МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК И МАТЕМАТИКИ

Кафедра математического анализа

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

Направление подготовки 01.04.01 «Математика»

Образовательная программа «Современные проблемы математики»

Зав. кафедрой:
к. ф.-м. н., доц. П. Ю. Глазырина:

Магистерская диссертация

Сокольского
Сергея Александровича

Нормоконтролер:
к. ф.-м. н., доц. М. В. Дейкалова

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., проф. В. В. Арестов

Екатеринбург
2019

РЕФЕРАТ

Сокольский С. А. НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2, магистерская диссертация: стр. 22, библ. назв. 8.

Ключевые слова: ЛАПЛАСИАНЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАЧА СТЕЧКИНА, НЕРАВЕНСТВО КОЛМОГОРОВА

Рассматривается задача о наилучшем приближении оператора Лапласа первого порядка Δ линейными ограниченными операторами с нормой, не превосходящей заданного числа N в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ на классе функций $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, норма второй степени оператора Лапласа которых ограничена, а точнее $\|\Delta^2 f\|_{L_2} \leq 1$. Также в ходе решения этой задачи получена точная оценка нормы оператора Лапласа первого порядка через норму оператора Лапласа второго порядка и норму функции в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Sokol'skii S. A. THE BEST APPROXIMATION OF THE LAPLACIAN BY BOUNDED OPERATORS IN THE SPACE L_2, master's thesis: 22 pp., bibl. 8.

Keywords: FIRST AND SECOND ORDER LAPLACIANS, STECHKIN PROBLEM, KOLMOGOROV INEQUALITY

We consider the problem of the best approximation of the first order Laplace operator Δ by linear bounded operators with norm not exceeding a given number N in the space $L_2(\mathbb{R}^n)$ on the class of functions $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ with bounded norm of the second degree of the Laplace operator; more exactly, $|\Delta^2 f\ |_{L_2} \leq 1$. We also obtain an exact estimate for the norm of the first order Laplace operator in terms of the norm of the second order Laplace operator and the norm of the function in the space $L_2(\mathbb{R}^n)$.

МЕСТО ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Кафедра математического анализа Института естественных наук и математики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$\mathbb{R}^n$ – n-мерное координатное пространство всевозможных упорядоченных наборов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из n действительных чисел;

$L_2(\mathbb{R}^n)$ – пространство измеримых на $\mathbb{R}^n$ комплекснозначных функций с конечной нормой $||f|| = \{\int |f(x)^2|dx\}^{1/2}$;

$W^2 = \{f \in L_2, \Delta f \in L_2\}$ – класс комплекснозначных функций f принадлежащих пространству L_2, таких что оператор Лапласа первого порядка от этих функций так же принадлежит пространству L_2;

$W^4 = \{f \in L_2, \Delta^2 f \in L_2\}$ – класс комплекснозначных функций f принадлежащих пространству L_2, таких что оператор Лапласа второго порядка от этих функций так же принадлежит пространству L_2;

$Q_4 = \{f \in W_4, ||\Delta^2 f|| \leqslant 1\}$ – класс комплекснозначных функций f принадлежащих пространству W^4, таких что норма оператора Лапласа второго порядка от этих функций не превосходит единицы;

$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)^2}{\partial^2 x_i}$ – оператор Лапласа первого порядка;

$\Delta^2 f(x) = \Delta\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)^4}{\partial^4 x_i} + \sum_{j=1,k=1}^n 2\frac{\partial f(x)^4}{\partial^2 x_i \partial^2 x_j}$ – оператор Лапласа второго порядка;

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\omega) e^{-i<x,\omega>} d\omega$$ – многомерное преобразование Фурье;

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\omega) e^{i<x,\omega>} d\omega$$ – обратное преобразование Фурье.

ВВЕДЕНИЕ

1 Постановка задачи

Пусть $L_2(\mathbb{R}^n)$ – пространство вещественно значных измеримых функций, заданных на n-мерном координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$||f|| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)^2| dx \right)^{1/2}.$$

Важным инструментом исследования задач в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ является преобразование Фурье [8, гл. 1, §2], определяемое формулой

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\omega) e^{-i<x,\omega>} d\omega.$$

Оператор преобразования Фурье является унитарным оператором на $L_2(\mathbb{R}^n)$; это значит, что он отображает пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$ на себя и, более того, (согласно теореме Планшереля)

$$\|\tilde{f}\| = \|f\|, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

$W^4 = \{f \in L_2,\ \Delta^2 f \in L_2\}$ есть класс комплекснозначных функций f принадлежащих пространству L_2, таких, что оператор Лапласа второго порядка от этих функций также принадлежит пространству L_2. Точнее, W^4 есть пространство функций $f \in L_2$ таких, что произведение $\|x\|^4 \tilde{f}(x) \in L_2$. Обратное преобразование Фурье функции $\|x\|^4 \tilde{f}(x)$ как раз и есть $\Delta^2 f$.

$Q_4 = \{f \in W^4,\ ||\Delta^2 f|| \leqslant 1\}$ есть класс комплекснозначных функций f принадлежащих пространству W^4, таких, что норма оператора Лапласа второго порядка от этих функций $||\Delta^2 f||$ не превосходит единицы.

$W^2 = \{f \in L_2,\ \Delta f \in L_2\}$ есть класс комплекснозначных функций f принадлежащих пространству L_2, таких, что оператор Лапласа от этих функций также принадлежит пространству L_2. Точнее, так же, как и выше, W^2 есть пространство функций $f \in L_2$ таких, что $\|x\|^2 \tilde{f}(x) \in L_2$. Обратное преобразование Фурье функции $-\|x\|^2 \tilde{f}(x)$ как раз и есть Δf. Имеет место вложение $W^4 \subset W^2$. В самом деле, пусть $f \in W^4$. Запишем

$$\|x\|^2 \tilde{f}(x) = \frac{\|x\|^2}{1 + \|x\|^4} (1 + \|x\|^4) \tilde{f}(x).$$

Отношение $\|x\|^2/(1 + \|x\|^4)$ на $\mathbb{R}^n$ ограничено, а произведение $(1 + \|x\|^4) \times \tilde{f}(x)$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^n)$, поэтому $\|x\|^2 \tilde{f}(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Так что, действительно, $W^4 \subset W^2$.

Обозначим через $\mathcal{B}(N)$ множество линейных ограниченных операторов S в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, нормы $||S|| = ||S||_{L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)}$ которых не превосходят заданного числа $N > 0$.

Магистерская диссертация посвящена задаче о вычислении наилучшего приближения оператора Лапласа первого порядка Δ множеством операторов $\mathcal{B}(N)$ на классе Q^4. Для линейного ограниченного оператора S в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим следующую величину:

$$U(S) = \sup\{||\Delta f - S(f)|| : \ f \in Q^4\}. \tag{1.1}$$

Целью данной работы является нахождение величины

$$E(N) = \inf_{||S||\leqslant N} U(S) = \inf_{||S||\leqslant N} \sup_{||\triangle^2 f||\leqslant 1} ||\Delta f - S(f)||, \tag{1.2}$$

где нижняя грань в (1.2) берется по всем линейным ограниченным операторам S в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, норма которых не превосходит наперед заданного числа N, т. е. по множеству операторов $S \in \mathcal{B}(N)$.

Теорема 1. *При* $N = \frac{1}{2h^2}$, $h > 0$, *для величины* (1.2) *справедливо равенство*

$$E\left(\frac{1}{2h^2}\right) = \frac{h^2}{2}. \tag{1.3}$$

В ходе доказательства данной теоремы возникнет необходимость получить оценку нормы оператора Лапласа первого порядка через норму оператора Лапласа второго порядка и норму исходной функции в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, поэтому сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *На множестве* W^4 *имеет место точное неравенство*

$$||\Delta f|| \leqslant ||f||^{\frac{1}{2}} ||\Delta^2 f||^{\frac{1}{2}}, \quad f \in W^4. \tag{1.4}$$

2 История исследования

Впервые задача о наилучшем приближении линейных неограниченных операторов линейными ограниченными операторами была поставлена и решена С. Б. Стечкиным. Полученные в этом направлении результаты показывают, что даже неограниченные операторы могут хорошо приближаться ограниченными операторами на достаточно узких классах. Первый доклад С. Б. Стечкина по данной тематике был сделан на Всесоюзной конференции по вычислительной математике в 1965 году, а первая публикация задачи датируется 1967 годом [1]. В дальнейшем задача получила широкое развитие, и исследования С. Б. Стечкина были продолжены его учениками, в частности В. В. Арестовым, В. И. Бердышевым, Ю. Н. Субботиным и Л. В. Тайковым, см. обзорную статью [2].

Некоторые полученные здесь результаты будут кратко представлены в следующих подразделах.

2.1 Наилучшее приближение неограниченных операторов (С.Б.Стечкин (1967) [1])

Задача Стечкина состоит в следующем. Пусть X и Y — банаховы пространства, A — линейный, неограниченный оператор из X в Y с областью определения $D(A) \in X$ и K — некоторый класс элементов из X, содержащийся в $D(A)$.

С. Б. Стечкиным была рассмотрена задача о наилучшем приближении оператора A всевозможными линейными операторами S из X в Y с нормой $||S|| = ||S||_{X \to Y}$, не превосходящей некоторого числа $N > 0$, на заданном классе K, то есть задача о нахождении величины

$$E_N(A, K) = \inf_{\|S\| \leq N} R(A, S, K), \tag{2.1}$$

$$R(A, S, K) = \sup_{x \in K} ||A(x) - S(x)||_Y.$$

Эта задача нетривиальна лишь в том случае, если $||A|| > N$ и существует линейный оператор S такой, что $||S|| \leq N$, для которого $R(A, S; K) < \infty$. Здесь возникает обычный для теории приближений вопрос исследования поведения наилучших приближений как функциий от N, а также вопросы существования, единственности, характеристических свойств и построения наилучшего оператора S^*, на котором достигается нижняя грань в (2.1).

Один из наиболее важных частных случаев задачи (2.1) состоит в том, что класс K определяется при помощи некоторого линейного оператора. Пусть Z есть банахово пространство и V — линейный, неограниченный оператор из X в Z с областью определения $D(V) \subset X$ и притом такой, что $D(V) \subset D(A)$. Тогда полагается

$$K = \{x \in X : ||V(x)||_Z \leqslant 1\}. \tag{2.2}$$

Величина (2.1) в данном случае примет следующий вид:

$$E_N(A; V) = \inf_{\|S\| \leq N} R(S), \tag{2.3}$$

$$R(S) = \sup\{||A(x) - S(x)||_Y : \ x \in K\}.$$

В своей работе [1] С. Б. Стечкин рассмотрел частный случай задачи (2.3) о наилучшем приближении операторов дифференцирования. Пусть I есть действительная прямая или полупрямая $[0, +\infty)$, $X = Y = C(I)$ – – пространство непрерывных функций, определенных на I, K_n – класс функций, для которых $(n-1)$-я производная $x^{(n-1)}(t)$ имеет производные числа, не превосходящие единицы, и $A = D^k$ – оператор дифференцирования k-го порядка $(1 < k < n)$. Величину (2.3) для данного случая обозначим через $E_{k,n}(N)$, а иногда и просто $E(N)$.

Всего в работе [1] было рассмотрено 6 случаев данной задачи и для каждого из этих случаев была найдена величина наилучшего приближения $E_{k,n}(N)$ и оптимальный оператор $S_{k,n}$. Коротко опишем решение задачи Стечкина в каждом из этих случаев. Отметим еще раз, что здесь $X = Y = C(I)$.

(1) $n = 2, \ k = 1$; $I = (-\infty, \infty)$:

$$N = \frac{1}{h}, \quad E_{1,2}(N) = \frac{h}{2};$$

$$(S_{1,2}\, x)(t) = \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h}, \quad ||S_{1,2}|| = \frac{1}{h}.$$

(2) $n = 3, \ k = 1$; $I = (-\infty, \infty)$:

$$N = \frac{1}{h}, \quad E_{1,3}(N) = \frac{h^2}{6};$$

$$(S_{1,3}\, x)(t) = \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h}, \quad ||S_{1,3}|| = \frac{1}{h}.$$

(3) $n = 3, \ k = 2$; $I = (-\infty, \infty)$:

$$N = \frac{4}{h^2}, \quad E_{2,3}(N) = \frac{h}{3};$$

$$(S_{2,3}\, x)(t) = \frac{1}{h^2}\{x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)\}, \quad ||S_{2,3}|| = \frac{4}{h^2}.$$

(4) $n = 2, \ k = 1$; $I = [0, \infty)$:

$$N = \frac{1}{h}, \quad E_{1,2}(N) = \frac{h}{2};$$

$$(S_{1,2}\,x)(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \quad ||S_{1,2}|| = \frac{2}{h}.$$

(5) $n = 3,\ k = 1;\ I = [0, \infty)$:

$$N = \frac{3}{h}, \quad E_{1,3}(N) = \frac{h^2}{2};$$

$$(S_{1,3}\,x)(t) = \frac{1}{6h}\{-8x(t) + 9x(t+h) - x(t+3h)\}, \quad ||S_{1,3}|| = \frac{3}{h}.$$

(6) $n = 3,\ k = 2;\ I = [0, \infty)$:

$$N = \frac{2}{h^2}, \quad E_{1,3}(N) = \frac{4h}{3};$$

$$(S_{2,3}\,x)(t) = \frac{1}{3h^2}\{2x(t) - 3x(t+h) + x(t+3h)\}, \quad ||S_{2,3}|| = \frac{2}{h^2}.$$

2.2 Наилучшее приближение операторов дифференцирования (В. В. Арестов (1967) [3])

Пусть I – числовая прямая $(-\infty, +\infty)$; M — пространство функций $C = C[I]$ или $L = L_1[I]$; $Q_n(M)$ — класс функций, имеющих непрерывную производную и таких, что $||f^{(n)}||_M \leqslant 1$, где $||f^{(n)}||_C$ понимается как верхняя грань абсолютных величин производных чисел функции $f^{(n-1)}$.

В. В. Арестовым [2] была рассмотрена задача о нахождении величины

$$E_{k,n}(N) = \inf_{\|S\|_{M\to M}\leq N} \sup_{f\in Q_n(M)} ||f^{(k)}(x) - (Sf)(x)||_M, \tag{2.4}$$

здесь нижняя грань берется по всем линейным операторам S, заданным на объединении пространства M с классом $Q_n(M)$, и ограниченным как операторам из M в M. Также в задаче ставится вопрос о нахождении экстремального оператора $S_{k,n}$, на котором достигается нижняя грань. Ранее С. Б. Стечкиным была доказана [1] справедливость трёх следующих соотношений:

$$E_{k,n}(h^{-k}N) = h^{n-k}E_{k,n}(N), \tag{2.5}$$

$$S_{k,n}(x; f(t); h^{-k}N) = h^{-k}S_{k,n}(h^{-1}x; f(ht); N), \tag{2.6}$$

$$C_{k,n} \leqslant n(E_{k,n}(N)/k)^{k/n}(N/(n-k))^{(n-k)/n}, \tag{2.7}$$

где

$$C_{k,n} = K_{(n-k)} K_n^{(k-n)/n},\ K_m = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i(m+1)}}{(2i+1)^{m+1}}. \tag{2.8}$$

Равенства (2.5) и (2.6) показывают, что задачу (2.4) достаточно решить для некоторого значения N, а неравенство (2.7) дает оценку снизу для величины $E_{k,n}(N)$.

В этой статье В. В. Арестов продолжает изучать задачу (2.1), которая ранее уже была рассмотрена С. Б. Стечкиным для случаев $M = C$, $n = 2, 3$ и даёт её решение для случаев $M = C$, $n = 4, 5$ и $M = L$, $n = 2, 3, 4, 5$.

2.3 Наилучшее приближение операторов дифференцирования в пространстве L_2 (Ю. Н. Субботин, Л. В. Тайков (1968) [4])

В данной работе находится величина наилучшего приближения в смысле пространства $L_2(-\infty, \infty)$ оператора дифференцирования k-го порядка линейными ограниченными операторами $S(f)$ на классе n раз дифференцируемых функций для всех значений $0 < k < n$.

Пусть $L_2(-\infty, +\infty)$ – это пространство измеримых комплекснозначных функций, заданных на всей числовой оси и имеющих конечную норму

$$||f|| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)^2| dx \right)^{1/2} \tag{2.9}$$

В данном случае рассматривается пространство $W^n = W_2^n$ тех функций, принадлежащих пространству $L_2(-\infty, +\infty)$, $(n-1)$-я производная которых абсолютно непрерывна и n-я производная тоже принадлежит пространству $L_2(-\infty, +\infty)$. Для таких функций при $0 < k < n$ справедливо (точное) неравенство

$$||f^{(k)}|| < ||f||^{(n-k)/n} ||f^{(n)}||^{k/n}, \quad f \in W_2^n. \tag{2.10}$$

В статье Ю. Н. Субботина и Л. В. Тайкова [3] была поставлена задача о вычислении наилучшего приближения оператора дифференцирования k-го порядка линейными ограниченными операторами на классе функций $Q_2^n = \{f \in W_2^n \colon \|f^{(n)}\| \le 1\}$, то есть о нахождении величины

$$E(N) = E(N; k, n) = \inf_{||S|| \leqslant N} \sup_{||f^{(n)}|| \leqslant 1} ||f^{(k)} - S(f)||, \tag{2.11}$$

где нижняя грань берется по всем линейным ограниченным операторам S, действующим из пространства $L_2(-\infty, +\infty)$ в $L_2(-\infty, +\infty)$ с нормой $||S||$, не превосходящей заданного числа N.

Ю. Н. Субботин и Л. В. Тайков доказали, что для любых натуральных чисел k, n таких, что $0 < k < n$, справедливо равенство

$$E\,(N) = \frac{k}{n} h^{n-k}, \quad N = N(h) = \frac{(n-k)}{n\, h^k}, \quad h > 0. \tag{2.12}$$

Помимо того, они выписали в задаче (2.11) экстремальный оператор.

Теперь перейдём к доказательству основных результатов данной работы.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

3 Доказательство теорем 1 и 2

Доказательство теорем 1 и 2 будет проведено одновременно. Вначале будет получена оценка сверху в теореме 1. Для доказательства данной теоремы сначала для величины (1.3) будет получена оценка сверху, а затем и снизу. Равенство между собой оценок докажет утверждение (1.3).

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ важную роль играет известная теорема швейцарского математика М.順Планшереля, согласно которой

(1) $f \in L_2(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \tilde{f} \in L_2(\mathbb{R}^n)$,

(2) $||f|| = ||\tilde{f}||, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Мы воспользуемся теоремой Планшереля для функций в пространстве W^4. Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\omega) e^{i<x,\omega>} d\omega; \tag{3.1}$$

здесь $\omega = \omega(\omega_1, \dots, \omega_n)$ и $x = x(x_1, \dots, x_n)$ – вектора из пространства $\mathbb{R}^n$.

Взятие частной производной функции превращается в умножение на одноименную координату преобразования Фурье $\widetilde{f}$:

$$\widetilde{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}} = i\omega_i \tilde{f}(\omega). \tag{3.2}$$

Аналогично осуществляется взятие второй частной производной:

$$\widetilde{\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}} = i^2 \omega_i^2 \tilde{f}(\omega) = -\omega_i^2 \tilde{f}(\omega). \tag{3.3}$$

Следовательно, преобразование Фурье примет вид

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} -\omega_i^2 \tilde{f}(\omega) e^{i<x,\omega>} d\omega. \tag{3.4}$$

Оператор Лапласа представляет собой сумму вторых частных производных:

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2}. \tag{3.5}$$

Просуммировав формулы (3.4), получаем

$$\Delta f(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} r^2(\omega)\tilde{f}(\omega)e^{i<x,\omega>}d\omega, \tag{3.6}$$

где $r = r(\omega) = \|\omega\| = \left(\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2\right)^{1/2}$.

Для второй степени оператора Лапласа имеет место подобная же формула

$$\Delta^2 f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} r^4\tilde{f}(r)e^{i<x,\omega>}d\omega. \tag{3.7}$$

Согласно теореме Планшереля

$$||\Delta^2 f|| = ||r^4\tilde{f}||, \quad f \in W^4. \tag{3.8}$$

Учитывая равенство (3.8), класс $Q_4 = \{f \in W_4\colon ||\Delta^2 f|| \leqslant 1\}$ можно теперь описать в виде

$$Q_4 = \{f \in L_2(\mathbb{R}^n)\colon ||r^4\tilde{f}|| \leqslant 1\}.$$

3.1 Оценка сверху в теореме 1

Будем искать аппроксимирующий оператор S в задаче (1.2) в виде

$$(Sf)(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(r)\tilde{f}(\omega)e^{i<x,\omega>}d\omega, \tag{3.9}$$

где $r = \|\omega\|$ и $\lambda(r)$ – функция одного переменного $r \in [0, \infty)$, которую предстоит построить. Функция λ будет выбрана непрерывной, ограниченной на полуоси $[0, \infty)$. В этом случае для функций $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$||Sf||^2 = \int |\lambda(r)\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega \leqslant \left(\sup_{r\geq 0} |\lambda(r)|\right)^2 \int |\tilde{f}|^2 d\omega.$$

Отсюда следует нравенство

$$||Sf|| \leq \sup_r |\lambda(r)| \cdot ||f||, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^n). \tag{3.10}$$

Таким образом, для нормы оператора (3.9) справедлива оценка

$$||S|| \leqslant \sup_{r\geq 0} |\lambda(r)|. \tag{3.11}$$

Для разности $\Delta f - Sf$ имеет место представление

$$\Delta f(x) - S(f) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (r^2 - \lambda(r))\tilde{f}(\omega)e^{i<x,\omega>}d\omega. \tag{3.12}$$

Перепишем его в виде

$$\Delta f(x) - S(f) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} s(r) r^4 \tilde{f}(\omega) e^{i<x,\omega>} d\omega. \tag{3.13}$$

Допустим, что функция

$$s(r) = \frac{r^2 - \lambda(r)}{r^4}$$

ограничена на полуоси $(0, \infty)$. С учетом равенств (3.8) и (3.11), для функций $f \in W^4$ имеем следующую оценку нормы разности (3.13):

$$||\Delta f - Sf|| \leqslant \sup_{r>0} |s(r)| \cdot \|\Delta^2 f\|, \quad f \in W^4. \tag{3.14}$$

Следовательно, для величины уклонения (1.1) будет справедлива оценка

$$U(S) = \sup\{||\Delta f - S(f)|| : \ f \in Q^4\} \leq \sup_{r>0} |s(r)| \,. \tag{3.15}$$

Возьмем в (3.9) в качестве λ конкретную функцию

$$\lambda^*(r) = \begin{cases} r^2 - \frac{1}{2}h^2 r^4, & 0 \leqslant r \leqslant \frac{\sqrt{2}}{h}, \\ 0, & r \geqslant \frac{\sqrt{2}}{h}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Оператор (3.9) с функцией (3.16) обозначим через Λ. В соответствии с (3.11) имеем

$$||\Lambda|| \leq \sup |\lambda^*(r)| = \max_r \left\{ \left| r^2 - \frac{1}{2}h^2 r^4 \right| : 0 \leqslant r \leqslant \frac{\sqrt{2}}{h} \right\}. \tag{3.17}$$

Максимальное значение функции $|r^2 - \frac{1}{2}h^2 r^4|$ на отрезке $[0, \frac{\sqrt{2}}{h}]$ достигается в точке

$$r^* = \frac{\sqrt{2}}{2h} \tag{3.18}$$

и имеет значение $1/(2h^2)$. Будем считать, что N равно именно этому значению. Имеем

$$||\Lambda|| \leq N, \quad N = \frac{1}{2h^2}. \tag{3.19}$$

Далее, в соответствии с (3.15), имеем

$$U(\Lambda) = \sup\{||\Delta f - S(f)||: || \triangle^2 f|| \leqslant 1\} \leq \sup\{|s^*(r)|: r > 0\},$$

где

$$s^*(r) = \frac{r^2 - \lambda^*(r)}{r^4}.$$

Если $r \geq \frac{\sqrt{2}}{h}$, то $s^*(r) = 1/r^2$. Эта функция убывает. Если же $r \in (0, \frac{\sqrt{2}}{h}]$, то $s^*(r) = \frac{1}{2}h^2$. Поэтому $\sup\{|s^*(r)|\colon r > 0\} = \frac{1}{2}h^2$. Таким образом,

$$U(\Lambda) \leq \frac{1}{2}h^2.$$

Отсюда следует оценка

$$E\left(\frac{1}{2h^2}\right) \leq \frac{h^2}{2}. \tag{3.20}$$

Итак, оценка сверху в теореме 1 получена.

3.2 Доказательство теоремы 2

Выясним условия на коэффициенты α, β и C для того чтобы имело место неравенство

$$||\Delta f|| \leqslant C||f||^{\alpha}||\Delta^2 f||^{\beta}, \quad f \in W^4. \tag{3.21}$$

Следуя С. Б. Стечкину [1], для функции $f \in W^4$ и любого линейного ограниченного оператора в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, для которого величина уклонения $R(S)$, определенная формулой (1.1), конечна, справедлива следующая цепочка оценок:

$$\begin{gathered} ||\Delta f|| = ||\Delta f - Sf + Sf|| \leqslant ||\Delta f - Sf|| + ||Sf|| \leqslant \\ \leqslant ||S|| \times ||f|| + U(S)||\Delta^2 f|| \end{gathered}$$

и, окончательно,

$$||\Delta f|| \leqslant ||S|| \times ||f|| + U(S)||\Delta^2 f||, \quad f \in W^4. \tag{3.22}$$

Для построенного выше оператора Λ это неравенство принимает вид

$$||\Delta f|| \leqslant \frac{1}{2h^2}||f|| + \frac{h^2}{2}||\Delta^2 f||, \quad f \in W^4. \tag{3.23}$$

Для каждой функции $f \in W^4$ найдем наименьшее значение правой части последнего неравенства. Для упрощения вычислений и облегчения записи введем следующие обозначения:

$$||f|| = K, \quad ||\Delta^2 f|| = L. \tag{3.24}$$

Тогда с учетом замены (3.24) оценка (3.23) примет следующий вид:

$$||\Delta f|| \leqslant \frac{K}{2h^2} + \frac{Lh^2}{2}. \tag{3.25}$$

Наименьшее значение правой части последнего неравенства достигается в точке

$$h_{min} = \sqrt[4]{\frac{K}{L}} = \sqrt[4]{\frac{||f||}{||\Delta^2 f||}}. \tag{3.26}$$

Подставив найденное значение h_{min} в (3.25) и произведя обратную замену для K и L, получим неравенство

$$||\Delta f|| \leqslant ||f||^{\frac{1}{2}} ||\Delta^2 f||^{\frac{1}{2}}, \quad f \in W^4. \tag{3.27}$$

Тем самым мы уточнили неравенство (3.21).

Убедимся, что константу $C = 1$ в неравенстве (3.27) нельзя уменьшить. Будем рассуждать от противного. Предположим, что существует некая константа C_1 такая, что $C_1 < 1$ и при этом имеет место неравенство

$$||\Delta f|| \leqslant C_1 ||f||^{\frac{1}{2}} ||\Delta^2 f||^{\frac{1}{2}}, \quad f \in W^4. \tag{3.28}$$

Из неравенства (3.28) следует, что

$$C_1 \geqslant \frac{||\Delta f||}{||f||^{\frac{1}{2}} ||\Delta^2 f||^{\frac{1}{2}}} \tag{3.29}$$

для любой функции $f \in W^4$.

Зафиксируем некоторое $R > 0$. Рассмотрим семейство функций f_ε, зависящих от параметра $\varepsilon > 0$, преобразование Фурье которых определено формулами

$$\widetilde{f}_\varepsilon(\omega) = \begin{cases} 1, & R \leqslant \|\omega\| \leqslant R + \varepsilon, \\ 0, & \|\omega\| \notin (R, R + \varepsilon). \end{cases} \tag{3.30}$$

Введем обозначение $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^n \colon R \leq \|\omega\| \leq R + \varepsilon\}$. Применяя равенство Парсеваля, получаем

$$||f_\varepsilon||^2 = ||\widetilde{f}_\varepsilon||^2 = \int_\Omega d\omega_1 \ldots d\omega_n \tag{3.31}$$

Аналогичным образом, с помощью (3.6) и (3.7), находим

$$||\Delta f||^2 = \int_\Omega \|\omega\|^2 \, d\omega_1 \ldots d\omega_n, \tag{3.32}$$

$$||\Delta^2 f||^2 = \int_\Omega \|\omega\|^4 \, d\omega_1 \dots d\omega_n. \tag{3.33}$$

С учетом пределов интегрирования для данных интегралов будут справедливы следующие оценки:

$$R^2 \int_\Omega d\omega_1 \dots d\omega_n \leqslant \int_\Omega \|\omega\|^2 \, d\omega_1 \dots d\omega_n \leqslant (R+\varepsilon)^2 \int_\Omega d\omega_1 \dots d\omega_n, \tag{3.34}$$

$$R^4 \int_\Omega d\omega_1 \dots d\omega_n \leqslant \int_\Omega \|\omega\|^4 \, d\omega_1 \dots d\omega_n \leqslant (R+\varepsilon)^4 \int_\Omega d\omega_1 \dots d\omega_n. \tag{3.35}$$

Которые с учетом выражений (3.31), (3.32), (3.33) можно записать в виде

$$R^2||f_\varepsilon||^2 \leqslant ||\Delta f_\varepsilon||^2 \leqslant (R+\varepsilon)^2||f_\varepsilon||^2, \tag{3.36}$$

$$R^4||f_\varepsilon||^2 \leqslant |||\Delta^2 f_\varepsilon||^2 \leqslant (R+\varepsilon)^4||f_\varepsilon||^2. \tag{3.37}$$

В свою очередь из неравенств (3.36) и (3.37) получаем два следующих равенства:

$$||\Delta f_\varepsilon||^2 = (R+\theta_1\varepsilon)^2||f_\varepsilon||^2, \tag{3.38}$$

$$||\Delta^2 f_\varepsilon(x)||^2 = (R+\theta_2\varepsilon)^4||f_\varepsilon||^2, \tag{3.39}$$

где θ_1 и θ_2 некоторые числа такие, что $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$ и $0 \leqslant \theta_2 \leqslant 1$.

В конечном итоге имеем

$$||\Delta f_\varepsilon|| = (R+\theta_1\varepsilon)||f_\varepsilon||, \tag{3.40}$$

$$||\Delta^2 f_\varepsilon(x)|| = (R+\theta_2\varepsilon)^2||f_\varepsilon||. \tag{3.41}$$

Подставив выражения (3.40) и (3.41) в неравенство (3.29), получим следующую оценку:

$$C_1 \geqslant \frac{(R+\theta_1\varepsilon)||f_\varepsilon||}{||f_\varepsilon||^{\frac{1}{2}}((R+\theta_2\varepsilon)^2||f_\varepsilon||)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(R+\theta_1\varepsilon)}{(R+\theta_2\varepsilon)}. \tag{3.42}$$

Откуда найдём оценку для C_1:

$$C_1 \geqslant \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{(R+\theta_1\varepsilon)}{(R+\theta_2\varepsilon)} = 1. \tag{3.43}$$

Следовательно, предположение о существовании такой константы C_1 было неверным, а значит, единица будет являться наилучшей константой в неравенстве (1.4). Теорема 2 доказана.

3.3 Оценка снизу в теореме 1

Для завершения доказательства теоремы 1 нам осталось получить точную оценку снизу, обратную оценке (3.20), а именно, показать справедливость неравенства

$$E\left(\frac{1}{2h^2}\right) \geqslant \frac{h^2}{2}. \tag{3.44}$$

Вновь воспользуемся идеей С. Б. Стечкина [1]. Пусть $N > 0$ и S – некоторый линейный ограниченный оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|S\| \leq N$, для которого величина уклонения $U(S)$, определенная формулой (1.1), конечна. Для любой функции $f \in W^4$ имеет место неравенство (3.22):

$$||\Delta f|| \leqslant ||S|| \times ||f|| + U(S)||\Delta^2 f||, \quad f \in W^4. \tag{3.45}$$

Взяв нижнюю грань правой части неравенства по S, получаем неравенство

$$||\Delta f|| \leqslant N\,||f|| + E(N)\,||\Delta^2 f||, \quad f \in W^4, \tag{3.46}$$

уже с величиной (1.2).

Если $f \in W^4$, то функция $f_\delta(x) = f(\delta x),\ \delta > 0$, также принадлежит W^4. При этом

$$\|f_\delta\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_\delta(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\delta^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(\delta x)|^2 d(\delta x)\right)^{1/2} = \delta^{-n/2}\|f\|.$$

Далее, имеем $(\Delta^2 f_\delta)(x) = \delta^4(\Delta^2 f)(\delta x)$ и потому

$$\|\Delta^2 f_\delta\| = \delta^4\,\delta^{-n/2}\|\Delta^2 f\|.$$

Точно так же имеем

$$\|\Delta f_\delta\| = \delta^2\,\delta^{-n/2}\|\Delta f\|.$$

Подставим функцию f_δ в неравенство (3.46), заменив нормы $\|f_\delta\|$, $\|\Delta f_\delta\|$, $\|\Delta^2 f_\delta\|$, полученными только что выражениями и поделив на $\delta^2\,\delta^{-n/2}$, получаем неравенство

$$||\Delta f|| \leqslant \delta^{-2}N\,||f|| + \delta^2 E(N)\,||\Delta^2 f||, \quad f \in W^4. \tag{3.47}$$

Проминимизтровав правую часть по δ^2, приходим к неравенству

$$||\Delta f|| \leqslant 2\sqrt{N\,E(N)} \cdot \sqrt{||f||\,||\Delta^2 f||}, \quad f \in W^4. \tag{3.48}$$

Это есть неравенство (1.4) с константой $2\sqrt{N\,E(N)}$. Поскольку уже доказано, что константа $C = 1$ в неравенстве (1.4) является наименьшей, то справедлива оценка $2\sqrt{N\,E(N)} \geq 1$. Таким образом, при любом $N > 0$ имеет место неравенство

$$E(N) \geq \frac{1}{4\,N}, \quad N > 0. \tag{3.49}$$

При $N = \frac{1}{2h^2}$ неравенство (3.49) превращается в (3.44).

Оценки (3.44) и (3.20) дают равенство (1.3). Теорема 1 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В магистерской диссертации изучены две родственные экстремальные задачи для оператора Лапласа в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ измеримых функций $n \geq 2$ переменных, квадрат которых суммируем на всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

1. Вариант задачи Стечкина о наилучшем приближении оператора Лапласа Δ линейными ограниченными операторами с нормой, не превосходящей заданного числа N, на классе $Q^4 = \{f \in L_2(\mathbb{R}^n)\colon \|\Delta^2 f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq 1\}$ функций $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, норма второй степени оператора Лапласа которых ограничена единицей. Задача состоит в вычислении величины наилучшего приближения $E(N)$ и отыскании наилучшего аппроксимирующего оператора.

2. Точное неравенство Колмогорова $\|\Delta f\| \leq C\sqrt{\|f\| \times \|\Delta^2 f\|}$ на множестве $W^4 = \{f \in L_2(\mathbb{R}^n)\colon \Delta^2 f \in L_2(\mathbb{R}^n)\}$ функций $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, вторая степень оператора Лапласа которых также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Для решения поставленных задач была использованна известная схема рассуждений, восходящая к С. Б. Стечкину, которая дает оценку $2\sqrt{N\,E(N)} \geq C$. В работе преъявлен конкретный аппроксимирующий оператор S^*, который дает оценку сверху для величины $E(N)$, а как следствие, и для константы C, и семейство функций $\{f_\delta\}_{\delta>0} \subset W^4$, которое дает оценку снизу константы C, а значит, и величины $E(N)$. Как для $E(N)$, так и для C эти оценки совпали. Тем самым получено решение обеих задач.

В начале диссертации изложены результаты первых работ в этой тематике С. Б. Стечкина и В. В. Арестова, а также статьи Ю. Н. Субботина и Л. В. Тайкова, имеющие непосредственное отношение к исследованиям автора.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1 Стечкин С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. – 1967. – Т. 1, № 2. – С. 137–148.

2 Арестов В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи матем. наук. – 1996. – Т. 51, № 6. – С. 89–124.

3 Арестов В. В. О наилучшем приближении операторов дифференцирования // Матем. заметки. – 1967. – Т. 1, № 2. – С. 149–154.

4 Субботин Ю. Н., Тайков Л. В. Наилучшее приближение оператора дифференцирования в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 1968. – Т. 3, № 2. – С. 157–164.

5 Тайков Л. В. Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования // Матем. заметки. – 1968. – Т. 4, № 2. – С. 233–238.

6 Шилов Г. Е. Математический Анализ. Второй специальный курс. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 436 с.

7 Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973, – 344 с.

8 Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974, – 319 с.