На правах рукописи
УДК 517.929

Нидченко Сергей Николаевич

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2007

Работа выполнена на кафедре теоретической механики Уральского государственного университета им. А.М. Горького

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Долгий Ю.Ф.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
Лукоянов Н.Ю.

доктор физико-математических наук,
профессор Симонов П.М.

Ведущая организация:

Магнитогорский государственный университет, г. Магнитогорск.

Защита состоится " 17 " января 2007 г. в ____ ч. ____ мин. на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при Уральском государственном университете им. А.М. Горького по адресу:
620083, г.Екатеринбург, просп. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета им. А.М. Горького.

Автореферат разослан " " декабря 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических
наук, профессор ______________________ В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория нелинейных периодических колебаний дифференциальных уравнений с запаздыванием активно используется при качественном исследовании конкретных математических моделей, учитывающих наследственные свойства динамических процессов. В ходе своего развития она использовала идеи и методы теории нелинейных колебаний для обыкновенных дифференциальных уравнений. Основы метода Ляпунова – Пуанкаре для систем с последействием заложены в работах Н.Н. Красовского, A. Halanay, С.Н. Шиманова, Ю.А. Рябова, А.Ф. Клейменова, Л.Э. Эльсгольца, К.М. Цойя, Л.З. Фишмана. Асимптотический метод для систем с запаздыванием разрабатывался в работах Ю.А. Митропольского, В.П. Рубаника, В.И. Фодчука, A. Halanay, Д.И. Мартынюка, А.М. Самойленко, В.С. Сергеева и других авторов. Метод Андронова – Хопфа использовался при нахождении периодических решений в работах J.K. Hale, S. Chow, J. Mallet-Paret, Ю.С. Колесова, Д.И. Швитра, Н.Д. Казаринова, Y.H. Wan, P. van den Driessche, N. Chafee, J.R. Claeyssen, D. Schley. Топологические методы применялись в работах М.А. Красносельского, В.В. Стрыгина, Б.Н. Садовского, Ю.Г. Борисовича, В.Ф. Субботина, Р.Р. Ахмерова. Периодические релаксационные колебания в системах с запаздыванием изучались в работах Ю.С. Колесова, С.А. Кащенко, В.И. Фодчука, А. Холматова. Периодические колебания в системах с малым запаздыванием исследовались в работах В.И. Рожкова, А.М. Родионова. Разрабатывались специальные методы нахождения периодических решений, учитывающие индивидуальные особенности рассматриваемого дифференциального уравнения с запаздыванием (E.M. Wright, G. Jones, R. Nussbaum, R.B. Grafton, J.L. Kaplan, J.A. Yorke, H. Walther). Предложенные методы исследования периодических колебаний активно используются при качественном исследовании поведения конкретных математических моделей (G.E. Hutchinson, D. Stirzaker, R. May, В.Г. Бабский, А.Д. Мышкис, С.А. Кащенко, K. Gopalsamy, Г.И. Марчук, В. Вольтерра, Ю.С. Колесов, В.В. Майоров, И.Ю. Мышкин, А.Д. Дроздов, В.Б. Колмановский, W. Wang, S. Ruan, Ю.Н. Смолин). Устойчивость решений периодических систем дифференциальных уравнений изучалась в работах В.Б. Колмановского, В.Р. Носова, Н.Н. Красовского, Дж. Хейла, А.М. Зверкина, С.Н. Шиманова, A. Halanay, W. Hahn, B.A. Stakes, Н.В. Азбелева, П.М. Симонова, А.Ф. Клейменова, Ю.Н. Смолина, Е.Л. Тонкова, Ю.Ф. Долгого, В.Г. Курбатова, Д.Я. Хусаинова, В.В. Малыгиной, В.А. Тышкевича, Л.М. Березанского, А.В. Захарова, С.Г. Николаева, Г.Л. Гасилова, А.В. Кима, А.Л. Скубачевского, Х.О. Вальтера, J.L. Kaplan, J.A. Yorke, P. Dormayer, А.Ф. Иванова, B. Lani-Vayda и других авторов.

Цель работы. Изучение устойчивости периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием и получение достаточных условий устойчивости этих решений.

Методика исследования. Используются методы теории нелинейных колебаний. Для нахождения асимптотик периодических решений при малых значениях параметра использовался метод Ляпунова. При изучении устойчивости периодических решений – методы подсчета характеристических показателей Шиманова. При оценке расположения спектра оператора монодромии используются специальные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. При реализации бифуркационного подхода к исследованию движения собственных чисел краевой задачи по комплексной плоскости используются методы и результаты теории возмущений и теории краевых задач.

Научная новизна. Результаты, представленные в диссертации, являются новыми и позволяют использовать бифуркационный подход в вопросах исследования на устойчивость периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием. Предложена новая модификация метода вспомогательных систем Шиманова при построении уравнений разветвления в бифуркации Андронова-Хопфа для дифференциального уравнения с запаздыванием; получены достаточные условия рождения периодического решения из положения равновесия; найден коэффициентный признак устойчивости периодического решения с малой амплитудой; для нелинейного дифференциального уравнения с запаздыванием получены условия устойчивости и неустойчивости антисимметрических и симметрических периодических решений с конечными амплитудами; для дифференциальных уравнений с симметриями теоретически обосновано применение бифуркационного метода исследования устойчивости; предложены алгоритмы численного моделирования устойчивых периодических решений.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на

– 31-й Региональной молодежной школе-конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики". (Екатеринбург, 2000);

– XXV Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (Москва, 2003);

– Всероссийской конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач"(Екатеринбург, 2004);

– VIII Международном семинаре "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"(Москва, 2004);

– научных семинарах кафедры теоретической механики в Уральском государственном университете.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–11].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Нумерация параграфов в работе двойная: первый индекс – номер главы, второй индекс – порядковый номер параграфа внутри главы. Нумерация формул и утверждений также двойная: первый индекс – номер главы, второй индекс – порядковый номер формулы (утверждения) внутри главы. Общий объем диссертации 111 страниц, библиография содержит 139 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении сделан краткий обзор литературы по теме диссертации, обоснована актуальность исследуемой проблемы и изложены основные результаты данной работы.

Глава 1 посвящена изучению бифуркации рождения периодического решения из положения равновесия. Рассматривается скалярное дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(x(t), x(t-1), \varepsilon), \tag{1}$$

где X — вещественная функция вещественных аргументов, непрерывная по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по первому и второму аргументам в малой окрестности точки $(0,0,0)^\top$, $\top$ — знак транспонирования, $X(x, x_{-1}, \varepsilon) \equiv 0$ при $x = x_{-1} = 0$, $\partial X(0,0,0)/\partial x = 0$, $\partial X(0,0,0)/\partial x_{-1} = -\pi/2$, ε — малый параметр.

В параграфе 1.1 приводится постановка задачи нахождения периодических решений уравнения (1). Исходное уравнение представляется в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\pi}{2} x(t-1) + f(x(t), x(t-1), \varepsilon), \tag{2}$$

где f — непрерывная по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по первому и второму аргументам функция в малой окрестности точки $(0,0,0)^\top$, $f(x, x_{-1}, \varepsilon) = a(\varepsilon)x + b(\varepsilon)x_{-1} + o\left(\left(x^2 + x_{-1}^2\right)^{1/2}\right)$, a и b — непрерывные функции в малой окрестности нуля, $a(0) = b(0) = 0$.

Соответствующее (2) порождающее уравнение $dx(t)/dt = -(\pi/2)x(t-1)$ имеет однопараметрическое семейство периодических решений $x_0(t,\gamma) = \gamma\cos(\pi t/2)$, $\gamma, t \in \mathbb{R}$. Метод Д-разбиения[1] показывает, что эти 4 - периодические решения устойчивы.

Ставится задача найти периодические решения $x(t,\varepsilon)$, $t \in \mathbb{R}$, уравнения (2) в малой окрестности нулевого положения равновесия, с периодом $\omega(\varepsilon) = 4(1+\alpha(\varepsilon))$, отвечающие порождающим периодическим решениям $x_0(t,\gamma(\varepsilon))$, $t \in \mathbb{R}$. Здесь α и γ — вещественные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $\alpha(0) = 0$, $\gamma(0) = 0$.

Проведем в дифференциальном уравнении с запаздыванием (2) замены переменных: $t = (1+\alpha)s$, $x((1+\alpha)s) = \xi(s)$, $x(t-1) = x((1+\alpha)s-1) = \xi(s-1/(1+\alpha))$, $s \in \mathbb{R}$, α — малый параметр. Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{d\xi(s)}{ds} = -\frac{\pi}{2}\xi(s-1) + F\left(\xi(s), \xi(s-1), \xi\left(s - \frac{1}{1+\alpha}\right), \varepsilon, \alpha\right), \qquad (3)$$

где $F(x_1, x_2, x_3, \varepsilon, \alpha) = (\pi/2)(x_2 - (1+\alpha)x_3) + (1+\alpha)f(x_1, x_3, \varepsilon)$.

Проведенные преобразования позволили свести задачу нахождения периодических решений исходного уравнения в малой окрестности нулевого положения равновесия, с периодом $\omega(\varepsilon) = 4(1+\alpha(\varepsilon))$ зависящим от параметра ε, к задаче нахождения 4-периодических решений уравнения (3) в малой окрестности нулевого положения равновесия этого уравнения. Для решение последней задачи используем методику предложенную, в работах[2, 3], где для построения уравнений разветвления используется специальное интегральное уравнение.

В параграфе 1.2 предлагается метод построения функции Грина. Рассматриваем задачу нахождения 4-периодических решений дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\frac{d\xi(s)}{ds} = -\frac{\pi}{2}\xi(s-1) + g(s), \qquad (4)$$

где g — непрерывная 4-периодическая функция. Введя обозначения $\xi(i+\vartheta) = y_i(\vartheta)$, $g(i+\vartheta) = g_i(\vartheta)$, $i = \overline{1,4}$, $\vartheta \in [-1,0]$, и используя метод, предложенный в работе[4], задачу нахождения 4-периодических реше-

[1] *Долгий Ю.Ф.* Автоматическое регулирование. Свердловск:Изд-во УрГУ. 1987. 100 с.

[2] *Долгий Ю.Ф.* Метод вспомогательных систем Шиманова в задачах построения уравнений разветвления//Известия Уральского государственного университета. 2003. № 26. (Математика и механика. Вып. 5.) С. 55–65.

[3] *Долгий Ю.Ф.* Метод вспомогательных систем Шиманова в задачах периодических колебаний автономных систем//Тезисы докладов VII международного семинара "Устойчивость и колебания нелинейных систем уравнений". Москва. 2002. С. 24–26.

[4] *Зубов В. И.* Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судпромгиз. 1962. 631 с.

ний уравнения с запаздыванием сводим к определению решений следующей краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{d\vartheta} = Ay + \tilde{g}(\vartheta),$$

$$y(-1) = Sy(0),$$

где $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^\top$, $\tilde{g}(\vartheta) = (g_1(\vartheta), g_2(\vartheta), g_3(\vartheta), g_4(\vartheta))^\top$, $\vartheta \in [-1, 0]$, $A = (-\pi/2)S$, $S = \{\{0,1,0,0\}^\top, \{0,0,1,0\}^\top, \{0,0,0,1\}^\top, \{1,0,0,0\}^\top\}$. К этой краевой задаче применяется метод вспомогательных систем Шиманова[5]. Строится функция Грина вспомогательной краевой задачи

$$\frac{dy}{d\vartheta} = Ay + \tilde{\tilde{g}}(\vartheta), \tag{5}$$

$$y(-1) = Sy(0), \tag{6}$$

где $\tilde{\tilde{g}}(\vartheta) = \tilde{g}(\vartheta) - \Phi(\vartheta)W$, $W = \int_{-1}^{0} \Psi^\top(z)\tilde{g}(z)dz$, $\Phi(\vartheta) = 2Y(\vartheta)D$, $\vartheta \in [-1, 0]$, Y — нормированная в нуле фундаментальная матрица однородной системы дифференциальных уравнений (5), $D = \{d^1, d^2\}$, $d^1 = (0, -1/2, 0, 1/2)^\top$, $d^2 = (-1/2, 0, 1/2, 0)^\top$. Здесь Ψ — матрица, столбцы которой являются линейно независимыми 4-периодическими решениями системы $dy/ds = -A^\top y$.

Используя связь решений краевой задачи (5), (6) с периодическими решениями дифференциального уравнения с запаздыванием (4), находим условия существования периодического решения уравнения (4)

$$W_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) g(\eta)d\eta = 0, \; W_2 = -\frac{1}{2}\int\limits_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) g(\eta)d\eta = 0,$$

и его представление

$$\xi(s) = \gamma\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \int\limits_0^4 \hat{G}(s,z)g(z)dz, s \in [0,4],$$

где функция $\hat{G}$ называется функцией Грина периодической задачи для дифференциального уравнения с запаздыванием (4).

В параграфе 1.3 рассматривается вопрос существования решения специального интегрального уравнения

$$\xi(s) = \gamma\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \int\limits_0^4 \hat{G}(s,z)F(\xi(z), \xi(h_1(z)), \xi(h_2(z,\alpha)), \varepsilon, \alpha)dz, \tag{7}$$

[5] *Шиманов С.Н.* К теории квазигармонических колебаний//Прикладная математика и механика. 1952. Т. 16, Вып. 2. С. 129–146.

где $s \in [0,4]$,

$$h_1(z) = \begin{cases} z+3,\ z \in [0,1), \\ z-1,\ z \in [1,4], \end{cases} \quad h_2(z,\alpha) = \begin{cases} z + \frac{3+4\alpha}{1+\alpha},\ z \in \left[0, \frac{1}{1+\alpha}\right), \\ z - \frac{1}{1+\alpha},\ z \in \left[\frac{1}{1+\alpha}, 4\right]. \end{cases}$$

Для фиксированного малого по величине γ введем в $C[0,4]$ множество $\Omega_\Delta = \{\xi : ||\xi - \varphi||_c \le \Delta,\ \xi \in \Omega,\ \Delta < 1\}$, где $\varphi(s) = \gamma\cos(\pi s/2)$, $s \in [0,4]$.

Утверждение 1.1. *Пусть f — непрерывная по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по первому и второму аргументам функция в малой окрестности точки $(0,0,0)^\top$, $f(x, x_{-1}, \varepsilon) = a(\varepsilon)x + b(\varepsilon)x_{-1} + o\big((x^2 + x_{-1}^2)^{1/2}\big)$, a и b — непрерывные функции в малой окрестности нуля, $a(0) = b(0) = 0$. Тогда существуют такие числа $\hat\alpha > 0$, $\hat\gamma > 0$, $\Delta > 0$, $\hat\varepsilon > 0$, что при $|\alpha| < \hat\alpha$, $|\gamma| < \hat\gamma$, $|\varepsilon| < \hat\varepsilon$ в области Ω_Δ интегральное уравнение (7) имеет единственное решение $\xi(s,\gamma,\varepsilon,\alpha)$, $s \in [0,4]$ непрерывно зависящее от параметров.*

В параграфе 1.4 изучается вопрос разрешимости системы уравнений разветвления. Если для найденного решения $\xi(s,\gamma,\varepsilon,\alpha)$, $s \in [0,4]$, $|\alpha| < \hat\alpha$, $|\gamma| < \hat\gamma$, $|\varepsilon| < \hat\varepsilon$, интегрального уравнения (7) выполняются равенства

$$\tilde W_1(\gamma,\varepsilon,\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\ \Big[\frac{\pi}{2}\tilde\xi(h_1(z),\gamma,\varepsilon,\alpha) - \frac{\pi}{2}(1+\alpha)\tilde\xi(h_2(z,\alpha),\gamma,\varepsilon,\alpha) +$$

$$(1+\alpha)\tilde f(\tilde\xi(z,\gamma,\varepsilon,\alpha), \tilde\xi(h_2(z,\alpha),\gamma,\varepsilon,\alpha),\gamma,\varepsilon)\Big]dz = 0,$$

$$\tilde W_2(\gamma,\varepsilon,\alpha) = -\frac{1}{2}\int_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\ \Big[\frac{\pi}{2}\tilde\xi(h_1(z),\gamma,\varepsilon,\alpha) - \frac{\pi}{2}(1+\alpha)\tilde\xi(h_2(z,\alpha),\gamma,\varepsilon,\alpha) +$$

$$(1+\alpha)\tilde f(\tilde\xi(z,\gamma,\varepsilon,\alpha), \tilde\xi(h_2(z,\alpha),\gamma,\varepsilon,\alpha),\gamma,\varepsilon)\Big]dz = 0, \tag{8}$$

то это решение совпадает на отрезке $[0,4]$ с периодическим решением дифференциального уравнения с запаздыванием. Здесь $f(\gamma\tilde\xi(z), \gamma\tilde\xi(h_2(z,\alpha)),\varepsilon) = \gamma\tilde f(\tilde\xi(z), \tilde\xi(h_2(z,\alpha)),\gamma,\varepsilon)$, $\tilde f$ — непрерывная по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по первому и второму аргументам функция, $\xi(s,\gamma,\varepsilon,\alpha) = \gamma\tilde\xi(s,\gamma,\varepsilon,\alpha)$, $s \in [0,4]$, $|\alpha| < \hat\alpha$, $|\gamma| < \hat\gamma$, $|\varepsilon| < \hat\varepsilon$, $\tilde f(\tilde x, \tilde x_{-1},\gamma,\varepsilon) = a(\varepsilon)\tilde x + b(\varepsilon)\tilde x_{-1} + o(\gamma)$, $|\gamma| < \hat\gamma$.

Утверждение 1.2. *Пусть выполняются условия утверждения 1.1, функция f — непрерывно дифференцируема по ε в малой окрестности точки $(0,0,0)^\top$ и $\pi b'(0) \ne 2a'(0)$. Тогда существует такое $\gamma^* > 0$, что при*

$|\gamma| < \gamma^*$ система уравнений разветвления (8) допускает единственное непрерывное решение $\alpha = \alpha(\gamma)$, $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$, $|\gamma| < \gamma^*$, $\alpha(0) = \varepsilon(0) = 0$.

В параграфе 1.5 находится асимптотическое представление искомого решения дифференциального уравнения с запаздыванием. Потребуем дополнительную гладкость функции f, гарантирующую существование представления функции f в виде асимптотического разложения

$$f(x, x_{-1}, \varepsilon) = a(\varepsilon)x + b(\varepsilon)x_{-1} + c_1(\varepsilon)x^2 + 2c_2(\varepsilon)xx_{-1} + c_3(\varepsilon)x_{-1}^2 + l_1(\varepsilon)x^3 +$$

$$l_2(\varepsilon)x^2x_{-1} + l_3(\varepsilon)xx_{-1}^2 + l_4(\varepsilon)x_{-1}^3 + v_1(\varepsilon)x^4 + v_2(\varepsilon)x^3x_{-1} +$$

$$v_3(\varepsilon)x^2x_1^2 + v_4(\varepsilon)xx_{-1}^3 + v_5(\varepsilon)y^4 + o\left(\left(x^2 + x_{-1}^2\right)^2\right),$$

где $a(\varepsilon) = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$, $b(\varepsilon) = b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$, $c_i(\varepsilon) = c_i^0 + c_i^1\varepsilon + c_i^2\varepsilon^2 + $ $+ o\left(\varepsilon^2\right)$, $i = \overline{1,3}$, $l_j(\varepsilon) = l_j^0 + l_j^1\varepsilon + o(\varepsilon)$, $j = \overline{1,4}$, $v_k(\varepsilon) = v_k^0 + O(\varepsilon)$, $k = \overline{1,5}$, $|\varepsilon| < \varepsilon^*$. Это условие позволяет найти решение системы уравнений разветвления (8) в форме асимптотических разложений $\alpha(\gamma) = \alpha_2\gamma^2 + o(\gamma^3)$, $\varepsilon(\gamma) = \varepsilon_2\gamma^2 + o(\gamma^3)$, $|\gamma| < \gamma^*$, а также асимптотическое представление решения специального интегрального уравнения (7). Далее в параграфе, при выполнении условия $\varepsilon_2 \neq 0$, найдено асимптотическое представление периодического решения $\tilde{x}(t, \varepsilon)$, $t \in [0, 4]$, дифференциального уравнения с запаздыванием (2) для малых значений ε, удовлетворяющих неравенству $0 < \varepsilon/\varepsilon_2$. При $\varepsilon/\varepsilon_2 < 0$ уравнение (2) не имеет периодических решений.

В параграфе 1.6 исследуется на устойчивость полученное периодическое решение. Для этого используется уравнение линейного приближения для возмущенного решения. При $\gamma = 0$ уравнение линейного приближения имеет двукратный характеристический показатель $\lambda = i\pi/2$. Остальные характеристические показатели имеют отрицательные действительные части. При возрастании γ двукратный характеристический показатель распадается на два. Причем один из них будет равен $\lambda = i\pi/2$.

Для нахождения зависимости второго характеристического показателя от γ использовалась методика работы[6], что позволило найти асимптотическое представление ненулевого характеристического показателя $\lambda(\gamma) = i\pi/2 + \lambda_2\gamma^2 + o(\gamma^2)$, $0 \leq \gamma < \gamma^*$. В результате, построенное периодическое решение уравнения с запаздыванием (2) будет устойчивым при $\lambda_2 < 0$ и неустойчивым при $\lambda_2 > 0$.

[6] *Шиманов С.Н.* Об отыскание характеристических показателей систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами// Прикладная математика и механика. 1958. Т. 22, Вып. 3. С. 382–385.

В параграфе 1.7 полученные теоретические результаты используются для нахождения периодических решений конкретных дифференциальных уравнений с запаздыванием, а также при получении достаточных условий их устойчивости.

Глава 2 посвящена изучению вопросов устойчивости антисимметрических периодических решений $x(t+2\tau) = -x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, скалярного дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = -f(x(t-\tau)), \tag{9}$$

где f — нечетная непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной на интервале $(-\gamma, \gamma)$, $\gamma > 0$. В главе удалось показать возможность существования нескольких изолированных антисимметрических периодических решений уравнения (9). Получены достаточные условия устойчивости таких периодических решений.

В параграфе 2.1 задачу нахождения антисимметрического периодического решения дифференциального уравнения с запаздыванием (9) сводим к определению решения специальной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \dot{x_1} = f(x_2), \dot{x_2} = -f(x_1), \\ x_1(\tau) = x_2(0), x_2(\tau) = -x_1(0). \end{gathered} \tag{10}$$

Система (10) продолжается с отрезка $[0, \tau]$ на всю числовую ось и имеет первый интеграл

$$F(x_1) + F(x_2) = C = const,\, x_1, x_2 \in (-\gamma, \gamma), \tag{11}$$

где $F(x) = \int_0^x f(z)\,dz$, $x \in (-\gamma, \gamma)$. Формула (11) определяет расположение интегральных кривых системы (10) на фазовой плоскости. Специальным начальным условиям $x_1(0, \mu) = 0$, $x_2(0, \mu) = \mu$, соответствуют замкнутые интегральные кривые, порождающие периодические движения $\{x_1(t, \mu),\, x_2(t, \mu)\}$, $t \in \mathbb{R}$, при $0 < \mu < \gamma$. Периоды T решений системы (10) зависят от μ. Наличие семейства периодических решений системы (10) позволяет сформулировать следующее утверждение:

Утверждение 2.1. *Пусть f — нечетная непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной на интервале $(-\gamma, \gamma)$. Тогда для существования периодического решения дифференциального уравнения с запаздыванием (9), удовлетворяющего условию антисимметричности, необходимо и достаточно, чтобы число 4τ принадлежало интервалу $(\inf\limits_{0<\mu<\gamma} T(\mu), \sup\limits_{0<\mu<\gamma} T(\mu))$. Этот интервал дополняется точкой $t =$*

$= \inf\limits_{0<\mu<\gamma} T(\mu)$ $(t = \sup\limits_{0<\mu<\gamma} T(\mu))$, *если* $\inf\limits_{0<\mu<\gamma} T(\mu) = T(\mu_1)$ $(\sup\limits_{0<\mu<\gamma} T(\mu) = T(\mu_2))$ *для некоторого* $\mu_1 \in (0,\gamma)$ $(\mu_2 \in (0,\gamma))$.

Согласно этому утверждению каждому корню уравнения $T(\mu) = 4\tau$ соответствует антисимметрическое периодическое решение уравнения с запаздыванием. Причем, периодическое решение будет единственным, если функция T монотонна.

В параграфе 2.2, при исследовании устойчивости антисимметрического периодического решения $x(t,\mu^*)$, $t \in \mathbb{R}$, $T(\mu^*) = 4\tau$, дифференциального уравнения с запаздыванием (9) рассматривается уравнение линейного приближения

$$\frac{dy(t)}{dt} = -f'\left(x\left(t - \frac{T(\mu^*)}{4}, \mu^*\right)\right) y\left(t - \frac{T(\mu^*)}{4}\right) \tag{12}$$

для уравнения возмущенного движения.

Устойчивость дифференциального уравнения с запаздыванием и периодическим коэффициентом (12) зависит от расположения собственных чисел оператора монодромии[7]. Существует собственное число оператора монодромии $\rho = -1$. Следовательно, имеет место критический случай устойчивости. Поэтому, для нахождения условия устойчивости периодического решения используется аналогом теоремы Андронова-Витта для систем с запаздыванием. Согласно этой теореме, для устойчивости периодического решения уравнения (9) достаточно, чтобы все собственные числа оператора монодромии, кроме одного, по модулю были меньше единицы и собственное число с модулем равным единице было простым[8]. Но поиск собственных чисел является очень сложной задачей. Для упрощения этой задачи предлагается использовать бифуркационный подход.

Для исследования поведения собственных чисел оператора монодромии расфиксируем параметр μ в дифференциальном уравнении с запаздыванием (12). Получим однопараметрическое семейство дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dy(t)}{dt} = -f'\left(x\left(t - \frac{T(\mu)}{4}, \mu\right)\right) y\left(t - \frac{T(\mu)}{4}\right),\ \mu \in [0,\gamma). \tag{13}$$

В параграфе 2.3 вычисляется асимптотическое периодическое решение системы (10) в случае малых значений параметра μ. Для нахождения асимптотик периодических решений этой системы пользуемся методом Ляпунова[9].

[7] *Шиманов С. Н.* К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, Вып. 3. С. 450–458.

[8] *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1984. 421 с

В параграфе 2.4, проведя в дифференциальном уравнении с запаздыванием (13) замену переменных $t = T(\mu)s/(2\pi)$, $\tilde{y}(s) = y(T(\mu)s/(2\pi))$, $\tilde{x}(s,\mu) = x(T(\mu)t/(2\pi),\mu)$, находим

$$\frac{d\tilde{y}(s)}{ds} = -\frac{T(\mu)}{2\pi} f'\left(\tilde{x}\left(s - \frac{\pi}{2}, \mu\right)\right)\tilde{y}\left(s - \frac{\pi}{2}\right),\ \mu \in [0,\gamma]. \tag{14}$$

Коэффициент полученного дифференциального уравнения при малых μ близок к постоянной, т.е. дифференциальное уравнение с запаздыванием является квазигармоническим.

Утверждение 2.4. *Пусть f — нечетная трижды непрерывно дифференцируемая функция в окрестности точки $x = 0$, $f'(0) > 0$. Тогда при малых положительных значениях μ квазигармоническое дифференциальное уравнение с запаздыванием (14) устойчиво, если $T''(0) > 0$, и неустойчиво, если $T''(0) < 0$.*

Согласно утверждению 2.4 расположение на комплексной плоскости собственных чисел оператора монодромии при малых значениях параметра μ зависит от знака второй производной функции периода T в точке ноль.

В параграфе 2.5 задача изучения поведения собственных чисел оператора монодромии уравнения (14) при конечных значениях параметра μ заменяется задачей нахождения ненулевых собственных чисел $z \in \mathbb{C}$ специальной краевой задачи[10]

$$J\dot{y} = zH(\vartheta,\mu)y, \tag{15}$$

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = zJy(0). \tag{16}$$

Здесь $y = (y_1, y_2)^\top$, $J = \{\{0,1\}^\top, \{-1,0\}^\top\}$, $H(\vartheta,\mu) = \{\{a(\pi/2+\vartheta,\mu), 0\}^\top, \{0, a(\vartheta,\mu)\}^\top\}$, $\rho = -z^2$, $a(\vartheta,\mu) = T(\mu)f'(\tilde{x}(\vartheta - \pi/2,\mu))/(2\pi)$, $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\mu \in [0, \gamma)$, $z, \rho \in \mathbb{C}$.

Собственные числа z краевой задачи (15), (16) определяются из характеристического уравнения

$$D(z,\mu) = z^2 - 2V(z,\mu)z + 1 = 0, \tag{17}$$

где $V(z,\mu) = (y_{12}(0,z,\mu) - y_{21}(0,z,\mu))/2$, $Y(\vartheta,z,\mu) = ||y_{ij}(\vartheta,z,\mu)||_1^2$, $\vartheta \in [-\pi/2, 0]$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0,\gamma)$, Y — фундаментальная нормированная в точке $\vartheta = -\pi/2$ матрица системы (15).

Наличие симметрий в системе (15) определяет специальные свойства фундаментальной матрицы Y, которые используются при доказательстве следующей леммы:

[9] *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.:ГИТТЛ. 1956. 492 с.

[10] *Долгий Ю.Ф.* Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: УрГУ. 1996. 84 с.

Лемма 2.3. *Пусть f — нечетная непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной на интервале $(-\gamma, \gamma)$. Тогда функция V удовлетворяет условиям:*

а) $V(1, \mu) = 1$, $\mu \in [0, \gamma)$;

б) $V(-z, \mu) = -V(z, \mu)$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0, \gamma)$.

Согласно этой лемме у характеристического уравнения (17) всегда имеются корни $z = \pm 1$, а корни отличные от $z = \pm 1$ расположены симметрично относительно мнимой оси.

Краевая задача (15), (16) становится самосопряженной, когда $|z| = 1$. Это позволяет найти точки перехода корней характеристического уравнения через единичную окружность при изменении параметра μ.

Лемма 2.4. *Пусть f — нечетная непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной на интервале $(-\gamma, +\gamma)$. Если корень z характеристического уравнения (17) удовлетворяет условию $|z| = 1$, то $z = 1$ или $z = -1$.*

Согласно лемме 2.4, корни характеристического уравнения (17) могут пересекать единичную окружность при изменении параметра μ только по действительной оси. Из леммы 2.3 следует, что корни переходят единичную окружность парами одновременно в точках $z = 1$ и $z = -1$, причем направление перехода (внутрь или во вне единичной окружности) у пары корней совпадает. В момент пересечения окружности корень $z = 1$ становится кратным. Значение параметра μ^*, при котором это происходит, назовем бифуркационным. Для нахождения условий перехода единичной окружности полагаем $z = 1 + \tilde{z}$, где $\tilde{z}$ - малое возмущение. Фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений (15) представляется в форме асимптотического разложения

$$Y(\vartheta, z, \mu) = Y_0(\vartheta, \mu) + Y_1(\vartheta, \mu)\tilde{z} + Y_2(\vartheta, \mu)\tilde{z}^2 + o(\tilde{z}^2),$$

где $\vartheta \in [-\pi/2, 0]$, $\tilde{z} \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0, \gamma)$. При нахождении бифуркационных значений μ^* используется вычисленное значение матрицы $Y_0(0, \mu) = \{\{T^{'}(\mu)f(\mu)/4, -1\}^\top, \{1, 0\}^\top\}$, $\mu \in [0, \gamma)$.

Лемма 2.6. *Пусть f — нечетная непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной на интервале $(-\gamma, \gamma)$. Корень $z = 1$ характеристического уравнения (17) является кратным тогда и только тогда, когда $\mu = \mu^*$ является критической точкой функции T, т.е. $T^{'}(\mu^*) = 0$. При этом кратность корня равна двум.*

Анализ решения уравнения (17) в окрестности точки $(1, \mu^*)$ позволяет найти направление перехода корня через единичную окружность.

Лемма 2.7. *Пусть f — нечетная трижды непрерывно дифференцируемая функция с положительной первой производной на интервале $(-\gamma, \gamma)$. При возрастании μ в малой окрестности критической точки μ^* корень характеристического уравнения переходит из внутренней во внешнюю (из внешней во внутреннюю) область единичного круга, если $T^{''}(\mu^*) > 0$ ($T^{''}(\mu^*) < 0$).*

Полученная информация о расположении собственных чисел оператора монодромии при малых значениях μ, а также о поведении собственных чисел краевой задачи (15), (16) при изменении конечных значений параметра μ, используется при доказательстве теорему:

Теорема 2.1. *Пусть f — нечетная трижды непрерывно дифференцируемая функция с положительной первой производной на интервале $(-\gamma, \gamma)$. Пусть вторая производная функции T отлична от нуля во всех ее критических точках. Тогда для не критических точек $\mu^0 \in (0, \gamma)$ функции T дифференциальное уравнение с запаздыванием (14) устойчиво, если $T^{'}(\mu^0) > 0$, и неустойчиво, если $T^{'}(\mu^0) < 0$.*

Последняя теорема содержит основной результат главы 2. Непосредственно из нее в параграфе 2.6 находятся условия устойчивости периодического решения уравнения (9).

Теорема 2.2. *Пусть f — нечетная трижды непрерывно дифференцируемая функция с положительной первой производной на интервале $(-\gamma, \gamma)$. Пусть вторая производная функции T отлична от нуля во всех ее критических точках и некритическая точка $\mu^0 \in (0, \gamma)$ функции T является корнем уравнения $T(\mu) = 4\tau$. Тогда соответствующее этому корню антисимметрическое периодическое решение дифференциального уравнения с запаздыванием (9) устойчиво (неустойчиво), если $T^{'}(\mu^0) > 0$ ($T^{'}(\mu^0) < 0$).*

В параграфе 2.7 приведены результаты численного моделирования решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Они подтверждают правильность выводов теоретического анализа рассматриваемого класса уравнений.

Глава 3 посвящена обобщению результатов главы 2 на объект, описываемый дифференциальным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), x(t-\tau)), \tag{18}$$

где f — четная по первому, нечетная по второму аргументам трижды непрерывно дифференцируемая функция в области $(-a_1, a_1) \times (-a_2, a_2)$ $(a_1, a_2 > 0)$; $f(0,0) = 0$.

В параграфе 3.1 изучаются вопросы существования антисимметрического решения дифференциального уравнения с запаздыванием (18). Задача нахождения антисимметрического решения этого уравнения сводится к проблеме нахождения решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, -x_2),\ \frac{dx_2}{dt} = f(x_2, x_1), \tag{19}$$

$$x_1(0) = -x_2(\tau),\ x_2(0) = x_1(\tau). \tag{20}$$

Вопрос существования решения краевой задачи (19),(20) рассматривается при выполнении условия

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_1 \\ y = -x_2}} + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_2 \\ y = x_1}} = 0,$$

где $x_j \in (-a_j, a_j)$; $j = 1, 2$. Оно требуется для существования однопараметрического семейства периодических решений у системы (19).

Пусть $(x_1(t,\mu), x_2(t,\mu))^\top$, $t \in \mathbb{R}$ — периодические решения краевой задачи (19), (20) с периодами $T(\mu)$, удовлетворяющие начальным условиям $x_1(0,\mu) = 0$, $x_2(0,\mu) = \mu$, $\mu \in (-\hat{\mu}, \hat{\mu})$. Тогда каждому корню $\mu_* \in (0, \hat{\mu})$ уравнения

$$T(\mu) = 4\tau,\ \mu \in (0, \hat{\mu}) \tag{21}$$

отвечает единственное антисимметрическое решение x_* дифференциального уравнения с запаздыванием, определяемое формулой $x_*(t) = x_1(t, \mu_*)$, $t \in \mathbb{R}$.

Далее в параграфе находится асимптотическое представление антисимметрического периодического решения дифференциального уравнения с запаздыванием и его периода при малых значениях параметра.

В параграфе 3.2 ставится задача устойчивости периодических решений дифференциального уравнения с запаздыванием (18). Рассматривается однопараметрическое семейство линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dy(t)}{dt} = a_1(t,\mu)y(t) + a_2(t,\mu)y\left(t - \frac{T(\mu)}{4}\right),\ \mu \in (-\hat{\mu}, \hat{\mu}), \tag{22}$$

где $a_j(t,\mu) = \partial f(x_1(t,\mu), -x_2(t,\mu))/\partial x_j$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in (-\hat{\mu}, \hat{\mu})$, $j = 1, 2$. Уравнение (22) совпадает с уравнением линейного приближения возмущенного движения для периодического решения x_* уравнения (18) при $\mu = \mu_*$. Задача определения условий устойчивости сводится к исследованию поведения собственных чисел краевой задачи

$$J\frac{dy}{d\vartheta} = (H_1(\vartheta,\mu) + zH_2(\vartheta,\mu))y, \tag{23}$$

$$y\left(-\frac{T(\mu)}{4}\right) = zJy(0),\ z \in \mathbb{C}. \tag{24}$$

Здесь $H_1(\vartheta,\mu) = \{\{0, a_1(T(\mu)/2 + \vartheta,\mu)\}^\top, \{-a_1(T(\mu)/4 + \vartheta,\mu), 0\}^\top\}$, $H_2(\vartheta,\mu) = \{\{-a_2(T(\mu)/4 + \vartheta,\mu), 0\}^\top, \{0, -a_2(T(\mu)/2 + \vartheta,\mu)\}^\top\}$, $\vartheta \in [-T(\mu)/2, 0]$, $\mu \in [0,\hat{\mu})$.

В параграфе 3.3 изучается движение корней характеристического уравнения краевой задачи (23),(24) по комплексной плоскости при изменение параметра μ. Полагаем, что функция f удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} < 0,\ x_j \in (-a_j, a_j),\ j = 1,2.$$

Тогда корни характеристического уравнения движутся по комплексной плоскости симметрично относительно мнимой оси. Могут пересечь единичную окружность только в точках $z = \pm 1$ при значениях параметра, удовлетворяющих уравнению $T'(\mu) = 0$. Направление перехода определяется второй производной функции периода T.

В параграфе 3.4 показано, что периодическое решение дифференциального уравнения с запаздыванием (18), отвечающее корню μ_* уравнения (21), устойчиво (неустойчиво), если $dT(\mu_*)/d\mu > 0$ ($dT(\mu_*)/d\mu < 0$).

В параграфе 3.5 приведены результаты численного моделирования решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Они подтверждают правильность выводов теоретического анализа рассматриваемого класса уравнений.

Глава 4 посвящена исследованию одной математической модели биологического сообщества "хищник-жертва", описываемой системой дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} \frac{dN_1(t)}{dt} &= N_1(t)(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t-\tau)), \\ \frac{dN_2(t)}{dt} &= -N_2(t)(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1(t-\tau)), \end{aligned} \tag{25}$$

где положительные постоянные ε_1, ε_2 — коэффициенты прироста численности видов, $N_1(t)$, $N_2(t)$ — численности видов в момент времени t, γ_1, γ_2 — положительные постоянные, соответствующие потребности в пище для каждого из двух видов, τ — положительная постоянная, характеризующая запаздывание влияния конкурирующих взаимоотношений. В главе изучается математическая модель, симметрии которой приводят к существованию периодического решения, с периодом равным запаздыванию. Оказалось возможным применить метод, изложенный во второй главе диссертации для решения данной задачи. Показано существование единственного неустойчивого периодического решения.

В параграфе 4.1 рассматривается вопрос существования τ - периодического решения системы (25). На него можно ответить изучив вопрос существования аналогичного решения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{N}_1}{dt} = -\gamma_1 \tilde{N}_2 \left(\tilde{N}_1 + \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \right), \frac{d\tilde{N}_2}{dt} = \gamma_2 \tilde{N}_1 \left(\tilde{N}_2 + \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \right). \qquad (26)$$

Система (26) имеет первый интеграл[11]. Этот первый интеграл порождает семейство периодических решений системы (26). Пусть $(\tilde{N}_1^0(t,\mu),\ \tilde{N}_2^0(t,\mu))^\top$, $t \in \mathbb{R}$ — периодическое решение системы (26) периода $T(\mu)$ с начальными условиями $\tilde{N}_1^0(0,\mu) = 0$, $\tilde{N}_2^0(0,\mu) = \mu$, $\mu \in (0,+\infty)$. В параграфе показывается, что функция периодов T монотонно возрастает. Это позволяет доказать следующую теорему:

Теорема 2.1. *При $2\pi < \tau\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ существует единственное τ-периодическое решение (N_1^*, N_2^*) системы дифференциальных уравнений с запаздыванием (25), определяемое формулами: $N_1^*(t) = \varepsilon_2/\gamma_2 + \tilde{N}_1^0(t,\mu^*)$, $N_2^*(t) = \varepsilon_1/\gamma_1 + \tilde{N}_2^0(t,\mu^*)$, $t \in \mathbb{R}$, где μ^* корень уравнения*

$$T(\mu) = \tau, \mu \in (0,+\infty).$$

При $\tau\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} < 2\pi$ не существует τ-периодических решений системы дифференциальных уравнений с запаздыванием (25).

В параграфе 4.2 ставится задача исследования на устойчивость периодического решения системы дифференциальных уравнений с запаздыванием (25). Используя, предложенный в главе 2, метод исследования устойчивости, переходим к задаче исследования на устойчивость однопараметрического семейства систем линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -\gamma_1 \tilde{N}_2^0(t,\mu) x_1(t) - \gamma_1 \Big(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} + \tilde{N}_1^0(t,\mu) \Big) x_2(t - T(\mu)), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \gamma_2 \Big(\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} + \tilde{N}_2^0(t,\mu) \Big) x_1(t - T(\mu)) + \gamma_2 \tilde{N}_1^0(t,\mu) x_2(t), \end{aligned} \qquad (27)$$

[11] *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существования. М., 1976. 288 с.

где $\mu \in [0, +\infty)$. Устойчивость системы (27) зависит от расположения спектра оператора монодромии. Задачу нахождения ненулевых собственных чисел $\rho \in \mathbb{C}$ оператора монодромии заменяем задачей нахождения ненулевых собственных чисел $z \in \mathbb{C}$ $(\rho = z^{-1})$ краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$J\frac{dy}{d\vartheta} = (H_1(\vartheta, \mu) - zH_2(\vartheta, \mu))y, \tag{28}$$

$$y(-T(\mu)) = zy(0), \tag{29}$$

где $H_1(\vartheta, \mu) = \{\{0, -(\gamma_2\tilde{N}_1^0(\vartheta, \mu) + \gamma_1\tilde{N}_2^0(\vartheta, \mu))/2\}^\top, \{-(\gamma_2\tilde{N}_1^0(\vartheta, \mu)+ +\gamma_1\tilde{N}_2^0(\vartheta, \mu))/2, 0\}^\top\}$, $H_2(\vartheta, \mu) = \{\{\gamma_2(\varepsilon_1/\gamma_1 + \tilde{N}_2^0(\vartheta, \mu)), 0\}^\top, \{0, \gamma_1(\varepsilon_2/\gamma_2+ +\tilde{N}_1^0(\vartheta, \mu))\}^\top\}$, $\vartheta \in [-T(\mu), 0]$, $\mu \in [0, +\infty)$.

В параграфе 4.3 показано, что характеристическое уравнение краевой задачи (28), (29) при $\mu = 0$ имеет четыре корня в области $\{z : |z| < 1,\ z \in \mathbb{C}\}$ и на единичной окружности двукратный корень $z = 1$.

В параграфе 4.4 установлено, что переход корней характеристического уравнения через единичную окружность происходит только через точку $z = 1$ при значении параметра $\mu = 0$. Следовательно, при увеличений значения параметра μ, внутри единичной окружности всегда есть корни характеристического уравнения. Тогда, τ-периодическое решение системы дифференциальных уравнений с запаздыванием (25) неустойчиво.

В параграфе 4.5 проведено численное моделирование решений системы дифференциальных уравнений (25) для разных значений параметров.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Долгий Ю.Ф., Нидченко С.Н.* Устойчивость антисимметрических периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием// Известия Уральского государственного университета. 2005. № 38. (Математика и механика. Вып. 8.) С. 50–68.

2. *Долгий Ю.Ф., Нидченко С.Н.* Бифуркационный метод исследования устойчивости решения дифференциального уравнения с запаздыванием// Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46, № 6. С. 1288–1301.

3. *Нидченко С.Н.* Рождение периодических решений дифференциального уравнения с запаздыванием из положения равновесия // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. 2005. № 4. 50 с.

4. *Долгий Ю.Ф., Нидченко С.Н.* Устойчивость антисимметрических периодических решений дифференциальных уравнения с запаздыванием // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Екатеринбург:УрГУ. 2004. С. 159–160.

5. *Нидченко С.Н.* Существование и устойчивость периодического решения квазилинейного дифференциального уравнения с запаздыванием // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления. VII международный семинар. Тезисы докладов. М.:ИПУ. 2002. С. 13–14.

6. *Нидченко С.Н.* Численное моделирование периодических решений для нелинейных уравнений с запаздыванием // Современные методы теории краевых задач. Материалы ВВМШ. Воронеж:ВГУ, 2003. С. 98–99.

7. *Нидченко С.Н.* Существование и устойчивость антисимметрических периодических решений в нелинейных системах с запаздыванием // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления. VIII международный семинар. Тезисы докладов. М.:ИПУ. 2004. С. 132–134.

8. *Нидченко С.Н.* Периодические решения в математической модели "хищник - жертва"// Современные методы теории краевых задач. Материалы ВВМШ. Воронеж:ВГУ, 2005. С. 113–114.

9. *Нидченко С.Н.* Бифуркация периодических движений в нелинейных системах с запаздыванием // Деп. в ВИНИТИ 29.08.01. №1910-B2001. Уральский государственный университет. 2001. 34 с.

10. *Нидченко С.Н.* Устойчивость периодических решений одного дифференциального уравнения с запаздыванием// Труды 31-й Региональной молодежной конференции. Проблемы теоретической механики. Екатеринбург. 2000. С. 55–56.

11. *Нидченко С.Н.* Рождение периодических решений дифференциального уравнения с запаздыванием из положения равновесия// Известия института математики и информатики. Ижевск. 2006. Вып. 3, № 37. С. 111–112.