_{i \in I} c_i^0 z_i - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} = 0. \qquad (8)$$

Упорядочим переменные задачи, входящие в соотношения (2), следующим образом:

$$z_0, z_1, ..., z_n, x_{11}, x_{12}, ..., x_{1m}, ..., x_{n1}, x_{n2}, ...x_{nm}.$$

Соответствующий такому порядку переменных выпуклый многогранник,

заданный ограничениями (2),(8) и

$$0 \le z_i \le 1,\ x_{ij} \ge 0,\ i \in I, j \in J, \tag{9}$$

обозначим Ω. Тогда задача (1)-(3) может быть записана в лексикографической постановке:

$$\text{найти } z^* = lexmin(\Omega \cap Z^{N+1}),$$

где $N = n(m+1)$. При этом оптимальное значение переменной z_0 равно оптимальному значению F^* целевой функции $F(z,x)$ задачи (1)-(3). Важную роль при исследовании задачи и алгоритмов ее решения играет дробное накрытие:

$$\Omega_* = \{x \in \Omega : x \prec z \text{ для всех } z \in (\Omega \cap Z^{N+1})\}.$$

Известно [21], что при $c_i^0, c_{ij} \in Z,\ i \in I, j \in J$ для любых фиксированных целых $z_1, z_2, ..., z_n$ в многограннике Ω всегда найдется точка $(z_0, z_1, ..., z_n, x_{11}, x_{12}, ..., x_{1m}, ..., x_{n1}, x_{n2}, ...x_{nm})$, у которой $x_{ij} \in Z,\ i \in I$, $j \in J$. Причем значения переменных $x_{ij}, i \in I, j \in J$ легко определяются аналитически: в каждом столбце j матрицы (c_{ij}) находится элемент $c_{ij} = min\{c_{kj} :\ z_k = 1\}$. В случае, когда таких элементов несколько, выбирается любой из них. Соответствующая переменная x_{ij} полагается равной 1, остальные $x_{ij} = 0$.

Пусть $k = n+1$. Мощность множества Ω_*/L_k, называемого L_k-накрытием задачи, может оказать существенное влияние на процесс решения задачи. Поэтому представляет интерес изучение L_k-структуры множества Ω_*.

Рассмотрим задачу размещения (1)-(3), у которой $m = n \ge 3$. Введем целочисленную константу $M \ge 4$ и определим коэффициенты задачи следующим образом:

$$c_i^0 = M,\ i \in I,$$

$$C = \begin{pmatrix} M & 1 & \dots & 1 \\ 1 & M & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & M \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Теорема 2.1 Если коэффициенты простейшей задачи размещения удовлетворяют условиям (10), то справедлива оценка $(\frac{M}{2} - 2)(n-1) < |\Omega_*/L_k| < M(n-2) - (n-3)$.

Оценки, полученные в теореме 2.1 являются линейными относительно входных параметров M и n. Мощность L_k-накрытия задач этого семейства возрастает с увеличением коэффициентов целевой функции. Вместе

с тем интересно построить примеры ПЗР, мощность L_k–накрытий которых экспоненциально зависит от размерности задачи.

Рассмотрим для этого ПЗР (1)-(3), у которой $|I| = n + p, |J| = n$, где $p \geq 1, p \in Z$. Введем целочисленную константу $M \geq 5$ и определим коэффициенты задачи следующим образом:

$$c_i^0 = \begin{cases} 0, & \text{если } i \leq p, \\ M, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & ... & c_{1n} \\ . & . & . & ... & . \\ c_{p1} & c_{p2} & c_{p3} & ... & c_{pn} \\ M & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & M & 1 & ... & 1 \\ . & . & . & ... & . \\ 1 & 1 & 1 & ... & M \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $c_{ij} \geq M$, при $i = 1, ..., p, j \in J$.

Теорема 2.2 Если коэффициенты простейшей задачи размещения удовлетворяют условиям (11), то справедлива оценка $|\Omega_*/L_k| > (2^p - 1)(M - 4)(n - 2)$.

В п. 2.3 излагаются алгоритмы перебора L–классов и декомпозиции Бендерса для простейшей задачи размещения.

Алгоритм перебора L-классов основан на идее последовательного просмотра элементов L-разбиения релаксационного множества задачи в лексикографическом порядке. Суть декомпозиционного подхода заключается в разбиении исходной задачи на производственную задачу и задачу прикрепления клиентов и их последовательном решении.

При фиксированном производственном плане $\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$ получается следующая задача прикрепления клиентов $T(\hat{z})$:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \; j \in J,$$

$$0 \leq x_{ij} \leq \hat{z}_i, \; i \in I, \; j \in J.$$

Двойственная к $T(\hat{z})$ задача $D(\hat{z})$ имеет вид:

$$\sum_{j \in J} u_j - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \hat{z}_i w_{ij} \to \max$$

при условиях

$$u_j - w_{ij} \le c_{ij},\ i \in I, j \in J,$$
$$w_{ij} \ge 0,\ i \in I, j \in J.$$

Обозначим $\hat{f}(z) = f(z, x(z))$, где $x(z)$ - оптимальное решение задачи $T(z)$, $F^{(0)}$- начальное значение рекорда целевой функции задачи. Введем множество $\Gamma = \{z : \sum\limits_{i \in I} z_i \ge 1,\ 0 \le z_i \le 1, i \in I\}$ и опишем общую схему рассматриваемых нами декомпозиционных алгоритмов.

Процесс $\mathcal{D}$

Положим $\Gamma^{(1)} = \Gamma, F^{(0)} = +\infty$.

Итерация k, $k \ge 1$

Шаг 1. Ищем некоторый производственный план $z^{(k)} \in \Gamma^{(k)}$. Если такого плана не существует, то процесс завершается. План, на котором достигается рекорд $F^{(k-1)}$, является оптимальным. В противном случае переходим на шаг 2.

Шаг 2. Решая задачу прикрепления клиентов при фиксированном $z^{(k)}$, находим оптимальное решение $x^{(k)}$. Вычисляем рекорд
$F^{(k)} = \min\{\hat{f}(z^{(k)}), F^{(k-1)}\}$.

Шаг 3. Строим по некоторому правилу линейное неравенство (отсечение):

$$\gamma_1^{(k)} z_1 + \ldots + \gamma_n^{(k)} z_n \le \gamma_0^{(k)}. \tag{12}$$

Добавляем неравенство (12) к системе ограничений многогранника $\Gamma^{(k)}$ и, обозначив получившуюся область через $\Gamma^{(k+1)}$, переходим к следующей итерации (на шаг 1).

Будем предполагать, что отсечения (12) в процессе $\mathcal{D}$ обладают следующими свойствами:
a) точка $z^{(k)}$ не удовлетворяет неравенству (12),
b) отсечение (12) не исключает никакую целочисленную точку
$z' \in \Gamma^{(k)}$, для которой $\hat{f}(z') < F^{(k)}$.

Свойство "a" позволяет гарантировать конечность процесса $\mathcal{D}$, а свойство "b"– оптимальность найденного им решения. В качестве неравенств

(12) могут быть использованы отсечения Бендерса. Особенностью данного алгоритма является отсутствие целочисленной оптимизации при построении последовательности производственных планов, которые выбираются из допустимых решений производственной задачи.

В предложенных алгоритмах поиск производственных планов осуществляется с помощью алгоритма перебора L-классов либо перебором булевых векторов, также предусмотрены возможности построения отсечений по различным целым точкам, регулирования размерности матрицы ограничений производственной задачи.

В п. 2.4 приводятся оценки числа итераций некоторых декомпозиционных алгоритмов с отсечениями Бендерса.

Отсечение Бендерса для ПЗР имеет вид:

$$\sum_{i \in I}(c_i^0 - \sum_{j \in J} w_{ij}^{(k)}) z_i < F^{(k)} - \sum_{j \in J} u_j^{(k)}. \tag{13}$$

Здесь $u_j^{(k)}, w_{ij}^{(k)}$ $i \in I,\ j \in J$ - оптимальные значения переменных задачи $D(z^{(k)})$ на k-й итерации процесса $\mathcal{D}$. В общем случае оптимальное решение задачи $D(z^{(k)})$ не единственно, поэтому по точке $z^{(k)}$ может быть построено несколько различных отсечений.

В [20] введено понятие глубины отсечений, с помощью которого удобно анализировать эффективность рассматриваемых декомпозиционных алгоритмов.

Глубина отсечения - это число целочисленных точек многогранника текущей задачи целочисленного программирования, которые оно отсекает.

Рассмотрены два способа вычисления оптимальных значений двойственных переменных.

Первый способ:

$$\begin{array}{rcl} u_j^{(k)} & = & \min\{c_{ij} : i \in I_1^{(k)}\},\ j \in J, \\ w_{ij}^{(k)} & = & (u_j^{(k)} - c_{ij})^+,\ i \in I,\ j \in J. \end{array} \tag{14}$$

Второй способ:

$$\begin{array}{rcl} u_j^{(k)} & = & \min\{c_{ij} : z_i^{(k)} = 1,\ i \in I_1^{(k)} \backslash \{i_j\}\},\ j \in J, \\ w_{ij}^{(k)} & = & (u_j^{(k)} - c_{ij})^+,\ i \in I,\ j \in J, \end{array} \tag{15}$$

где $i_j = \arg\min\{c_{ij} : i \in I_1^{(k)}\},\ j \in J$. Формулы используются, если

$|I_1^{(k)}| \geq 2$. В случае, когда $|I_1^{(k)}| = 1$, оптимальные значения двойственных переменных вычисляются по формулам (14).

Обозначим через $\bar{\mathcal{D}}$ процесс $\mathcal{D}$, в котором производственные планы генерируются в порядке лексикографического возрастания, начиная с лексикографически минимального плана $z^{(1)}$ с координатами $z_1^{(1)} = 0, \ldots, z_{n-1}^{(1)} = 0, z_n^{(1)} = 1$, а отсечения (13) строятся с использованием оценок (14).

Теорема 2.4 При решении процессом $\bar{\mathcal{D}}$ простейшей задачи размещения, коэффициенты которой удовлетворяют условиям (11), будет построено не более n отсечений.

При этом глубина таких отсечений не менее, чем 2^{n-1}.

Выберем $M \geq 2$ и рассмотрим ПЗР, у которой $n = m$, а коэффициенты имеют вид :

$$c_i^0 = 1, \ i \in I,$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & M & \ldots & M \\ M & 1 & \ldots & M \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ M & M & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Обозначим $I_0 = \{i \in I : z_i = 0\}, \ I_1 = \{i \in I : z_i = 1\}$. Если отсечение (13) строится по плану $\hat{z}^{(k)}$, на котором достигается рекордное значение целевой функции, то оно будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{i \in I_0^k} (2 - M) z_i + \sum_{i \in I_1^k} z_i \leq |I_1^k| - 1.$$

Так как $2 - M \leq 0$, то оно отсекает только план $\hat{z}^{(k)}$, а значит его глубина равна 1. При $M = 3$ оно по виду напоминает вполне регулярные отсечения для задач булева программирования [9].

Рассмотрим процесс $\mathcal{D}$ решения задачи семейства (16) с использованием двойственных оценок (15). Если на плане $\hat{z}^{(k)}$ достигается рекорд целевой функции и $|I_1^{(k)}| \geq 2$, то отсечение Бендерса будет иметь следующий вид:

$$\sum_{i \in I} z_i \geq |I_1^{(k)}| + 1.$$

Очевидно, что оно отсекает все планы, у которых $|I_1| \leq |I_1^{(k)}|$.

Таким образом, установлено, что выбор оптимальных значений двойственных оценок может оказывать существенное влияние на глубину отсечений Бендерса и что глубина отсечений для ПЗР может принимать значения от 1 до α, где $\alpha \geq 2^{n-1}$.

Основные результаты главы приводятся в работах [24,25,28-30,35].

В *третьей главе* предлагаются и исследуются декомпозиционные алгоритмы для двухуровневой задачи размещения (ДЗР).

В п. 3.1 содержится краткий обзор задач двухуровнего программирования. В п. 3.2 рассмотрено сведение двухуровневой задачи размещения к одноуровневой задаче ЦЛП путем добавления линейных неравенств. В [6] показана эквивалентность ДЗР следующей одноуровневой задаче:

$$F(z,x) = \sum_{i\in I} c_i^0 z_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

при условиях

$$\begin{gathered} z_i \in \{0,1\}, i \in I, z \neq 0, \\ z_i \le x_{ij} + \sum_{k\in S_{ij}} z_k,\ i\in I, j \in J, \\ \sum_{i\in I} x_{ij} = 1,\ x_{ij} \le z_i,\ x_{ij}\in\{0,1\},\ i\in I, j\in J, \end{gathered}$$

где $S_{ij} = \{k \in I : d_{kj} < d_{ij}\},\ i\in I, j\in J$. Предполагается, что $d_{ij} \neq d_{kj}$ для всех $i \neq k, j \in J$, то есть выбор каждого потребителя однозначен. Декомпозиционные алгоритмы решения полученной одноуровневой задачи, аналогичные алгоритмам для ПЗР, предлагаются в п. 3.3.

П. 3.4 посвящен оценкам числа итераций указанных алгоритмов.

Отсечение Бендерса для одноуровневой задачи, эквивалентной ДРЗ, имеет вид:

$$\sum_{i\in I}(c_i^0 + \sum_{j\in J}(u_{ij}^{(k)} - v_{ij}^{(k)}))z_i - \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{l\in S_{ij}} z_l u_{ij}^{(k)} < F^{(k)} - \sum_{j\in J} y_j^{(k)}, \tag{17}$$

где $u_{ij}^{(k)}, v_{ij}^{(k)}, y_j^{(k)}$ - оптимальные значения двойственных переменных на k-й итерации процесса $\mathcal{D}$.

Рассматривается следующий способ вычисления оптимальных значений двойственных переменных:

$$\begin{aligned} y_j^{(k)} &= \min\nolimits_{i\in I} c_{ij},\ j\in J, \\ u_{ij}^{(k)} &= \begin{cases} c_{ij} - y_j^{(k)}, & \text{если } x_{ij} = 1, \\ 0, & \text{иначе},\ i\in I, j\in J, \end{cases} \\ v_{ij}^{(k)} &= 0,\ i\in I, j\in J. \end{aligned} \tag{18}$$

Пусть $M \geq 2$, $n = m$, коэффициенты ДЗР c_i^0, c_{ij} $i\in I,\ j\in J$ удовлетворяют условиям (11), а матрица D произвольна.

При решении такой задачи процессом $\mathcal{D}$, в котором производственные планы генерируются в порядке лексикографического возрастания,

начиная с лексикографически минимального плана $z^{(1)}$ с координатами $z_1^{(1)} = 0, \dots, z_{n-1}^{(1)} = 0, z_n^{(1)} = 1$, а отсечения (17) строятся с использованием оценок (18), будет построено не более n отсечений.

Пусть $m = n$ и $M \geq 2$, коэффициенты ДЗР c_i^0, c_{ij} $i \in I,$ $j \in J$ удовлетворяют условиям (16), а матрица D имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & 2 & 2 \\ 3 & 1 & ... & 3 & 3 \\ . & . & ... & . & . \\ n & n & ... & 1 & n \\ n+1 & n+1 & ... & n+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда в процессе $\mathcal{D}$ решения любой задачи такого семейства среди отсечений имеется определенное число отсечений глубины 1.

Таким образом, установлено, что глубина отсечений Бендерса для ДЗР также может изменяться от 1 до α, где $\alpha \geq 2^{n-1}$.

Основные результаты главы приводятся в работах [26, 27, 31, 34].

Четвертая глава посвящена экспериментальному исследованию описанных декомпозиционных алгоритмов. Целью вычислительного эксперимента являлось исследование различных вариантов декомпозиционных алгоритмов, изучение их поведения на некоторых семействах задач, сравнение данных алгоритмов между собой и с другими известными алгоритмами.

В п. 4.1 приводятся результаты вычислительного эксперимента для простейшей задачи размещения.

Исследовалась зависимость числа итераций алгоритмов от способа выбора оптимальных значений двойственных переменных, используемых при построении отсечений, правил выбора целочисленных точек, по которым строятся отсечения Бендерса, числа сохраняемых отсечений, упорядочения переменных, предварительного применения эвристических алгоритмов. Исследования проводились на тестовых задачах из электронной библиотеки Института математики СО РАН размерности до $n = m = 150$ и электронной библиотеки OR-Library [13] размерности до $n = 25, m = 50$, на задачах из семейств ПЗР, описанных в главе 2, в том числе обладающих мощными дробными накрытиями, с размерностью до $n = m = 100$, а также на задачах со случайными данными. Выполнено экспериментальное сравнение различных вариантов предлагаемых алгоритмов между собой, а также с известным пакетом CPLEX 6.5. На тестовых задачах из библиотеки ИМ СО РАН декомпозиционные

алгоритмы показали существенное преимущество по времени решения по сравнению с указанным пакетом.

В п. 4.2 исследуются разработанные нами декомпозиционные алгоритмы решения двухуровневой задачи размещения. Эксперимент проводился на случайно сгенерированных задачах размерности $n = m = 30$ и на задачах из семейств ДЗР, описанных в главе 3, размерности $n = m = 50$. Исследовалась зависимость числа итераций алгоритмов от числа сохраняемых отсечений, предварительного применения эвристических алгоритмов и других параметров.

Проведенный эксперимент позволил сделать ряд выводов, в частности:

1) построение отсечений по всем порождаемым "перспективным" производственным планам часто дает лучший результат по сравнению с использованием для этих целей только "улучшающих" планов;

2) время решения задачи декомпозиционными алгоритмами существенным образом зависит от способа упорядочения переменных;

3) необходимо регулировать количество сохраняемых отсечений в системе ограничений производственной задачи, так как оно влияет на число итераций алгоритмов;

4) каждый из рассмотренных вариантов выбора оптимальных значений двойственных переменных имеет преимущество на конкретных задачах, поэтому представляется разумным комбинировать эти способы.

Основные результаты главы приводятся в работе [33].

В целом полученные результаты указывают на эффективность применения декомпозиционного подхода к решению простейшей и двухуровневой задач размещения и необходимость дальнейшей разработки основанных на нем алгоритмов.

Список используемой литературы

[1] Агеев А.А. *Точные и приближенные алгоритмы для задач размещения: обзор последних достижений* // Материалы конференции.– Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1998.– С.4-10.

[2] Адельшин А.В. *Исследование задач максимальной и минимальной выполнимости с использованием L-разбиения* // Автоматика и телемеханика.– 2004.–N 3.– С.35-42.

[3] Бахтин А.Е., Колоколов А.А., Коробкова З.В. *Дискретные задачи производственно–транспортного типа.* – Новосибирск: Наука, 1978.

[4] Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. *Экстремальные задачи стандартизации.* – Новосибирск, 1978.

[5] Гермейер Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами.* – Моск-

ва: Наука, 1976.

[6] Горбачевская Л.Е., Дементьев В.Т., Шамардин Ю.В. *Двухуровневая экстремальная задача выбора номенклатуры изделий*: Препринт.– Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997.

[7] Заблоцкая О.А. *L–разбиение многогранника стандартизации* // Моделирование и оптимизация систем сложной структуры: Межвуз. сб. научн. труд.– Омск: ОмГУ, 1987.– С.151-154.

[8] Колоколов А.А. *Построение алгоритмов целочисленного программирования на основе L_k– разбиений* // Тез. докл. конф. "Математическое программирование и приложения".– Свердловск, 1991.– С.86.

[9] Колоколов А.А. *Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании.* // Сиб. журнал исслед. операций. – Новосибирск, 1994. – Т.1, N 2. – С.18-39.

[10] Колоколов А.А., Девятерикова М.В. *Анализ устойчивости некоторых алгоритмов дискретной оптимизации* // Автоматика и телемеханика, 2004.– N 3.– С.48-54.

[11] Колоколов А.А., Леванова Т.В. *Задачи оптимального размещения предприятий и метод декомпозиции Бендерса* : Учебно-методическое пособие.– Омск: ОмГУ, 2004.

[12] Сергиенко И.В. *Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации.*– Киев: Наук. дум., 1988.

[13] Beasley J.E. *An algorithm for solving large capacitated warehouse location problems* // Europ. J. of Oper. Res., 1988.– N 33.– P.314-325.

[14] Ben-Ayed O. *Bilevel linear programming* // Comput. Oper. Res., 1993.– V. 20, N 5.– P.485-501.

[15] Benders J. F. *Partitioning procedures for solving of mixed–variables programming problems* // Numer. Math., 1962.– V 4, N 3.– P.238-252.

[17] Dudas T., Klinz B., Woeginger G.J. *The computational complexity of multi-level programming problems revisited* // Reports from the Optimization Group at the TU Graz., 1995.–N 49.

[17] Gascon V., Benchakroun A., Ferland J. *Benders decomposition for network design problems with underlying tree structure* // Investigacion Operativa, 1997.–N 6.– P.165-180.

[18] Hooker J.N., Ottosson G. *Logic-based Benders decomposition* // Mathematical Programming Series A., 2003.–V.96, N 1.– P.33-60.

[19] Kolokolov A.A. *Decomposition algorithms for solving of some production–transportation problems* // Triennal Symposium on Transportation Analysis II. Preprints.– Capri, 1994.–V.1.– P. 179-183.

[20] Kolokolov A.A., Kosarev N.A. *Analysis of decomposition algorithms with Benders cuts for p-median problem* // Journal of Mathematical Modelling and Algorithms, 2006.– N 5.–P. 189-199.

[21] Krarup J. *Fixed–cost and other network flow problems* // Ph. D. thesis.- IMSOR, Technical University of Denmark, 1967.

[22] Krarup J., Pruzan P.M. *The simple plant location problem: survay and synthesis* // European J. Oper. Res., 1983.– V.12, N 1.– P. 36-81.

[23] Randazzo D., Luna H.P.L., Mahey P. *Benders decomposition for local access network design with two technologies* // Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2001.–N 4.– P.235-246.

Работы автора по теме диссертации

[24] Колоколов А.А., Косарев Н.А., Рубанова Н.А. *Исследование отсечений Бендерса в декомп. алгоритмах решения некоторых задач размещения* // Омский научный вестник, 2005. –N 2. – С.76-80.

[25] Колоколов А.А., Рубанова Н.А. *Об одном декомпозиционном методе решения двухуровневой задачи стандартизации* // Сб. научных трудов конф. с межд. участием "Новые технологии ж/д транспорту".– Омск: ОмГУПС,2000.– С.121-124.

[26] Колоколов А.А., Рубанова Н.А. *Декомпозиционный метод решения двухуровневой задачи стандартизации* // Матер. межд. конф. "Математика в вузе".– Вел. Новгород, 2000.– С.142-143.

[27] Колоколов А.А., Рубанова Н.А. *Об одном декомпозиционном алгоритме решения двухуровневой задачи размещения* // Труды XII международной Байкальской конференции "Методы оптимизации и их приложения". – Иркутск, Байкал, 2001.– Т.1.– С.207-210.

[28] Рубанова Н.А. *О мощности L-накрытий простейшей задачи размещения* // Матер. Российской конф. "Дискретный анализ и исследование операций".– Новосибирск, 2002.– С.215.

[29] Косарев Н.А., Рубанова Н.А. *Об отсечениях Бендерса для некоторых задач размещения предприятий* // Матер. Российской конференции "Дискретный анализ и исследование операций".– Новосибирск, 2004.- С.164.

[30] Рубанова Н.А. *Анализ простейшей задачи размещения предприятий с использованием L_k-разбиения* // Вестник Омского университета.– Омск: ОмГУ, 2003. – N 1. – С.15-17.

[31] Рубанова Н.А. *О числе итераций алгоритма Бендерса для двухуровневой задачи размещения предприятий* // Матер. V Междунар. науч.-техн. конф. "Динамика систем, механизмов и машин".– Омск, 2004.–

кн. 2.– С.329.

[32] Рубанова Н.А. *Исследование декомпозиционных алгоритмов решения некоторых задач размещения* // Матер. III Всероссийской конф. "Проблемы оптимизации и экономические приложения".– Омск, 2006.– С.119.

[33] Рубанова Н.А. *Экспериментальное исследование алгоритмов декомпозиции Бендерса для некоторых задач размещения*: Препринт.– Омск: ОмГУПС, 2006.

[34] Kolokolov A.A., Eremeev A.V., Rubanova N.A. *Decomposition and L-class enumeration algorithms for solving of some bilevel plant location problems* // XII Meeting of EURO Working Group on Location Analysis. Abstracts.– Barselona, 2000.– P.8.

[35] Kolokolov A.A., Kosarev N.A., Rubanova N.A. *On iterations number of Benders decomposition algorithms for some facility location problems* // In Proceedings of European Chapter on Combinatorial optimization ECCO-18.– Minsk, 2005.– P.27.