

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

БАЙДАКОВА НАТАЛИЯ ВАСИЛЬЕВНА

Полиномиальная интерполяция на симплексах

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
д. ф.-м. н., проф., чл.-корр. РАН
Субботин Юрий Николаевич

Екатеринбург – 2018

Содержание

Список обозначений	3
Введение	6
Глава 1. Константа и функция Лебега для интерполяционных многочленов Лагранжа на d-симплексах	47
§ 1.1. Порядок роста констант Лебега	47
§ 1.2. Оценка снизу функции Лебега	69
Глава 2. Оценки погрешности аппроксимации производных в случаях простой и кратной интерполяции на треугольниках и тетраэдрах	76
§ 2.1. Оценки сверху для простых конечных элементов	76
§ 2.2. Оценки снизу для простых конечных элементов	119
§ 2.3. Оценки сверху для составного конечного элемента	139
§ 2.4. Оценки снизу для составных конечных элементов	150
Глава 3. Об оценках погрешности аппроксимации производ- ных в случае интерполяции Лагранжа на d-симплексах	165
§ 3.1. Новая геометрическая характеристика симплекса и ее срав- нение с характеристикой П. Жамэ	166
§ 3.2. Оценки снизу погрешности аппроксимации производных . .	172
§ 3.3. Линейная интерполяция на тетраэдре	194
Заключение	198
Список литературы	200

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ — соответственно множества действительных, целых, натуральных чисел; \mathbb{R}_+ — множество неотрицательных действительных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$;

$$d \in \mathbb{N}, \quad d \geq 2;$$

$\mathbb{R}^d = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_d) : u_1, u_2, \dots, u_d \in \mathbb{R}\}$ — d -мерное евклидово пространство;

$$n \in \mathbb{N};$$

$C_k^s = \binom{k}{s} = \frac{k!}{s!(k-s)!}$ — биномиальные коэффициенты ($k, s \in \mathbb{N}$, $k \geq s$);

$\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера;

$\Delta \subset \mathbb{R}^d$ — невырожденный d -симплекс с вершинами a_1, a_2, \dots, a_{d+1} ;

$H = H(\Delta)$ — диаметр Δ ;

если $u \in \Delta$, то $\lambda(u) = \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ — барицентрические координаты точки u симплекса относительно вершин a_1, a_2, \dots, a_{d+1} , т. е. $u = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{d+1} a_{d+1}$, $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, d+1}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_{d+1} = 1$;

$u(\lambda)$ — точка, имеющая барицентрические координаты $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1})$;

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — замыкание некоторой области в \mathbb{R}^d (далее для краткости договоримся называть Ω областью); мы считаем, что Ω может быть триангулирована, т. е. представлена в виде объединения конечного числа d -симплексов таким образом, что любые два симплекса либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую грань размерности s , $1 \leq s \leq d-1$, т. е. Ω является многогранником в \mathbb{R}^d ;

$C(\Delta)$ — множество действительных функций, определенных и непрерывных на Δ ;

$D_{\xi_1 \dots \xi_s}^s f$ — производная порядка s функции $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ по направлениям произвольных единичных векторов $\xi_1, \dots, \xi_s \in \mathbb{R}^d$;

$W^{n+1}M(\Omega) = W^{n+1}M$ — множество функций, непрерывных на Ω вместе со всеми своими частными производными до порядка $n + 1$ включительно, у которых все производные порядка $n + 1$ ограничены по модулю константой $M \geq 0$ (в частности, может быть $\Omega = \Delta$);

τ_{ij} ($i \neq j$) — единичные векторы, направленные от a_i к a_j ;

$a_i a_j = [a_i, a_j]$ — отрезки (ребра симплекса Δ), соединяющие вершины a_i и a_j ;

$d_{ij} = |a_i a_j| = |a_i - a_j|$ — длина ребра $a_i a_j$ симплекса Δ ;

$\|f\|_\Delta = \sup_{u \in \Delta} |f(u)|$ (везде в тексте, где не сказано иное, под нормой понимается $\|\cdot\|_\Delta$).

$P_n^d[f](u) = P_n^d(u) = P_n^d[f](\lambda) = P_n^d(\lambda)$ — многочлен степени не выше n по совокупности переменных, являющихся координатами точки $u \in \Delta$ (в некоторой системе координат), удовлетворяющий каким-либо условиям интерполяции функции $f \in W^{n+1}M(\Delta)$;

$$\mathbf{E}_{n,s}^d = \mathbf{E}_{n,s}^d(\Delta) = \mathbf{E}_s(\Delta, P_n^d) = \sup_{\substack{f \in W^{n+1}M(\Delta), \\ \xi_i \in \mathbb{R}^d, \|\xi_i\|=1, i=1, \dots, s}} \|D_{\xi_1 \dots \xi_s}^s (f - P_n^d)\|_\Delta$$

— величина погрешности аппроксимации производных порядка s функции f интерполяционным многочленом P_n^d на Δ (отметим, что величина $\mathbf{E}_{n,s}^d$ зависит от способа выбора интерполяционных условий, используемых при задании многочлена P_n^d);

Если $d = 2$, т. е. Δ — треугольник с вершинами a_1, a_2, a_3 , то используем также следующие обозначения:

n_{ij} ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$) — вектор единичной нормали к стороне $a_i a_j$;

α, β, γ — углы треугольника при вершинах a_1, a_2, a_3 , причем мы считаем, что $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, т. е. $a_1 a_2$ — наибольшая сторона треугольника;

S_3, S_Δ — кусочно полиномиальные функции, интерполирующие функцию $f \in W^{n+1}M(\Delta)$ на Δ и являющиеся соответственно многочленами

степени $n = 3$ или $n \in \mathbb{N}$ на каждом из треугольников, на которые триангулирован треугольник Δ (детали см. в § 2.3 и §2.4);

$$\mathcal{E}_{n,s} = \mathcal{E}_{n,s}(\Delta) = \mathcal{E}_{n,s}(\Delta, S) = \sup_{\substack{f \in W^{n+1}M(\Delta), \\ \xi_i \in \mathbb{R}^d, \|\xi_i\|=1, i=1,\dots,s}} \operatorname{ess\,sup}_{u \in \Delta} |D_{\xi_1 \dots \xi_s}^s (f(u) - S(u))|$$

— величина погрешности аппроксимации производных порядка s функции f соответствующими производными кусочно-полиномиальной функции S , где $S = S_3$, $n = 3$ или $S = S_\Delta$, $n \in \mathbb{N}$ (величина $\mathcal{E}_{n,s}$, как и $\mathbf{E}_{n,s}^d$, зависит от способа выбора интерполяционных условий, используемых при задании кусочно полиномиальной функции S).

Будем писать, что функции нескольких переменных ψ_1 и ψ_2 находятся в отношении порядка $\psi_1 \underset{\alpha_1, \dots, \alpha_s}{\lesssim} \psi_2$ (или $\psi_1 \underset{\alpha_1, \dots, \alpha_s}{\gtrsim} \psi_2$), где $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ — некоторые числовые параметры, если найдется положительное число $C(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$, зависящее от $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, такое, что $\psi_1 \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_s)\psi_2$ (или $\psi_1 \geq C(\alpha_1, \dots, \alpha_s)\psi_2$) для всех значений аргументов ψ_1 и ψ_2 . Если $\psi_1 \underset{\alpha_1, \dots, \alpha_s}{\lesssim} \psi_2 \underset{\alpha_1, \dots, \alpha_s}{\lesssim} \psi_1$, то будем писать $\psi_1 \underset{\alpha_1, \dots, \alpha_s}{\asymp} \psi_2$. Аналогично будем использовать обозначения $\psi_1 \lesssim \psi_2$, $\psi_1 \gtrsim \psi_2$, $\psi_1 \asymp \psi_2$, если найдется такая положительная константа C , что соответственно выполняются соотношения $\psi_1 \leq C\psi_2$, $\psi_1 \geq C\psi_2$, $\psi_1 \lesssim \psi_2 \lesssim \psi_1$.

Введение

Предметом изучения диссертации являются вопросы, связанные с полиномиальной интерполяцией и аппроксимацией функций многих переменных на d -симплексе в равномерной норме (рассматриваются случаи $d = 2, 3$ или $d \in \mathbb{N}$). Способы интерполяции на произвольном симплексе выбираются таким образом, чтобы результирующий сплайн, определенный на триангулированной области, обладал свойством непрерывности или гладкости порядка m , $m \geq 1$ (под сплайном мы понимаем функцию, которая на каждом симплексе из триангуляции области Ω является алгебраическим многочленом, причем эти многочлены задаются таким образом, чтобы результирующая кусочно-полиномиальная функция на всей области обладала свойством непрерывности или гладкости заданного порядка; под гладкостью порядка m — существование и непрерывность всех производных до порядка m включительно). В первой и третьей главах рассматривается интерполяция Лагранжа (интерполируются значения приближаемой функции) в равномерных узлах симплекса. Такой выбор интерполяционных условий часто используется в методе конечных элементов, но может также представлять самостоятельный интерес как способ аппроксимации функции. Во второй главе рассмотрен ряд способов интерполяции Эрмита и Биркгофа (интерполируются значения приближаемой функции и значения ее производных: последовательных — в случае интерполяции Эрмита, и с пропусками — в случае интерполяции Биркгофа) с интерполяцией производных высокого порядка в связи с изучением возможности применения соответствующих сплайнов, построенных на триангулированной исходной области, в методе конечных элементов.

Актуальность темы.

В первой главе изучаются константа и функция Лебега для интерполяционного процесса по равномерным узлам произвольного симплекса в \mathbb{R}^d .

Пусть $\{a_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}}\}$ — узлы равномерной сетки на d -симплексе $\Delta \subset \mathbb{R}^d$, т. е. узлы, имеющие следующие барицентрические координаты:

$$a_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}} = \left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}, \dots, \frac{i_{d+1}}{n} \right), \quad (0.0.1)$$

$$i_k \in \{0, \dots, n\}, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_{d+1} = n.$$

Для $f \in C(\Delta)$ строится алгебраический многочлен $P_n^d[f](\lambda) = P_n^d(\lambda) = P_n^d[f](u) = P_n^d(u)$ степени не выше n по совокупности переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}$, интерполирующий функцию $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ в узлах равномерной сетки (0.0.1), т. е. удовлетворяющий условиям

$$P_n^d(a_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}}) = f(a_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}}), \quad i_k \in \{0, \dots, n\}, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_{d+1} = n.$$

Известно, что такой многочлен существует и единственный (например, это следует из работы Р.А. Николайдиса [65], в которой построены соответствующие фундаментальные многочлены). Обозначим через $L_n^d(u) = L_n^d(\lambda)$, $u = u(\lambda) \in \Delta$, функцию Лебега лагранжева процесса интерполяции в равномерных узлах симплекса функции $f \in C(\Delta)$ алгебраическими многочленами $P_n^d[f]$, т. е. норму функционала в пространстве $C(\Delta)$, ставящего в соответствие каждой непрерывной функции f значение ее интерполяционного многочлена в точке $u(\lambda)$ симплекса Δ ; через L_n^d — константу Лебега указанного интерполяционного процесса, т. е. норму оператора, действующего из $C(\Delta)$ в $C(\Delta)$, который каждой непрерывной функции ставит в соответствие ее интерполяционный многочлен степени не выше n по совокупности переменных. Таким образом,

$$L_n^d(u) = L_n^d(\lambda) = \sup_{\substack{f \in C(\Delta) \\ f \neq 0}} \frac{|P_n^d[f](\lambda)|}{\|f\|_\Delta}, \quad u = u(\lambda) \in \Delta,$$

$$L_n^d = \sup_{\substack{f \in C(\Delta) \\ f \neq 0}} \frac{\|P_n^d[f]\|_\Delta}{\|f\|_\Delta}.$$

Известно, что $L_n^d = \max_{u(\lambda) \in \Delta} L_n^d(\lambda)$ (для одномерного случая см., например, [4]; многомерный случай доказывается аналогично).

Константы Лебега позволяют получать оценки неустранимой погрешности интерполирования, обусловленной ошибками задания значений интерполируемой функции в узлах: если ошибки задания функции не превосходят ε , то неустранимая погрешность интерполирования оценивается сверху величиной $L_n^d \varepsilon$ (это следует из определения константы Лебега). Кроме того, константы Лебега могут быть использованы при исследовании сходимости интерполяционных процессов. Известно, что интерполяционный процесс для заданной матрицы узлов сходится, если $E_n(f)L_n^d \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где $E_n(f)$ — величина наилучшего приближения в равномерной метрике интерполируемой функции f множеством многочленов степени не выше n (доказательство для одномерного случая может быть найдено, например, в [16] или в [4]; многомерный случай доказывается аналогично). Аналогичные утверждения справедливы и для функции Лебега: если ошибки задания функции не превосходят ε , то неустранимая погрешность интерполирования функции в точке u оценивается сверху величиной $L_n^d(u)\varepsilon$ (следует из определения); если в некоторой точке $u \in \Delta$ справедливо соотношение $E_n(f)L_n^d(u) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то в точке u интерполяционный процесс сходится для заданной матрицы узлов (см. [4] или [16]).

Для $d = 1$ А.Х. Турецким [23] в 1940 г. (см. также [24, с. 42]) была найдена асимптотика по n константы Лебега

$$L_n^1 = \frac{2^{n+1}}{e n \ln n} (1 + \varepsilon_n), \quad \text{где} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0. \quad (0.0.2)$$

По-видимому, этот результат не получил своевременной широкой известности за рубежом, и оценки для L_n^1 впоследствии выводились рядом других авторов. Среди этих оценок имеются как более слабые, так и еще раз доказанная асимптотика. В частности, равенство (0.0.2) было независимо доказано А. Шёнхаге [69] в 1961 г. (точнее, формулировка результата в [69] аналогична формуле (0.0.2), однако в реальности в [69] доказан несколько более сильный результат, дающий первые слагаемые асимптотического раз-

ложения константы Лебега L_n^1 при $n \rightarrow \infty$). Обзор других результатов, полученных до 1991 г. можно найти в работе Л. Трефетена и Дж. Видемана [73]. В 1992 г. Т.М. Милсом и С. Смитом [63] получено асимптотическое разложение для $\ln L_n^1$, уточняющее результат из [69]. В 2004 г. А. Айзинберг, Г. Феделе, Г. Франц [49] получили новый вид асимптотики для L_n^1 , однако ввиду сложности найденного представления авторы не провели его сравнение с перечисленными выше результатами для произвольного n , но численно установили некоторое преимущество найденной асимптотики для $33 \leq n \leq 200$ в терминах относительной погрешности.

Для произвольных $d, n \in \mathbb{N}$ Л.П. Бос [36] в 1983 г. показал, что

$$L_n^d \leq \binom{2n-1}{n} \asymp \frac{4^n}{\sqrt{n}}; \quad L_n^d \rightarrow \binom{2n-1}{n} \quad \text{при } d \rightarrow \infty.$$

Позднее (в 1988 г.) Т. Блумом [35] было установлено, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log L_n^d}{n} = \log 2$$

и

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log L_n^d(\lambda)}{n} = \max\{\log \varphi(\lambda_1), \dots, \log \varphi(\lambda_{d+1})\}, \quad (0.0.3)$$

где

$$\varphi(t) = 2t^t(1-t)^{1-t}. \quad (0.0.4)$$

Для функции Лебега в случае отрезка (т. е. $d = 1$, $\Delta = [0, 1]$, $u = x \in [0, 1]$, $L_n^1(u) = L_n^1(x)$) и узлов интерполяции, определяемых формулой (0.0.1), имеет место следующая теорема.

Теорема 0.А [4, §4 гл. 5, теорема 1]. *Для любого $x \in (0, 1)$, $x \neq 1/2$, найдется последовательность номеров $n_k \rightarrow \infty$, для которых выполняются неравенства*

$$L_{n_k}^1(x) \geq c(x) \frac{1}{\sqrt{n_k}} [\varphi(x)]^{n_k},$$

где $c(x) = c_0 \sqrt{x(x-1)} |\cos \pi x| > 0$, c_0 — положительная константа, функция φ определена в (0.0.4).

В первой главе диссертации будет найден порядок роста константы Лебега L_n^d по n при фиксированном $d \geq 2$. Также будет доказано утверждение, являющееся аналогом теоремы 0.А для d -симплекса ($d \geq 2$) и дающее оценку снизу для подпоследовательности $L_{n_k}^d(\lambda)$ ($k \rightarrow \infty$), которая является более точной, чем оценка снизу, вытекающая из (0.0.3).

Вторая и третья главы посвящены получению оценок сверху и снизу величин погрешности аппроксимации функции, заданной на симплексе, и ее производных интерполяционными многочленами типа Лагранжа, Эрмита или Биркгофа и их производными соответственно. А именно, изучается зависимость величин $\mathbf{E}_{n,s}^d(\Delta)$ и $\mathcal{E}_{n,s}(\Delta)$ от геометрических характеристик симплекса, что тесно связано с контролем триангуляции исходной области при применении метода конечных элементов. Согласно лемме Сеа [41] (глава 2, предложение 3.1), оценка погрешности аппроксимации решения краевой задачи кусочно-полиномиальными функциями, полученными в ходе реализации метода конечных элементов, зависит от расстояния между точным решением краевой задачи и построенным подпространством конечных элементов. Поскольку вычисление величины наилучшего приближения функции элементами соответствующего подпространства является достаточно сложной задачей, то для оценки погрешности метода обычно используют не элемент наилучшего приближения из пространства конечных элементов, а интерполяционную кусочно-полиномиальную функцию. Последняя задача, в свою очередь, сводится к проблеме локальной интерполяции на отдельном d -симплексе. Отметим, что при получении оценок сверху обычно (в том числе в диссертации) также решается задача выбора подходящих интерполяционных условий, которые и определяют способ построения пространства конечных элементов, использующегося впоследствии для поиска приближенного решения краевой задачи. От того, какие выбраны условия интерполяции, зависят получаемые оценки погрешности

аппроксимации производных интерполируемой функции. *Конечным элементом* будем называть d -симплекс вместе с выбранными на нем условиями интерполяции функции $f \in W^{n+1}M$. Везде речь будет идти о конечных элементах, применение которых ведет к получению непрерывной или достаточно гладкой результирующей кусочно-полиномиальной функции на триангулированной исходной области Ω .

Во второй главе в основном рассматриваются задачи простой и кратной (в большей степени кратной) интерполяции для случая $d = 2$. Под простой интерполяцией мы будем понимать случаи, когда интерполируются только значения исходной функции f ; под кратной — любые случаи, когда кроме значений функции интерполируются также значения каких-либо ее производных в выбранных точках (в том числе, в частности, значения самой функции в таких точках могут не интерполироваться). Договоримся в обозначении многочлена P_n^d опускать верхний индекс, если из контекста понятно, о какой размерности идет речь.

Пусть $d = 2$ и пусть имеется триангуляция области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. На каждом треугольнике из триангуляции области Ω для $f \in W^{n+1}M(\Omega)$ строится многочлен $P_n = P_n[f]$ степени не выше n по совокупности переменных, интерполирующий функцию f (и ее производные, если речь идет о кратной интерполяции) в некоторых узлах треугольника. Всего задается $(n + 1)(n + 2)/2$ условий интерполяции на каждом треугольнике. В результате на Ω мы получаем интерполяционную кусочно-полиномиальную функцию (сплайн). Будем говорить в таком случае, что сплайн получен с помощью локальной интерполяции. Пусть условия для построения $P_n = P_n[f]$ таковы, что результирующая кусочно-полиномиальная функция на Ω имеет гладкость порядка m , $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 4m + 1$ (последнее ограничение на соотношение между n и m является естественным и обусловлено тем, что при локальной интерполяции степень $n = 4m + 1$ является наименьшей, обеспечивающей гладкость порядка m результиру-

ющего сплайна на Ω — см. [75]).

Построенная кусочно-полиномиальная функция аппроксимирует f , а ее производные аппроксимируют соответствующие производные функции f . Оценки погрешности аппроксимации производных обычно зависят от геометрических характеристик треугольников триангуляции, в связи с чем на триангуляцию, как правило, накладываются определенные требования. Первоначально используемым ограничением на триангуляцию являлось *условие наименьшего угла* — ограничение снизу величин наименьших углов треугольников. Это связано с тем, что во многих первых (ставших широко известными) оценках сверху величин погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционных кусочно-полиномиальных функций в знаменателях дробей, участвующих в этих оценках, присутствуют синусы наименьших углов треугольников, составляющих разбиение исходной области, или их аналоги. В качестве примера можно указать полученные в конце 60-х и начале 70-х годов прошлого века оценки М. Зламала [80], А. Женишека [77], Дж. Брамбла и М. Зламала [37].

Остановимся подробнее на случае $d = 2$, $n = 4m + 1$. Интерес к степени $n = 4m + 1$ обусловлен тем, что эта степень является наименьшей, обеспечивающей гладкость m результирующей кусочно-полиномиальной функции на Ω . В силу того, что мы обсуждаем локальные методы построения кусочно-полиномиальной функции, далее можно ограничиться рассмотрением одного треугольника Δ с вершинами a_1, a_2, a_3 из триангуляции области Ω .

На каждой из сторон $[a_p, a_q]$ выделим множество точек $\left\{ b_{(pq)k}^j \right\}_{j=1}^k$, $k = 1, \dots, m$, таких, что при каждом фиксированном k эти точки делят сторону, которой они принадлежат, на $k + 1$ равных отрезков. Для построения интерполяционного многочлена P_{4m+1} на Δ зададим значения функции и всех ее производных до порядка $2m$ в вершинах треугольника, и по k производных k -го порядка ($k = 1, \dots, m$) по нормальям к каждой

из сторон:

$$\frac{\partial^k P_{4m+1}(a_i)}{\partial \tau_{ij}^{k-l} \partial \tau_{is}^l} = \frac{\partial^k f(a_i)}{\partial \tau_{ij}^{k-l} \partial \tau_{is}^l}, \quad (0.0.5)$$

$$0 \leq k \leq 2m, \quad 0 \leq l \leq k, \quad i = 1, 2, 3; \quad \{j, s\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\};$$

$$\frac{\partial^k P_{4m+1} \left(b_{(pq)k}^j \right)}{\partial n_{pq}^k} = \frac{\partial^k f \left(b_{(pq)k}^j \right)}{\partial n_{pq}^k}, \quad (0.0.6)$$

$$1 \leq k \leq m, \quad 1 \leq j \leq k, \quad 1 \leq p, q \leq 3, \quad p \neq q.$$

Таким образом, задано $3(m+1)(5m+2)/2$ условий и обеспечена принадлежность результирующего сплайна классу $C^m(\Omega)$. Оставшиеся $m(m-1)/2$ условий могут варьироваться. В [37], [77], [81] в 1970–1971 гг. для условий (0.0.5)–(0.0.6) и выбираемых некоторыми способами оставшихся условий доказаны следующие оценки сверху погрешности аппроксимации функций $f \in W^{4m+2}M$ и ее производных:

$$\mathbf{E}_{4m+1,s}^2(\Delta) = \mathbf{E}_s(\Delta, P_{4m+1}) \underset{m}{\lesssim} M H^{4m+2-s} (\sin \alpha)^{-s}, \quad s = 0, \dots, 4m+1.$$

Такого же рода оценки сверху, но для значительно более общей ситуации (произвольной степени n многочлена, произвольной размерности d , широкого класса многомерных областей и широкого множества интерполяционных условий) доказаны в работе Ф. Сьярле и П.А. Равьяра [43] в 1972 г. В случае, когда речь идет о d -симплексе Δ при $d \geq 2$, оценки из [43] для $f \in W^{n+1}M$ имеют вид

$$\|D_{\xi_1 \dots \xi_s}^s (f - Q_n^d)\|_{\Delta} \underset{n}{\lesssim} M \frac{H^{n+1}}{\rho^s}, \quad 0 \leq s \leq n, \quad (0.0.7)$$

где ξ_1, \dots, ξ_s — произвольные единичные векторы, Q_n^d — интерполяционные многочлены типа Лагранжа, Эрмита или Биркгофа степени не выше n по совокупности переменных, для которого положительно решается вопрос о существовании; ρ — радиус шара, вписанного в Δ . Некоторую дополнительную информацию и обзор вариантов обобщений условия наименьшего угла на случаи d -симплексов можно найти в серии совместных

работ Я. Брандтса, С. Коротова, М. Крижека, А. Ханнукайнена [38], [39], [40]. Отметим, что в большинстве уже указанных и цитируемых ниже работ речь идет не только о полученных авторами оценках, но и о выборе способов интерполяции.

С другой стороны, еще в 1949 году в учебнике Г.М. Фихтенгольца [26, п. 602] по сути показано, что если Δ — прямоугольный треугольник, то в любой точке треугольника уклонение в \mathbb{R}^2 градиента функции $f \in W^1M$ от градиента многочлена первой степени, интерполирующего f в вершинах треугольника, стремится к нулю при стремлении к нулю наибольшей стороны треугольника Δ . В 1957 году Дж.Л. Синжем [72, с. 211], а затем независимо в 1965 году К. Фенгом [50] (см. также [51]) для случая линейной интерполяции в вершинах произвольного треугольника Δ были получены оценки сверху величин погрешности аппроксимации производных функции, выражающие зависимость не от наименьшего, а от наибольшего угла треугольника (причем, как позднее стало понятным из работ других авторов, в указанных работах отражена точная зависимость от наибольших углов треугольников). Также в 1975 году Дж. Грегори [52] и в 1976 году И. Бабушкой и А.К. Азизом [33] на примере интерполяционных многочленов малых степеней было отмечено, что условие наименьшего угла треугольника при оценке сверху величин аппроксимации производных может быть заменено на более слабое ограничение на наибольший угол (в L_2). Отметим, что в [52] выписаны явные оценки сверху погрешности аппроксимации для многочленов первой степени, а в [33] доказана только сходимость при выполненном *условии наибольшего угла* (условии отделенности от π наибольшего угла треугольника), но при этом в [33] обсуждаются многочлены первой и второй степеней, а также общий подход к оценкам для многочленов третьей и четвертой степеней.

Существенно более сильный результат был получен в 1976 г. П. Жамэ [57], где доказаны оценки сверху величины погрешности аппрок-

симации функции и ее производных в случае интерполяции Лагранжа по равномерным узлам произвольного d -симплекса для произвольной степени n (впоследствии мы обсудим этот результат более детально).

Позднее для случая лагранжевой интерполяции многочленами степени n по равномерным узлам d -симплекса Ю.Н. Субботиним [17, 18] были получены оценки, отличные от найденных в [57]. В частности, и в [57], и в [18] в случае $d = 2$ оценки принимают вид

$$\mathbf{E}_{n,s}^2(\Delta) = \mathbf{E}_s(\Delta, P_n) \underset{n}{\lesssim} MH^{n+1-s}(\sin \beta)^{-s}, \quad s = 0, \dots, n. \quad (0.0.8)$$

Из (0.0.8) следует, что в случае $d = 2$ условие наименьшего угла, налагаемое на триангуляцию, может быть заменено на условие наибольшего угла (отделенность наибольшего угла от π). Кроме того, Ю.Н. Субботиним были получены неулучшаемые с точностью до знака ” \lesssim ” оценки приближения функций и их производных некоторыми интерполяционными многочленами Эрмита и Биркгофа малых степеней на треугольниках и d -симплексах [17–20], позволяющие ослабить условие наименьшего угла или устанавливающие, что данное условие является существенным. В литературе существует также ряд оценок с достаточно малыми или оптимальными константами. В частности, такие оценки для $d = 2$, $n = 1$ в случае прямоугольных треугольников получены в 1980 г. в книге Ю.С. Завьялова, Б.И. Квасова, В.Л. Мирошниченко [5, глава 2, § 12]. В [18, 19] получены точные оценки аппроксимации функции (для $d \geq 2$, $n = 1$) и ее производных (для $d = 2$, $n = 1$) линейной функцией P_1 , интерполирующей f в вершинах треугольника, и ее производными; также в [19] получены двусторонние оценки аппроксимации функции интерполяционным многочленом Лагранжа в случае $d \geq 2$, $n = 2$. Результаты из [18] и [19], касающиеся оценки величины $\|f - P_1^d\|_{\Delta}$, обобщались в работах Д. Хандскомба [53], Ю.А. Килижекова [6], Ш. Уолдрона [74] (в [53] при $d = 2$ детализируется информация о константах в оценках в зависимости от вида треугольника;

в [6] и независимо в [74] при $d \geq 2$ найдены неулучшаемые поточечные оценки, из которых могут быть получены соответствующие оценки из [18] и [19]). Также можно отметить работу М. Стампфле [71], где для $\|f - P_1\|_\Delta$ выписан ряд оценок сверху для различных классов функции f (функция f может быть в том числе векторной).

Нахождению оценок сверху величины погрешности аппроксимации производных функции при $d = 2$ посвящены также работы Н.В. Латыповой [13] и автора [34], где соответственно найдены интерполяционные условия типа Биркгофа для построения многочленов степеней $4m+3$ и $4m+1$ на треугольнике, дающие возможность ослабить требования к триангуляции (но не избавляющие полностью от присутствия синуса наименьшего угла в знаменателе в оценках погрешности для производных). В частности, для $n = 4m+1$ в [34] при $m \geq 2$ найдены $m(m-1)/2$ условий

$$\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial^{i_1}\tau_{21}\partial^{i_2}\tau_{23}}(f(a_2) - P_{4m+1}(a_2)) = 0, \quad (0.0.9)$$

$$i_1, i_2 \geq m+1, \quad 2m+2 \leq i_1+i_2 \leq 3m,$$

которые вместе с условиями (0.0.5)–(0.0.6) обеспечивают оценки

$$\mathbf{E}_{4m+1,s}^2(\Delta) = \mathbf{E}_s(\Delta, P_{4m+1}) \lesssim_m \frac{MH^{4m+2-s}}{(\sin \beta)^{\max\{1, s-2m\}} (\sin \alpha)^{\min\{s-1, 2m\}}}, \quad (0.0.10)$$

где $s = 1, \dots, 4m+1$ (для $s = 0$ в правой части (0.0.10) остается MH^{4m+2}). В [34] доказано также, что при выбранном способе интерполяции существенная часть этих оценок является неулучшаемой. При $m = 1$ оценки (0.0.10) для условий (0.0.5)–(0.0.6), однозначно задающих интерполяционный многочлен P_5 (известный как многочлен Аргириса [32]) и результаты по неулучшаемости получены в [20].

Ю.Н. Субботиным [21] и автором [84] для $n = 3$, $m = 0$ были построены интерполяционные многочлены Эрмита, для которых также имеют место оценки (0.0.8). Кроме того, следует отметить работы М. Крижека [58],

А. Женишека [78], Т. Апеля [31], Н.В. Латыповой [14], Ю.В. Куприяновой (Ю.В. Матвеевой) [12], [15], связанные с получением оценок на треугольниках при $n = 3$ и уточняющие оценки (0.0.7) из [43] для рассматриваемых авторами случаев; в работах А. Женишека и Я. Ходеровой-Зламаловой [76], Ю.В. Куприяновой [12] рассматривается случай $d = 3$, $n = 3$.

Наряду с оценками сверху представляют интерес оценки снизу величин погрешности аппроксимации, показывающие, что условие наибольшего угла, накладываемое на треугольник, является, вообще говоря, существенным при аппроксимации производных функции, заданной на треугольнике, производными интерполяционного многочлена. Первым и наиболее известным примером, демонстрирующим существенность условия наибольшего угла, является пример Шварца конца 19-го века (описание может быть найдено в [26, п. 623]). Данный пример показывает, что при определенном соотношении диаметра треугольника и величины наибольшего угла может даже не быть сходимости при аппроксимации градиента функции f градиентом линейной функции, заданной на треугольнике и интерполирующей значения f в вершинах треугольника. Также ряд оценок снизу величин $\mathbf{E}_{n,s}^d$ получен в работах Ю.Н. Субботина [18], [20] при доказательстве неулучшаемости соответствующих оценок сверху на множестве функций $W^{n+1}M$ при исследуемых им интерполяционных условиях (в том числе для случая простой интерполяции по равномерным узлам равнобедренного треугольника при произвольном $n \in \mathbb{N}$). Для $d = 2, 3$ и $n = 1$ оценки снизу для аппроксимации производных функции получены Дж.Р. Шевчуком [70] через радиус R описанной окружности треугольника или тетраэдра Δ (доказано, что $|\nabla f_* - \nabla P_1|_\infty \gtrsim MR$ для некоторых специально построенных функций $f_* \in W^2(\Delta)$, $d = 2, 3$). В.А.Клячиным [7] доказано, что при $d = 3$ оценки снизу из [70] не являются точными (а именно, для специальной последовательности тетраэдров и некоторой функции f_{**} показано, что одновременно выполняются условия $R \rightarrow 0$ и $|\nabla f_{**} - \nabla P_1|_\infty \rightarrow \infty$, и

это остается справедливым для $d \geq 3$). Интересно, что даже если функция f , являющаяся решением эллиптической краевой задачи на $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, такова, что для сходимости производных интерполяционного многочлена к производным функции f требуется выполнение условия наибольшего угла, то это не означает, что при аппроксимации функции f (и ее производных) с использованием метода конечных элементов условие наибольшего угла является обязательным. Условие наибольшего угла, вообще говоря, не является необходимым для сходимости метода конечных элементов, пример чего получен С. Коротовым, М. Крижеком, А. Ханнукайненом в [54]. С другой стороны, И. Бабушка, А.К. Азиз [33] и П. Освальд [66] показали, что невыполнение этого условия может также приводить к сколь угодно медленной сходимости и даже расходимости метода конечных элементов (в связи с этой темой см. также работу В. Кучеры [61]).

Ниже в § 2.1 диссертации предложены новые конечные элементы, для которых получены оценки сверху погрешности аппроксимации функций и их производных, более точные по сравнению с известными оценками, полученными ранее для других конечных элементов. В § 2.2 доказано, что для широкого множества способов выбора условий интерполяции, в том числе и для традиционных, при $m \geq 1$ влияние наименьшего угла треугольника на величину погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционного многочлена является существенным для производных порядка 2 и выше. В случае $m = 0$ существенным является влияние среднего (наибольшего) угла (независимо случай $m = 0, n = 1$ для интерполяции функции в вершинах треугольника рассмотрен В. Кучерой [60] в 2016 г.). Как следствие, в диссертации усилены результаты по неувлучшаемости оценок (0.0.10) и показана оптимальность оценок (0.0.10) не только для выбранного частного способа интерполяции, но и для широкого класса интерполяционных условий, обеспечивающих гладкость порядка m результирующего сплайна на Ω . Отметим, что все

оценки получены в предположении $f \in W^{n+1}M(\Omega)$. Исследования оценок сверху, при которых учитывается возможное анизотропное поведение функции и начало которым положено в работах Э. Надлера, Н. Дин, Д. Левина, Ш. Риппа, Е.Ф. Д’Азеведо, Р.Б. Симпсона [64], [47], [45], [46], [68], [48] (см. также обзоры в [29], [30]) выходят за рамки данной диссертации.

В § 2.3 и § 2.4 соответственно получены оценки сверху для *составных конечных элементов* (или, что то же самое, *макроэлементов* — конечных элементов, составленных из нескольких треугольников) типа Сие-Клафа-Точера и оценки снизу для составных конечных элементов некоторого общего вида. В частности, полученные оценки сверху для величин аппроксимации производных первого порядка в случае макроэлементов типа Сие-Клафа-Точера позволяют накладывать на триангуляцию условие наибольшего (а не наименьшего, как это было ранее) угла. Идея построения макроэлементов впервые была предложена Сие в 1962 г. как идея сопряжения трех многочленов малой степени с целью получения гладкой итоговой кусочно-полиномиальной функции на триангулированной исходной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (сведения об этом можно найти в [22, гл. 6]). Реализовано такое сопряжение было Р. Клафом и Дж. Точером в 1965 г. в [44] для трех многочленов 3-й степени (описание можно также найти в [22, гл. 6]). Использование макроэлементов позволяет получать сплайны гладкости порядка m при меньшем числе определяющих параметров конечноэлементного пространства по сравнению с использованием простых (не составных) эрмитовых конечных элементов. Обзор на эту тему можно найти в книге М.-Я. Лая и Л. Шумейкера [62].

В третьей главе диссертации рассматривается интерполяция Лагранжа по равномерным узлам симплекса ($d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$), т. е. Δ является d -симплексом с вершинами a_1, \dots, a_{d+1} ; P_n^d интерполирует функцию $f \in W^{n+1}M(\Delta)$ в узлах равномерной сетки (0.0.1).

Напомним, что из работы Ф. Сьярле и П.А. Равьяра [43] известно, что если $Q_n^d = Q_n^d(f)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа, Эрмита или Биркгофа степени n по совокупности переменных, то при достаточно общих условиях на выбор интерполяционных условий для $f \in W^{n+1}M$ и любых $\xi_1, \dots, \xi_s \in \mathbb{R}^d$ имеют место оценки (0.0.7) Использование таких оценок в методе конечных элементов требует наложения многомерного аналога условия наименьшего угла треугольника на триангуляцию исходной области. Как было отмечено выше, в ряде случаев условие наименьшего угла является избыточным, и его можно заменить на условие наибольшего угла или его многомерный аналог (не определенный однозначно и окончательно к настоящему моменту) в случае $d \geq 3$.

Для произвольных $d \geq 2$ и $n \in \mathbb{N}$ П. Жамэ [57] был получен следующий результат. Пусть $U_d = \{e_s\}_{s=1}^d$ — множество единичных линейно независимых векторов; ξ — произвольный единичный вектор из \mathbb{R}^d ; $\mathfrak{U}_N = \{e_s\}_{s=1}^N$ — множество всех единичных векторов, параллельных ребрам d -симплекса Δ . Пусть θ_s — угол между ξ и прямой с направляющим вектором e_s (т. е. $0 \leq \theta_s \leq \pi/2$). Положим

$$\theta = \theta(\Delta) = \min_{U_d \subset \mathfrak{U}_N} \max_{\xi \in \mathbb{R}^d} \min_{e_s \in U_d} \{\theta_s\}. \quad (0.0.11)$$

Тогда в соответствии с [57] имеют место оценки

$$\mathbf{E}_{n,s}^d = \mathbf{E}_s(\Delta, P_n^d) \underset{n,d}{\lesssim} M \frac{H^{n+1-s}}{(\cos \theta)^s}, \quad s = 0, \dots, n. \quad (0.0.12)$$

Таким образом, если существует число θ_* такое, что

$$\theta \leq \theta_* < \pi/2, \quad (0.0.13)$$

то

$$\mathbf{E}_{n,s}^d = \mathbf{E}_s(\Delta, P_n^d) \underset{n,d}{\lesssim} MH^{n+1-s} \quad (0.0.14)$$

для любых $s = 0, \dots, n$. Очевидно (см. замечание к теореме 3.1 в [57]), если $d = 2$, то $\cos \theta \asymp \sin \gamma$ (напомним, что при $d = 2$ через γ обозначается наибольший угол треугольника).

В дальнейшем разными авторами был получен ряд других условий типа (0.0.13), позволяющих получать оценки (0.0.14). Так, Ю.Н. Субботиным [18] в 1989 г. была введена характеристика

$$\gamma = \max_{0 \leq i \leq d} \min_{j \neq i} \cos \gamma_{ij}, \quad (0.0.15)$$

где γ_{ij} – угол между ребром e_{ij} , соединяющим a_i и a_j , и нормалью к гиперплоскости, проходящей через множество точек $\{a_0, \dots, a_d\} \setminus \{a_j\}$. Для $s = 0, \dots, n$ в [18] доказано, что

$$\mathbf{E}_{n,s}^d = \mathbf{E}_s(\Delta, P_n^d) \underset{n,d}{\lesssim} M \frac{H^{n+1-s}}{\gamma^s}.$$

Это означает, что если существует $\gamma_s > 0$ такое, что

$$\gamma \geq \gamma_s, \quad (0.0.16)$$

то имеет место оценка (0.0.14). В случае $d = 2$ условия (0.0.13) и (0.0.16) эквивалентны и по сути являются условиями на наибольший угол треугольника (наибольший угол должен быть отделен от π). При $d \geq 3$ условие (0.0.13) устанавливает менее жесткие требования к триангуляции исходной области по сравнению с (0.0.16), в то время как условие (0.0.16) является более простым для вычисления.

В [59] М. Крижеком в 1992 г. для $d = 3$ и $n = 1$ введена еще одна характеристика элементов триангуляции, ограничение которой позволяет получить оценки (0.0.14). Пусть α – наибольший из двугранных углов между гранями тетраэдра Δ , ψ – наибольший из углов треугольников, являющихся гранями тетраэдра. В [59] доказано, что если существует $\gamma_\kappa < \pi$ такое, что

$$\alpha \leq \gamma_\kappa, \quad \psi \leq \gamma_\kappa, \quad (0.0.17)$$

то имеет место оценка (0.0.14). В работе В.А. Клячина и А.А. Широкого [10] (2012 г.) аналогичный результат независимо получен для тетраэдров, у которых все двугранные углы являются острыми, что обеспечивает выполнение условий (0.0.17).

Ф. Гетманюк и П. Кнуп [56] в 2008 г. получили оценки сверху величин погрешности аппроксимации производных в других терминах для случая $d = 2, 3$ и $n \in \mathbb{N}$ с учетом возможного анизотропного поведения интерполируемой функции f . Также получению оценок величины аппроксимации градиента интерполируемой функции через специально введенные характеристики d -симплекса при $n = 1$ посвящены работы В.А. Клячина, Е.А. Пабат [9] (2010 г.) и В.А. Клячина [8] (2016 г.). В частности, в [8] для случая произвольного d и $n = 1$ получены оценки с использованием "модифицированного условия пустой сферы", введенного автором. В статье С. Коротова, М. Крижека, А. Ханнукайнена [55] (2017 г.) при получении оценок (0.0.14) использовано понятие синуса d -мерного угла.

Характеристика из (0.0.15) и условия (0.0.16) и (0.0.17) использовались в дальнейшем при $d = 2, 3$ разными авторами для получения оценок в ряде других ситуаций (другие способы интерполяции, другие пространства). В качестве примера можно привести работы Г. Акосты, Р.Г. Дюрана [28] и Г. Акосты, Т. Апеля, Р.Г. Дюрана, А.Л. Ломбарди и [27], где используются условие (0.0.17) и "условие регулярной вершины", эквивалентное условию (0.0.16) при $d = 3$, а также работу Т. Апеля [31], где при $d = 3$ и произвольном n используется условие (0.0.17) и даются обзор и сравнения некоторых других характеристик тетраэдров и треугольников, встречающихся в литературе до 1999 г. Также сведения обзорного характера можно найти в уже упоминавшейся статье [40].

В 2012 г. А. Рэнд [67] указал, что при $d = 3$ условие (0.0.17) эквивалентно условию (0.0.13). Большинство других указанных оценок на классе $W^{n+1}M(\Delta)$ не имеет преимуществ перед (0.0.12). Таким образом, насколько нам известно, на множестве всех возможных триангуляций оценки (0.0.12) для $f \in W^{n+1}M(\Delta)$ являются наиболее точными и общими из имеющихся на сегодняшний день, а условие (0.0.13) является наименее жестким из всех известных условий, позволяющих использовать оцен-

ки (0.0.14) (однако для $d = 2$ и $n = 1$ в этом отношении следует указать работу [18], в которой получены оценки с константами, точными на классе функций W^2M и множестве всех треугольников). Исключение могут составлять результаты из [8] (для "модифицированного условия пустой сферы" при $d \geq 3$ на текущий момент не получено каких-либо сравнений с известными характеристиками, используемыми при оценках сверху величины аппроксимации градиента интерполируемой функции). Также нет сравнений результатов работы [56] при $d = 3$ с оценками из [57].

В § 3.1 диссертационной работы автором вводится новая характеристика Θ симплекса Δ со свойством $\cos \theta \lesssim \sin \Theta \lesssim \sqrt[d]{\cos \theta}$, где θ — характеристика симплекса, определенная в (0.0.11). Замена условия (0.0.13) на (0.0.32) позволяет перейти от вычисления максимума в (0.0.11) по всем $\xi \in \mathbb{R}^d$ к выбору экстремума из конечного числа вариантов. Это делает более простым процесс контроля триангуляции и сравнение оценок (0.0.12) с вновь получаемыми. В § 3.2 приводятся оценки снизу величины погрешности аппроксимации производных функции на классе $W^{n+1}M(\Delta)$, что связано с изучением проблемы неулучшаемости оценок сверху, полученных П. Жамэ. В § 3.3 приводится пример, демонстрирующий, что при $d = 3$, $n = 1$ для некоторого класса тетраэдров оценки (0.0.12) можно несколько улучшить.

Цель работы. 1) Для процесса интерполяции непрерывной функции d переменных алгебраическими многочленами степени n по равномерным узлам d -симплекса при фиксированном d получить точный порядок по степени многочлена n константы Лебега L_n^d ; найти оценку снизу для верхнего предела последовательности функций Лебега $L_n^d(\lambda)$ ($n \rightarrow \infty$) функций Лебега $L_n^d(u)$ при каждом фиксированном $u = u(\lambda) \in \Delta$.

2) Найти новые способы интерполяции (типа Эрмита или Биркгофа) функции из $W^{n+1}M(\Delta)$ алгебраическими многочленами и близки-

ми конструкциями (составные конечные элементы), позволяющие получать непрерывные или гладкие сплайны на триангулированной области и приводящие к более точной аппроксимации производных исходной функции производными аппроксимирующей функции, чем известные ранее способы интерполяции; получить соответствующие оценки сверху погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционных многочленов.

3) Показать, что требование гладкости результирующей кусочно-полиномиальной функции на триангулированной области ведет к тому, что при аппроксимации производных порядка два и выше условие наименьшего угла, накладываемое на триангуляцию, становится неустранимым.

4) Ввести новую характеристику, позволяющую контролировать качество триангуляции и являющуюся более простой для вычисления, чем классическая характеристика П. Жамэ. Показать, что известные оценки сверху погрешности аппроксимации функции и ее производных для случая интерполяции функции из $W^{n+1}M(\Delta)$ алгебраическими многочленами степени n по равномерным узлам d -симплекса, полученные П. Жамэ, для широкого класса симплексов являются качественно неулучшаемыми, а соответствующее ограничение на триангуляцию — неустранимым.

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа и теории приближения функций.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1) Найден точный порядок по n при фиксированном d константы Лебега L_n^d ; получена оценка снизу для верхнего предела последовательности функций Лебега $L_n^d(\lambda)$ ($n \rightarrow \infty$) при каждом фиксированном $u = u(\lambda) \in \Delta$.

2) Предложены новые способы интерполяции функции на треугольни-

ках и тетраэдрах, для которых получены оценки сверху величин $E_{n,s}^d$, более точные по сравнению с известными оценками, полученными ранее для других конечных элементов. При этом также рассмотрены составные конечные элементы.

3) Доказано, что для широкого множества способов выбора условий интерполяции функции двух переменных на треугольнике, в том числе традиционных, обеспечивающих локальное задание сплайна и гладкость порядка $m \geq 1$, влияние наименьшего угла треугольника на величину погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционного многочлена является существенным для производных порядка 2 и выше. В случае $m = 0$ доказано, что существенным является влияние среднего (наибольшего) угла. В том числе рассмотрены составные конечные элементы.

4) Введена новая характеристика симплекса, со свойствами, аналогичными свойствам характеристики П. Жамэ, являющаяся более простой для вычисления и использования на практике. С помощью этой характеристики показано, что во многих случаях условие на триангуляцию, введенное П. Жамэ в связи с интерполяцией Лагранжа по равномерным узлам d -симплекса и обеспечивающее сходимость метода конечных элементов, является неулучшаемым. Таким образом, показано, что оценки П. Жамэ для величины $E_{n,s}^d$ являются близкими к оптимальным и должны приниматься во внимание при исследовании и использовании величины $E_{n,s}^d$.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при аппроксимации поверхностей, при решении краевых задач методом конечных элементов. Развитые методы могут быть использованы при дальнейшем изучении способов аппроксимации производных функции производными интерполяционных многочленов и получении соответству-

ющих оценок погрешности аппроксимации.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [83]–[93] (без соавторов) в изданиях, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на летних Школах С.Б. Стечкина (Миасс 2000, 2002, 2011, 2012, 2013, 2015; Алексин, 2007), на 16-й и 18-й Саратовских зимних школах "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2012 и 2016), на Двенадцатой международной Казанской летней научной школе-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 2016), на всероссийских конференциях "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", посвященных памяти В.К. Иванова (Екатеринбург, 2001, 2008, 2011; Челябинск, 2014), на российских конференциях "Методы сплайн-функций", посвященных памяти Ю.С. Завьялова (Новосибирск, 2001, 2011), на международной конференции "Функциональные методы теории аппроксимации и теории операторов", посвященной памяти В.К. Дзядыка (Украина, Волынская область, 2009), на конференции "Теория приближения функций и ее приложения" (Украина, Каменец-Подольский, 2012), на IX Всероссийском совещании по проблемам построения сеток (Абрау-Дюрсо, 2002), на 3-й, 4-й, 7-й Всероссийских конференциях "Актуальные проблемы прикладной математики и механики", посвященной памяти академика А.Ф.Сидорова (Абрау-Дюрсо, 2006, 2008, 2014), на 31-й Региональной молодежной конференции (Екатеринбург, 2000), на международной школе-конференции "Геометрический анализ и его приложения" (Волгоград, 2016), на совместном семинаре отдела теории приближения функций и отдела аппроксимации и приложений Института математики и механики УрО РАН под руководством чл.-корр. РАН Ю.Н. Субботина и проф. Н.И. Черных (многократно), на семинаре лаборатории численных методов математического анализа Института

математики им. С.Л.Соболева (рук. к.ф.-м.н. В.Л. Мирошниченко).

Обзор основных результатов диссертации.

В главе 1 для $f \in C(\Delta)$, $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ рассматривается задача интерполяции многочленами степени n по равномерным узлам d -симплекса Δ , задаваемым формулой (0.0.1). В § 1.1 найден точный порядок по n при фиксированном d константы Лебега L_n^d ; в § 1.2 получена оценка снизу по n при фиксированном d для верхнего предела последовательности функций Лебега $L_n^d(u)$ в любой точке $u \in \Delta$. А именно, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.1.1. *Для константы Лебега интерполяционного процесса по равномерным узлам (0.0.1) на d -симплексе Δ при фиксированном $d \geq 2$ справедлива двусторонняя оценка*

$$C_1 \frac{2^n}{n \ln n} \leq L_n^d \leq C_2(d) \frac{2^n}{n \ln n} .$$

где C_1 — некоторая положительная константа, а величина $C_2(d)$ может зависеть от d (но не зависит от n).

Введем множество числовых последовательностей

$$\mathcal{A} = \left\{ \{ \alpha_n \}_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n > 0, \alpha_n \rightarrow \infty \text{ и } \alpha_n/n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \right\}.$$

Теорема 1.2.1. *Пусть $d \geq 2$, $u \in \Delta$, $\{ \alpha_n \}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$. Если существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n_0$ выполнено соотношение $\lambda_0 = \lambda_0(u) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{s=1,2,\dots,d+1} \lambda_s \geq \alpha_n/n$, то найдется последовательность номеров $n_k \rightarrow \infty$ (при $k \rightarrow \infty$), для которых выполняются неравенства*

$$L_{n_k}^d(u) = L_{n_k}^d(\lambda) \geq c_d(\lambda_0) \frac{\sqrt{\alpha_{n_k}}}{n_k^{1+d/2}} [\varphi(\lambda_0)]^{n_k},$$

где $\varphi(\lambda_0) = 2\lambda_0^{\lambda_0}(1-\lambda_0)^{1-\lambda_0}$, $c_d(\lambda_0) = C_d |\cos \pi \lambda_0| / \pi$, C_d — некоторая положительная величина, которая может зависеть только от d .

Напомним, что теорема 1.2.1 является аналогом теоремы 0.А, доказанной в [4] для $d = 1$.

В **главе 2** преимущественно рассматривается случай $d = 2$ (за исключением второго параграфа, где $d = 2$ и $d = 3$). Поэтому, говоря о главе 2, мы будем считать, что $d = 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Δ — произвольный треугольник из триангуляции области Ω , если не сказано иное. Считаем, что $f \in W^{n+1}M(\Omega)$, $u = (x, y)$ — произвольная точка треугольника $\Delta \subset \Omega$, который помещен в прямоугольную систему координат Oxy таким образом, что его наибольшая сторона a_1a_2 параллельна оси Ox . Так как $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$ (напомним, что α, β, γ — величины углов при вершинах a_1, a_2, a_3 соответственно), то $a \leq b$, и диаметр Δ равен $a + b = H$.

Отметим, что два треугольника из триангуляции называются *соседними*, если они имеют общую сторону.

В **§ 2.1** предложен ряд новых способов интерполяции функции двух переменных и доказаны соответствующие этим способам интерполяции оценки сверху величин аппроксимации производных функции в равномерной метрике.

Для $n = 3$, $f \in W^4M(\Omega)$ и многочлена $P_3 = P_3[f]$, удовлетворяющего интерполяционным условиям

$$P_3(a_i) = f(a_i), \quad \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial x} = \frac{\partial f(a_i)}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial y} = \frac{\partial f(a_i)}{\partial y}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (0.0.18)$$

$$\frac{\partial^2 P_3(a_2)}{\partial \tau_{21} \partial \tau_{23}} = \frac{\partial^2 f(a_2)}{\partial \tau_{21} \partial \tau_{23}}, \quad (0.0.19)$$

доказана следующая теорема.

Теорема 2.1.1. *Для способа интерполяции, определяемого условиями (0.0.18)–(0.0.19), справедливы оценки*

$$\mathbf{E}_{3,p}^2 \lesssim \frac{MH^{4-p}}{\sin^p \beta}, \quad p = \overline{0, 3}. \quad (0.0.20)$$

Отметим, что оценки (0.0.20) и другие оценки подобного типа, которые получены в диссертации, являются точными по порядку величины H . Это не является предметом исследования и следует из оценок в одномерном

случае, к которому можем прийти, рассмотрев оценки величин аппроксимации функции из $W^{n+1}M$ и ее производных на ребре симплекса, длина которого совпадает с H . В диссертации изучается вопрос зависимости оценок от углов треугольника в случае $d = 2$ или от аналогичных характеристик симплекса при $d \geq 3$. Также заметим, что оценки (0.0.20) дают положительный ответ на вопрос о корректности предложенного способа интерполяции (т. е. о существовании и единственности многочлена P_3), поскольку вопрос существования интерполяционного многочлена решается положительно в силу существования решения соответствующей системы уравнений, и из (0.0.20) следует, что если $f(x, y) \equiv 0$, т. е. $M = 0$, то существует единственный интерполяционный многочлен, удовлетворяющий рассматриваемым интерполяционным условиям, а именно, $P_3(x, y) \equiv 0$. Для других способов интерполяции вопросы существования интерполяционного многочлена решаются аналогичным образом, и поэтому в дальнейшем обсуждаться не будут.

Замена условия (0.0.19) на условие

$$\frac{\partial^3 P_3}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f(a_2)}{\partial y^3}, \quad (0.0.21)$$

позволяет несколько уменьшить правую часть (0.0.20).

Теорема 2.1.2. *Пусть многочлен $P_3(x, y)$ удовлетворяет условиям (0.0.18), (0.0.21). Тогда имеют место оценки*

$$\mathbf{E}_{3,p}^2 \lesssim MH^{4-p} (\sin \beta)^{-\min\{2,p\}}, \quad p = \overline{0, 3}.$$

Задача интерполяции функции многочленами 3-й степени при условиях (0.0.18), (0.0.21) уже рассматривалась в [14], однако в знаменателях дробей, участвующих там в оценках сверху для производных второго и третьего порядков, присутствовал синус наименьшего угла треугольника. Отметим, что в [21] и независимо в [78] доказаны (разными способами) теоремы, аналогичные теореме 2.1.1, для случаев, когда вместо (0.0.19) используются

другие условия (в [78] получены оценки погрешности аппроксимации только для первых производных функции).

Метод, использованный при доказательстве теоремы 2.1.2, применяется при доказательстве следующей теоремы. Дадим некоторые определения. Пусть Q — множество равномерных узлов на треугольнике Δ , т. е.

$$Q = \{u_{ijk}\}_{(i,j,k) \in I} = \{u_{ijk} \mid u_{ijk} = (i/n)a_1 + (j/n)a_2 + (k/n)a_3, (i, j, k) \in I\},$$

где

$$I = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}_+; i + j + k = n\}.$$

Рассмотрим множество троек чисел

$$I_0 = \{(i, j, k) \in I \mid i \cdot j \cdot k = 0\}$$

и соответствующее подмножество Q_0 множества Q (точки из Q , принадлежащие сторонам треугольника):

$$Q_0 = \{u_{ijk} \mid u_{ijk} = (i/n)a_1 + (j/n)a_2 + (k/n)a_3, (i, j, k) \in I_0\}.$$

Пусть многочлен $P_n = P_n^2[f]$ степени не выше n по совокупности переменных определяется следующими условиями:

$$P_n(u) = f(u) \tag{0.0.22}$$

для всех $u \in Q_0$ и

$$\frac{\partial^{i+j} P_n(a_2)}{\partial \tau_{12}^i \partial n_{12}^j} = \frac{\partial^{i+j} f(a_2)}{\partial \tau_{12}^i \partial n_{12}^j}, \tag{0.0.23}$$

для всех $j = \overline{3, n}$, $i = \overline{0, n-j}$.

Теорема 2.1.6. Пусть многочлен P_n определяется условиями (0.0.22)–(0.0.23). Тогда для любого числа $\beta_0 < \pi/2$ и любого треугольника Δ , удовлетворяющего условию $\beta \leq \beta_0$, справедливы оценки

$$\mathbf{E}_{n,s}^2 \leq \begin{cases} C(n, \beta_0) M H^{n+1-s} \sin^{-s} \gamma, & s = 0, 1, 2, \\ C(n, \beta_0) M H^{n+1-s} \sin^{-2} \gamma, & s = 3, \dots, n, \end{cases} \tag{0.0.24}$$

где $C(n, \beta_0)$ — неотрицательная величина, зависящая только от n и β_0 .

Вместо условий (0.0.23) при определении многочлена P_n можно использовать аналогичные условия в наибольшем угле треугольника, т. е. пусть

$$\frac{\partial^{i+j} P_n(a_3)}{\partial \tau_{31}^i \partial n_{31}^j} = \frac{\partial^{i+j} f(a_3)}{\partial \tau_{31}^i \partial n_{31}^j},$$

для всех $j = \overline{3, n}$, $i = \overline{0, n-j}$. В этом случае для любого числа $\gamma_0 \in (0, \pi)$ такого, что $\gamma_0 \neq \pi/2$, и любого треугольника Δ , удовлетворяющего условию $|\cos \gamma| > |\cos \gamma_0|$, имеют место оценки, аналогичные оценкам (0.0.24) (с величинами $C(n, \gamma_0)$ вместо $C(n, \beta_0)$) (см. теорему 2.1.7 в главе 2).

Во втором параграфе второй главы рассмотрен также случай $d = 3$, $n = 3$. В этой ситуации мы считаем, что Δ — тетраэдр из триангуляции множества $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с вершинами a_1, a_2, a_3, a_4 ; $f \in W^4(\Omega)$; T_i — грани Δ напротив вершин a_i ; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — соответственно наименьший, средний и наибольший углы в T_i . Через ϑ_{ij} обозначим угол между τ_{ij} и T_i ; через ϑ_i и ϑ — такие углы, что

$$\sin \vartheta_i = \max_{\substack{1 \leq j \leq 4 \\ j \neq i}} \sin \vartheta_{ij}, \quad \sin \vartheta = \min_{1 \leq i \leq 4} \sin \vartheta_i. \quad (0.0.25)$$

Пусть $P_3 = P_3^3[f]$ — многочлен, интерполирующий функцию f и ее производные на Δ . Такой многочлен задается с помощью 20 интерполяционных условий, из которых 16 традиционно имеют вид

$$P_3(a_i) = f(a_i), \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

$$\frac{\partial P_3(a_i)}{\partial \tau_{ij}} = \frac{\partial f(a_i)}{\partial \tau_{ij}} \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}.$$

Оставшиеся условия могут варьироваться, при этом желательно выбирать их таким образом, чтобы в итоге можно было обеспечить непрерывность кусочно полиномиальной функции на исходной триангулированной области. В диссертации предложены новые способы выбора условий такого рода, основанные на теореме 2.1.1. Эти способы зависят от вида тетраэдра

и однозначно определяют P_3 . В результате получены следующие оценки сверху:

$$\mathbf{E}_{3,r}^3 \lesssim \frac{MH^{4-r}}{\sin^r \vartheta}, \quad r = \overline{0,3} \quad (0.0.26)$$

(теоремы 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5 и следствие 2.1.3).

Оценки (0.0.26) дают ту же точность, что и оценки для кратной интерполяции из [76] при $n = 3$ (с выбором интерполяционных условий другого типа), но используют более простую характеристику тетраэдра. При этом рассматриваемое в диссертации соответствующее пространство конечных элементов имеет меньшую размерность по сравнению с пространствами, строящимися при интерполяции Лагранжа. Отметим, что для обеспечения непрерывности результирующего сплайна на Ω требуются, вообще говоря, некоторые дополнительные ограничения на триангуляцию (отсутствие в триангуляции тетраэдров определенного вида), однако эти ограничения являются наиболее слабыми из применяющихся при кратной интерполяции и известных автору.

Анализируя известные результаты (из рассмотренной выше литературы и представленные в § 2.1 диссертации) при $d = 2$, касающиеся оценок сверху величин погрешности аппроксимации производных функции второго и более высоких порядков соответствующими производными интерполяционных многочленов, можно заметить, что если брать совокупность всех возможных направлений, по которым берутся производные, то синус наименьшего угла треугольника в знаменателях оценок отсутствует только в случаях, когда обеспечивается лишь непрерывность кусочно-полиномиальной функции ($m = 0$). В соответствии с этим наблюдением в § 2.2 диссертации доказано, что для широкого множества способов выбора условий интерполяции, в том числе традиционных, при $m \geq 1$ влияние наименьшего угла треугольника на величину погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционного многочлена яв-

ляется существенным для производных порядка 2 и выше. В случае $m = 0$ существенным является влияние среднего (наибольшего) угла.

Перейдем к более точным формулировкам. Пусть на треугольнике Δ по функции f двух переменных строится интерполяционный многочлен $P_n(u) = P_n^2[f](u)$ таким образом, что сужения $P_n(u)$ и $\partial^k P_n(u)/\partial n_{ij}^k$ ($k = 1, \dots, m$) на любую сторону $a_i a_j$ треугольника однозначно определяются интерполяционными условиями, задаваемыми в точках стороны $a_i a_j$. Если при этом $P_n^*(u)$ — интерполяционный многочлен на соседнем с Δ треугольнике Δ^* , $a_i a_j$ — общая сторона Δ и Δ^* , условия для нахождения $P_n^*(u)$, задаваемые на $a_i a_j$, совпадают с условиями для $P_n(u)$, и это имеет место для всех соседних треугольников, то обеспечена гладкость порядка m кусочно-полиномиальной функции на Ω . Пусть, кроме того, условия для определения $P_n(u)$ задаются таким образом, что для любой стороны $a_i a_j$ треугольника Δ имеют место равенства

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial^k (f(u) - P_n(u))}{\partial n_{ij}^k} \right|_{u \in [a_i, a_j]} = \\ & = \frac{1}{(n+1-k)!} \frac{\partial^{n+1} f(\vartheta_{ij}^k)}{\partial n_{ij}^k \partial \tau_{ij}^{n+1-k}} d_{ij}^{n+1-k} \omega_{ij, n+1-k} \left(\frac{|u - a_i|}{d_{ij}} \right), \quad (0.0.27) \\ & k = 0, \dots, m, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

где $\vartheta_{ij}^k \in a_i a_j$; $\omega_{ij, n+1-k}$ — многочлен одной переменной степени $n+1-k$ со старшим коэффициентом, равным единице; через $|u - a_i|$ обозначено расстояние между u и a_i .

Введем определитель

$$D = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_m \\ \binom{n-2}{m-1} & \binom{n-2}{m} & \dots & \binom{n-2}{2m-2} \\ \binom{n-3}{m-2} & \binom{n-3}{m-1} & \dots & \binom{n-3}{2m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n-m}{1} & \binom{n-m}{2} & \dots & \binom{n-m}{m+1} \end{vmatrix},$$

где

$$d_s = \binom{n-1}{m-1+s} \left(n\omega_{21,n}^{(n-1)}(1) + n\frac{a}{b}\omega_{21,n}^{(n-1)}(1) - \omega_{31,n+1}^{(n)}(1) \right) + \\ + \binom{n}{m+s} \left(\omega_{31,n}^{(n-1)}(1) - \omega_{21,n}^{(n-1)}(1) \right), \\ s = 1, \dots, m;$$

ПОЛОЖИМ

$$g = b\omega_{31,n+1}^{(n)}(1) - (a+b)\omega_{21,n+1}^{(n)}(1).$$

Теорема 2.2.1. Пусть условия интерполяции функции $f \in W^{n+1}M(\Delta)$ на треугольнике Δ многочленом $P_n(u)$, $u \in \Delta$, таковы, что выполнены условия (0.0.27) и имеют место неравенства

$$\left| \omega_{kl,n+1-j}^{(n-j)}(1) \right|_{n,m} \lesssim 1, \quad j = 0, \dots, m, \quad k, l \in \{1, 2, 3\}; \\ |g|_{n,m} \gtrsim a; \\ |D|_{n,m} \gtrsim 1.$$

Тогда найдутся число $\alpha_0 > 0$ и натуральное число $s_0 \geq 2m + 1$ такие что для любого $\alpha < \alpha_0$ имеют место оценки

$$\mathbf{E}_{n,s}^2 \gtrsim_{n,m} \frac{MH^{n+1-s}}{\sin \beta (\sin \alpha)^{s-1}}, \quad s = 1, \dots, s_0; \\ \mathbf{E}_{n,s}^2 \gtrsim_{n,m} \frac{MH^{n+1-s}}{\sin \beta (\sin \alpha)^{s_0-1}}, \quad s = s_0 + 1, \dots, n.$$

Если, кроме того, $m \geq 1$ и

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = 0,$$

то найдутся $\tilde{\alpha}_0 > 0$ и натуральные числа $\{r_i\}_{i=0}^{m+1}$, $2m + 1 = r_0 < r_1 < \dots < r_{m+1} \leq n$ такие что для любого $\alpha < \tilde{\alpha}_0$ имеют место оценки

$$\mathbf{E}_{n,r}^2 \gtrsim_{n,m} \frac{MH^{n+1-r}}{\sin \beta (\sin \alpha)^{2m} (\operatorname{tg} \beta)^{r-2m-1}}, \quad r = r_1, \dots, r_{m+1};$$

$$\mathbf{E}_{n,r}^2 \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{MH^{n+1-r}}{\sin \beta (\sin \alpha)^{2m} (\operatorname{tg} \beta)^{r_{m+1}-2m-1}}, \quad r = r_{m+1} + 1, \dots, n;$$

$$\mathbf{E}_{n,r}^2 \underset{n,m}{\gtrsim} \max \left\{ \frac{MH^{n+1-r}}{\sin \beta (\sin \alpha)^{p_r} (\operatorname{tg} \beta)^{q_r}}, \frac{MH^{n+1-r}}{\sin \beta (\sin \alpha)^{2m} (\operatorname{tg} \beta)^{r_{i-1}-2m-1}} \right\},$$

$$r = r_{i-1} + 1, \dots, r_i - 1, \quad i = 1, \dots, m + 1,$$

где $p_r = \max\{0, 2m - r_i + r\}$, $q_r = \min\{r_i - 2m, r\} - 1$.

Отметим, что условия теоремы 2.2.1 являются естественными для традиционных способов интерполяции функции на треугольнике с целью построения пространства конечных элементов (это обсуждается в замечаниях 2.2.3–2.2.5, которые мы здесь не приводим). Следствием теоремы 2.2.1 (см. замечание 2.2.1) является усиление результатов по неулучшаемости оценок (0.0.10), полученных в [34] (точнее, расширение множества случаев, когда эти оценки являются неулучшаемыми). Более того, утверждение теоремы 2.2.1 означает, что оценки (0.0.10) и соответствующий им выбор условий интерполяции (0.0.5)–(0.0.6), (0.0.9) являются экстремальными (наилучшими из возможных), если речь идет о получении локального сплайна с гладкостью порядка m .

В оставшейся части главы 2 для $d = 2$ исследуются оценки величин погрешности аппроксимации производных функции с помощью составных конечных элементов (когда каждый треугольник из триангуляции в свою очередь разбивается на несколько треугольников).

В § 2.3 получены оценки сверху для элементов типа Сие-Клафа-Точера. Рассматривается ситуация, когда Δ является частным случаем треугольника Сие–Клафа–Точера, т. е. порождает составной конечный элемент, который строится следующим образом. Треугольник Δ разбивается на три треугольника Δ_i с вершинами a_0, a_{i+1}, a_{i+2} , $1 \leq i \leq 3$ (считаем, что $a_4 = a_1, a_5 = a_2$), где точка a_0 является точкой пересечения биссектрис внутренних углов треугольника Δ (мы будем рассматривать именно

такую точку a_0 , тогда как в общем случае при построении треугольника Сие–Клафа–Точера точка a_0 может быть любой точкой внутри Δ ; в случае, когда речь идет о конкретном выборе точки a_0 , обычно берется центр тяжести треугольника, как в [62]). Пусть b_1, b_2, b_3 — середины сторон a_2a_3, a_1a_3, a_1a_2 соответственно; В качестве аппроксиманта функции $f \in W^4M(\Omega)$ на Δ используется гладкая (т. е. из класса $C^1(\Delta)$) кусочно полиномиальная функция S_3 , которая на каждом $\Delta_i, 1 \leq i \leq 3$, является многочленом третьей степени (по совокупности переменных) $P_{3,i}$, для задания которого требуется 10 параметров. Таким образом, для определения S_3 требуется 30 условий. Требование того, что $S_3 \in C^1(\Delta)$ дает 18 условий: например, это могут быть условия непрерывности функции S_3 и ее производных первого порядка по двум несовпадающим направлениям в точке a_0 (всего 6 условий) и в точках a_1, a_2, a_3 (9 условий), а также условие непрерывности нормальных производных при переходе через середины отрезков a_0a_i (3 условия). Кроме того, потребуем, чтобы функция S_3 интерполировала значения функции f и ее производных первого порядка по двум различным направлениям в точках a_1, a_2, a_3 (9 условий) и производные первого порядка по направлениям n_{23}, n_{13}, n_{12} в точках b_1, b_2, b_3 соответственно (3 условия). Доказательство существования такого конечного элемента (а также описание воспроизведенного здесь способа его построения) можно найти в [22]. Отметим, что если все элементы на рассматриваемой триангуляции являются треугольниками Сие–Клафа–Точера, то результирующая кусочно-полиномиальная функция на Ω является гладкой, т. е. принадлежит классу $C^1(\Omega)$.

Теорема 2.3.1. *Имеют место следующие оценки:*

$$\mathcal{E}_{3,s}(\Delta, S_3) \lesssim \begin{cases} MH^4, & \text{если } s = 0, \\ MH^3 \sin^{-1} \beta, & \text{если } s = 1, \\ MH^{4-s} \sin^{-(s-1)} \beta \sin^{-1} \alpha, & \text{если } s = 2, 3. \end{cases} \quad (0.0.28)$$

Отметим, что существовавшие ранее оценки сверху аппроксимации производных для макроэлементов были больше и требовали наложения на триангуляцию условия наименьшего угла (первые оценки были получены Ф. Сьярле в [42] и описаны в [22]; также ряд результатов может быть найден в [62]). Возможность получить оценки (0.0.28) обусловлена в том числе выбором в качестве точки a_0 точки пересечения биссектрис треугольника (ранее наиболее частым выбором являлся центр масс треугольника).

В § 2.4 доказаны оценки снизу величин погрешности аппроксимации производных функций для широкого класса составных конечных элементов. Результаты этого параграфа носят тот же характер, что и утверждение теоремы 2.2.1 из § 2.2. Для точной формулировки результатов дадим необходимые определения.

Пусть T — множество треугольников, из которых состоит триангуляция исходной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; $\Delta \in T$. Пусть треугольник Δ с вершинами a_1, a_2, a_3 является составным конечным элементом, т. е. в свою очередь триангулирован на k треугольников $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_k$; пусть $k \leq k_0$, где k_0 — некоторое заданное натуральное число. Рассматриваются только такие триангуляции треугольника Δ , что для каждой стороны $a_i a_j$ ($i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$) найдется треугольник \mathcal{T}_s ($1 \leq s \leq k$), у которого одна из сторон совпадает с $a_i a_j$. На каждом из треугольников \mathcal{T}_i задается многочлен $P_{n,i} = P_i$ степени не выше n по совокупности переменных. Таким образом, на Δ задана кусочно полиномиальная функция S_Δ . На S_Δ накладываются следующие ограничения.

C1. Кусочно-полиномиальная функция S_Δ интерполирует значения функции f и, возможно, ее производные по избранным направлениям в некоторых точках треугольника Δ , в том числе в вершинах и некоторых точках сторон, и полностью определяется интерполяционными условиями и условием принадлежности классу $C^m(\Delta)$ ($m \geq 1$), т. е. задается локально на Δ .

C2. Если $\tilde{S} = \sum_{\Delta \in T} \tilde{S}_\Delta$, где

$$\tilde{S}_\Delta(u) = \begin{cases} S_\Delta(u), & \text{если } u \in \Delta, \\ 0, & \text{если } u \in \Omega \setminus \Delta, \end{cases}$$

то $\tilde{S} \in C^m(\Omega)$.

Пусть сужения сплайна $S_\Delta(u)$ и его производной $\partial S_\Delta(u)/\partial n_{ij}$ на любую сторону $a_i a_j$ треугольника однозначно определяются интерполяционными условиями, задаваемыми в точках стороны $a_i a_j$ (в силу условий **C1** и **C2** тем же условиям должен удовлетворять сплайн $S_{\Delta^*}(u)$ на соседнем с Δ треугольнике Δ^*). Пусть, кроме того, интерполяционные условия в точках сторон треугольника Δ задаются таким образом, что для любой стороны $a_i a_j$ треугольника Δ имеют место равенства

$$\left. \frac{\partial^s (f(u) - S_\Delta(u))}{\partial n_{ij}^s} \right|_{u \in [a_i, a_j]} = \frac{1}{(n+1-s)!} \frac{\partial^{n+1} f(\vartheta_{ij}^s)}{\partial n_{ij}^s \partial \tau_{ij}^{n+1-s}} d_{ij}^{n+1-s} \omega_{ij, n+1-s}(t), \quad (0.0.29)$$

$$s = 0, \dots, m, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j,$$

где $\vartheta_{ij}^s \in [a_i, a_j]$; $\omega_{ij, n+1-s}(t)$ — многочлен степени $n+1-s$ со старшим коэффициентом, равным единице; $t = |u - a_i|/d_{ij} \in [0, 1]$. Далее без ограничений общности считаем, что $m = 1$ (поскольку для доказательства результата достаточно принадлежности функции \tilde{S} классу $C^1(\Omega)$).

В связи с требованием выполнения условия **C2** обычно на всех сторонах треугольника Δ задаются однотипные условия интерполяции, т. е.

$$\omega_{ij, n+1-s}(x) = \omega_{pq, n+1-s}(x)$$

для любых i, j, p, q и $s = 0, 1$ (или $s = 0, \dots, r$, если $r > 1$). Это означает, что

$$\omega_{ij, n+1-s}(x) = (-1)^{n+1-s} \omega_{ij, n+1-s}(1-x) \quad (0.0.30)$$

и

$$\frac{\omega_{ij, n+1-s}^{(n-s)}(x)}{(n+1-s)!} = x - \frac{1}{2} \quad (0.0.31)$$

для любых $s = 0, 1$ и $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$.

В § 2.4 доказана следующая теорема.

Теорема 2.4.1. Пусть Δ — составной конечный элемент, триангулированный на k треугольников $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_k$, $k \leq k_0$. Если условия интерполяции функции $f \in W^{n+1}(\Delta)$ кусочно-полиномиальной функцией S_Δ таковы, что выполняются свойства C1, C2 и выполнены соотношения (0.0.29) и (0.0.31), то для любого $s = 2, \dots, n$ найдется $\alpha_0 > 0$ такое, что для любого $\alpha < \alpha_0$ имеют место оценки

$$\mathcal{E}_{n,s} = \mathcal{E}_{n,s}(\Delta, S_\Delta) \geq \mathcal{K}(n, k_0) \frac{MH^{n+1-s}}{\sin \alpha},$$

где $\mathcal{K}(n, k_0)$ — некоторая положительная величина, которая может зависеть только от n и k_0 .

Отметим, что условие (0.0.31) в формулировке теоремы 2.4.1 можно заменить на более наглядное условие (0.0.30).

Как и в случае теоремы 2.2.1, утверждение теоремы 2.4.1 означает, что оценки (0.0.28) и соответствующий им выбор условий интерполяции являются оптимальными (наилучшими из возможных), если речь идет о получении гладкого локального сплайна на триангулированной области Ω .

В **главе 3** рассматривается задача лагранжевой интерполяции функции $f \in W^{n+1}M(\Delta)$ алгебраическим многочленом $P_n^d[f] = P_n^d$ в узлах равномерной сетки (0.0.1) d -симплекса Δ с вершинами a_1, \dots, a_{d+1} .

Мы предполагаем, что вершины симплекса Δ занумерованы произвольным образом. Возьмем a_{l+1} ($2 \leq l \leq d$) и рассмотрим углы $\beta_{l+1,s} = \beta_{l+1,s}(\Delta)$ между прямыми, параллельными ребрам $a_{l+1}a_s$ ($s = 1, \dots, l$) и $(l-1)$ -мерной плоскостью, натянутой на точки a_1, a_2, \dots, a_l . Обозначим через $\beta_{l+1} \in (0, \frac{\pi}{2}]$ такой угол, что

$$\sin \beta_{l+1} = \sin \beta_{l+1}(\Delta) = \max_{s=1, \dots, l} \sin \beta_{l+1,s},$$

через $\Theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ — угол, удовлетворяющий условию

$$\sin \Theta = \sin \Theta(\Delta) = \min_{l=2, \dots, d} \sin \beta_{l+1}.$$

В § 3.1 введенная характеристика Θ сравнивается с величиной θ , определенной в (0.0.11) и введенной П. Жамэ [57].

Теорема 3.1.1. *Для любого d -симплекса Δ справедливо отношение*

$$\cos \theta \underset{d}{\lesssim} \sin \Theta \underset{d}{\lesssim} \sqrt[d]{\cos \theta}.$$

Таким образом, вместо выполнения условия (0.0.13) для получения оценок (0.0.14) можно требовать существования числа $\Theta_* > 0$ такого, что

$$\Theta \geq \Theta_*. \quad (0.0.32)$$

При контроле триангуляции замена условия (0.0.13) на (0.0.32) позволяет перейти от вычисления максимума в (0.0.11) по всем $\xi \in \mathbb{R}^d$ к выбору экстремума из конечного числа вариантов. Аналогичный результат получен в замечании 3.1.1 для ϑ из (0.0.25).

Замечание 3.1.1. *При $d = 3$ для величины ϑ , определенной в (0.0.25), также справедливо соотношение*

$$\cos \theta \lesssim \sin \vartheta \lesssim \sqrt[3]{\cos \theta}.$$

В § 3.2 изучаются вопросы, связанные со случаями неумлучшаемости оценок сверху величин аппроксимации производных функций производными интерполяционных многочленов P_n^d , полученными в [57]. Приводятся оценки снизу величины погрешности аппроксимации производных функции на классе $W^{n+1}M(\Delta)$. В частности, показано, что во многих случаях условие (0.0.13), позволяющее использовать оценки (0.0.14), является неумлучшаемым на $W^{n+1}M(\Delta)$ в следующем смысле: если θ является достаточно малым, то, вообще говоря, величина погрешности аппроксимации производных может оказаться большой. Для точной формулировки результатов дадим ряд определений.

Рассматривается последовательность d -симплексов $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ с вершинами $a_1^{(i)}, \dots, a_{d+1}^{(i)}$, у которой $\cos \theta_i \rightarrow 0$ (или, что то же самое, $\sin \Theta_i \rightarrow 0$) при $i \rightarrow \infty$, где $\theta_i = \theta(\Delta_i)$, $\Theta_i = \Theta(\Delta_i)$. Считаем, что $a_1^{(i)}$ и $a_2^{(i)}$ выбраны таким образом, что $\left| a_1^{(i)} a_2^{(i)} \right| \underset{d}{\asymp} H_i = H(\Delta_i)$, где $H_i = H(\Delta_i)$ — диаметр симплекса Δ_i . Нумерацию остальных вершин считаем произвольной.

Для каждого симплекса $\Delta^{(i)}$ построим последовательность ориентированных деревьев $\{T_k^{(i)}\}_{k=1}^{d+1} = \{T_k(\Delta_i)\}_{k=1}^{d+1}$ с корнем $a_1^{(i)}$ следующим образом. Будем считать, что $T_1^{(i)}$ — дерево из одной вершины $a_1^{(i)}$; $T_2^{(i)}$ — дерево с вершинами $a_1^{(i)}$, $a_2^{(i)}$ и дугой $e_{12}^{(i)}$ (через $e_{pq}^{(i)}$ обозначаем дугу или, другими словами, ориентированное ребро с началом в точке $a_p^{(i)}$ и концом в точке $a_q^{(i)}$). Для $l = 2, \dots, d$ действуем следующим образом. Пусть построено дерево $T_l^{(i)}$ с вершинами $a_1^{(i)}$, $a_2^{(i)}$, \dots , $a_l^{(i)}$ ($l \leq d$). Возьмем вершину $a_{l+1}^{(i)}$ и рассмотрим определенные выше величины $\sin \beta_{l+1}(\Delta_i)$ и $\sin \beta_{l+1,s}(\Delta_i)$. Положим

$$p = \min \{s : \sin \beta_{l+1}(\Delta_i) = \sin \beta_{l+1,s}(\Delta_i), \quad s = 1, \dots, l\}. \quad (0.0.33)$$

Тогда дерево $T_{l+1}^{(i)}$ получаем, добавляя к $T_l^{(i)}$ вершину $a_{l+1}^{(i)}$ и дугу $e_{p,l+1}^{(i)}$. Договоримся использовать запись $a_p^{(i)} = F(a_{l+1}^{(i)})$, означающую, что $a_p^{(i)}$ является отцом $a_{l+1}^{(i)}$.

Введем в рассмотрение деревья $\mathcal{T}_{s,1}^{(i)}$ и $\mathcal{T}_{s,2}^{(i)}$, полученные из $T_s^{(i)}$ удалением ребра, соединяющего вершины $a_1^{(i)}$ и $a_2^{(i)}$, с корнями $a_1^{(i)}$ и $a_2^{(i)}$ соответственно ($s = 2, \dots, d+1$).

Последовательность $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ состоит из конечного числа подпоследовательностей $\{\Delta_{i_s}\}_{s=1}^{\infty}$, каждая из которых такова, что для некоторого $k \in \{2, \dots, d\}$ имеют место соотношения

$$\sin \beta_l(\Delta_{i_s}) \underset{d}{\gtrsim} 1 \quad \text{при} \quad 3 \leq l \leq k, \quad (0.0.34)$$

$$\sin \beta_{k+1}(\Delta_{i_s}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty. \quad (0.0.35)$$

Если V — геометрически независимая система $(r + 1)$ точек в \mathbb{R}^d ($r \leq d$), \mathcal{T} — ориентированное дерево со множеством вершин V , то через $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ будем обозначать плоскость размерности r , натянутую на эти точки. Пусть $\rho \left(a_{k+1}^{(i_s)}, F(a_{k+1}^{(i_s)}) \right)$ означает расстояние между вершиной $a_{k+1}^{(i_s)}$ и ее отцом $F(a_{k+1}^{(i_s)})$; $\alpha(v_1, v_2)$ — угол между v_1 и v_2 , где v_i ($i = 1, 2$) может быть вектором, прямой или плоскостью некоторой размерности (v_1 или v_2 также могут быть точками, в этом случае по определению полагаем $\alpha(v_1, v_2) = \pi/2$).

Ниже в теореме 3.2.1 и следствиях показано, что на множестве функций $W^{n+1}M$ для широкого класса симплексов при $\cos \theta \rightarrow 0$ оценки (0.0.12) являются качественно неулучшаемыми (имеет место точность по порядку величины H , при этом знаменатель не может быть отделен от нуля).

Теорема 3.2.1. Пусть в последовательности $\{\Delta_i\}_{i=1}^\infty$ имеется подпоследовательность $\{\Delta_{i_s}\}_{s=1}^\infty$ такая, что для некоторого k выполняются соотношения (0.0.34)–(0.0.35); l_{i_s} — прямая, проходящая через вершины $a_{k+1}^{(i_s)}$ и $F(a_{k+1}^{(i_s)})$; пусть число $j \in \{1, 2\}$ таково, что $a_{k+1}^{(i_s)} \in \mathcal{T}_{k+1,j}^{(i_s)}$. Если

$$\frac{\rho \left(a_{k+1}^{(i_s)}, F(a_{k+1}^{(i_s)}) \right)}{H_{i_s}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty \quad (0.0.36)$$

и

$$\frac{\sin \beta_{k+1}(\Delta_{i_s})}{\sin \alpha \left(l_{i_s}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,j}^{(i_s)}) \right)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty, \quad (0.0.37)$$

то найдется последовательность положительных вещественных чисел $\{w_{i_s}\}_{s=1}^\infty$ такая, что $w_{i_s} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, и для каждого $\nu = 1, \dots, n$ и каждого i_s имеют место оценки

$$\mathbf{E}_{n,\nu}^d(\Delta_{i_s}) \underset{d,n}{\gtrsim} M \frac{H_{i_s}^{n+1-\nu}}{w_{i_s}}. \quad (0.0.38)$$

Далее для упрощения обозначений будем считать, что подпоследовательность $\{\Delta_{i_s}\}_{s=1}^\infty$ с нужными свойствами совпадает с исходной последо-

вательностью $\{\Delta_i\}_{i=1}^\infty$, т. е. $i_s = s$ для всех $s \in \mathbb{N}$. Кроме того, договоримся не писать индексы i и считать, что $\Delta = \Delta_i$. При этом, если рассматривается некоторая характеристика $\phi_i = \phi(\Delta_i)$ симплекса Δ_i , то индекс i писать не будем, и под записью $\chi \rightarrow A$ при $\cos \theta \rightarrow 0$ или $\phi \rightarrow A$ при $\cos \theta \rightarrow 0$ (где $A \in \mathbb{R}$ или $A = \infty$) будем понимать, что некоторая последовательность величин $\{\chi^{(i)}\}_{i=1}^\infty = \{\chi(\Delta_i)\}_{i=1}^\infty$ или $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty = \{\phi(\Delta_i)\}_{i=1}^\infty$ обладает свойством $\chi^{(i)} \rightarrow A$ или $\phi_i \rightarrow A$ при $i \rightarrow \infty$, если последовательность $\{\Delta_i\}_{i=1}^\infty$ такова, что $\cos \theta_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Если $\chi/\phi \rightarrow 0$ при $\cos \theta \rightarrow 0$, то будем писать $\chi \ll \phi$. Таким образом, через Δ обозначаем d -симплекс с вершинами a_1, \dots, a_{d+1} , занумерованными таким образом, что $|a_1 a_2| \underset{d}{\asymp} H$, и $\cos \theta \rightarrow 0$. Соотношения (0.0.34)–(0.0.35) для некоторого $k \in \{2, \dots, d\}$ переписываются следующим образом:

$$\sin \beta_l(\Delta) \underset{d}{\gtrsim} 1 \quad \text{при} \quad 3 \leq l \leq k, \quad (0.0.39)$$

$$\sin \beta_{k+1}(\Delta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \cos \theta \rightarrow 0. \quad (0.0.40)$$

В соответствии с алгоритмами, описанными выше, строим деревья T_1, \dots, T_{d+1} , и $\mathcal{T}_{s,1}, \mathcal{T}_{s,2}$ для $s = 2, \dots, d+1$. Без ограничений общности везде ниже считаем, что $F(a_{k+1}) \in \mathcal{T}_{k,2}$.

Следствие 3.2.1. Пусть вершины d -симплекса Δ занумерованы таким образом, что если $|a_{s_1} a_j| \underset{d}{\asymp} H$ для любого $j = 1, \dots, s_1 - 1$ и $|a_{s_2} a_j| \ll H$ для некоторого $j \in \{1, \dots, s_2 - 1\}$, то $s_1 < s_2$; k — такое, что выполнены (0.0.39) и (0.0.40). Пусть выполнено одно из следующих условий:

$$1) \quad \rho(a_{k+1}, F(a_{k+1})) \underset{d}{\asymp} H;$$

$$2) \quad \rho(a_{k+1}, F(a_{k+1})) \ll H \quad \text{и} \quad \frac{\sin \beta_{k+1}(\Delta)}{\sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}))} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \cos \theta \rightarrow 0, \quad \text{где}$$

l — прямая, проходящая через a_{k+1} и $F(a_{k+1})$.

Тогда найдется положительная функция $w(\cos \theta)$ такая, что

$w(\cos \theta) \rightarrow 0$ при $\cos \theta \rightarrow 0$, и

$$\mathbf{E}_{n,\nu}^d(\Delta) \underset{d,n}{\gtrsim} M \frac{H^{n+1-\nu}}{w(\cos \theta)}, \quad \nu = 1, \dots, n. \quad (0.0.41)$$

Сформулированное следствие означает, что если выбрана соответствующая нумерация вершин симплекса и характеристика П.Жамэ стремится к нулю, то для того, чтобы в теореме 3.2.1 была справедлива оценка (0.0.38), проверка условия (0.0.37) нужна лишь тогда, когда имеет место соотношение (0.0.36). В противном случае неравенство (0.0.38) выполняется всегда.

Для симплекса $\check{\Delta}$ через $\text{diam}(\check{\Delta})$ обозначим диаметр этого симплекса.

Следствие 3.2.2. *Если для любого m -симплекса $\check{\Delta}$ ($m < d$) с вершинами $b_1, \dots, b_{m+1} \in \{a_1, \dots, a_{d+1}\}$, удовлетворяющего условию $\text{diam}(\check{\Delta})/H \rightarrow 0$ при $\cos \theta \rightarrow 0$, выполнено условие*

$$\sin \Theta(\check{\Delta}) \underset{d}{\gtrsim} 1$$

то найдется положительная функция $w(\cos \theta)$ такая, что $w(\cos \theta) \rightarrow 0$ при $\cos \theta \rightarrow 0$, и для всех $\nu = 1, \dots, n$ справедливы оценки (0.0.41).

Следствие означает, что если для любого m -симплекса $\check{\Delta}$ ($m < d$), являющегося гранью соответствующей размерности симплекса Δ и имеющего диаметр $\text{diam}(\check{\Delta}) \ll H$, величина $\sin \Theta(\check{\Delta})$ отделена от нуля, то имеет место оценка (0.0.41).

Следствие 3.2.3. *Если $d = 3$, и тетраэдр Δ содержит не менее 4 ребер, длины которых \mathbf{r}_j , $1 \leq j \leq k$ ($k \geq 4$), удовлетворяют соотношениям $\mathbf{r}_j \asymp H$, то существует положительная функция $w(\cos \theta)$ такая, что $w(\cos \theta) \rightarrow 0$ при $\cos \theta \rightarrow 0$ и*

$$\mathbf{E}_{n,\nu}^3 \underset{n}{\gtrsim} M \frac{H^{n+1-\nu}}{w(\cos \theta)}, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

В § 3.3 для случая $d = 3$, $n = 1$ получены оценки сверху величин погрешности аппроксимации производных интерполируемой функции, демонстрирующие, что иногда (для некоторого класса тетраэдров) оценки П. Жамэ (0.0.12) могут быть несколько улучшены. Возможно, близкие оценки могут быть получены также в результате некоторой доработки результатов Т. Апеля из [31] (в диссертации используется другой метод доказательства соответствующей теоремы). Таким образом, § 3.3 имеет скорее иллюстративный характер.

Рассмотрим тетраэдр Δ , имеющий ровно три ребра, длины которых существенно меньше диаметра тетраэдра (в противном случае имеются оценки снизу из следствия 3.2.3 теоремы 3.2.1, показывающие, что в определенном смысле оценки П.Жамэ являются неулучшаемыми). Обозначим через T_j , $j = 1, 2, 3, 4$, треугольники, являющиеся гранями тетраэдра напротив вершин a_j ; через γ_j и β_j — соответственно наибольшие и средние углы треугольников T_j ; через \mathbf{r}_j — диаметры треугольников T_j ($j = 1, 2, 3, 4$). Отметим, что $\sin \beta_j \asymp \sin \gamma_j$. Без ограничений общности можем считать, что $\mathbf{r}_2 \asymp \mathbf{r}_3 \asymp \mathbf{r}_4 \asymp H$ и $\sin \gamma_4 \gtrsim \max\{\sin \gamma_2, \sin \gamma_3\}$. Также в соответствии с нашим интересом считаем, что $\mathbf{r}_1/H \rightarrow 0$ при $\sin \vartheta \rightarrow 0$. Пусть φ_{14} — величина двугранного угла между плоскостями граней T_1 и T_4 .

Теорема 3.3.1. *Справедлива следующая оценка сверху:*

$$\mathbf{E}_{1,1}^2 = \mathbf{E}_{1,1}^2(\Delta) \lesssim \frac{M}{\sin \varphi_{14}} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\sin \gamma_1} + \frac{H}{\sin \gamma_4} \right). \quad (0.0.42)$$

Замечание 3.3.5. *Если $\sin \beta_4 \gtrsim 1$ и $\sin \varphi_{14} \gtrsim 1$, то имеет место оценка*

$$\mathbf{E}_{1,1}^2(\Delta) \lesssim M \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\sin \gamma_1} + H \right) = MH \left(\frac{\mathbf{r}_1}{H} \frac{1}{\sin \gamma_1} + 1 \right).$$

Таким образом, если $\sin \gamma_1 \rightarrow 0$, то для величины ϑ из (0.0.25), имеет место свойство $\sin \vartheta \rightarrow 0$ и соответственно в силу замечания 3.1.1 выполняется $\cos \theta \rightarrow 0$, т. е. величина в знаменателе правой части оценки (0.0.12)

стремится к нулю. Однако, если при этом $\mathbf{r}_1/H \asymp \sin \gamma_1$, то

$$\mathbf{E}_{1,1}^2(\Delta) \lesssim MH,$$

т. е. оценка (0.0.42) является более точной, чем (0.0.12).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту члену-корреспонденту РАН, д.ф.-м.н. Юрию Николаевичу Субботину за постоянное многолетнее внимание к работе, полезные обсуждения и поддержку. Автор глубоко признателен д.ф.-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину за обсуждения и многочисленные ценные замечания.

Глава 1. Константа и функция Лебега для интерполяционных многочленов Лагранжа на d -симплексах

В настоящей главе для интерполяционного процесса алгебраическими многочленами степени n по равномерным узлам d -симплекса Δ для $d \geq 2$ найден порядок роста по n констант Лебега (§ 1.1) и получена поточечная оценка снизу функции Лебега, аналогичная известной оценке для интерполяции на отрезке (§ 1.2).

§ 1.1. Порядок роста констант Лебега

1.1.1. Формулировка основного результата. Пусть $\{a_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}}\}$ — узлы равномерной сетки на d -симплексе Δ , т. е. узлы, имеющие следующие барицентрические координаты:

$$a_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}} = \left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}, \dots, \frac{i_{d+1}}{n} \right), \quad (1.1.1)$$
$$i_k \in \{0, \dots, n\}, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_{d+1} = n.$$

Напомним, что через $L_n^d(\lambda) = L_n^d(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}) = L_n^d(u(\lambda)) = L_n^d(u)$ обозначается функция Лебега лагранжева процесса интерполяции функции $f \in C(\Delta)$ алгебраическими многочленами степени не выше n по совокупности переменных в узлах равномерной сетки (1.1.1), т. е. норма функционала, ставящего в соответствие каждой непрерывной функции f значение ее интерполяционного многочлена в точке $u(\lambda)$ (под степенью многочлена по совокупности s переменных x_1, x_2, \dots, x_s понимается наибольшая из степеней $k_1 + k_2 + \dots + k_s$ входящих в него мономов $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_s^{k_s}$ [?, § 51]). Через L_n^d будем обозначается константа Лебега указанного интерполяционного процесса, т. е. норма оператора, действующего из $C(\Delta)$ в $C(\Delta)$, который каждой непрерывной функции ставит в соответствие ее интерполяционный многочлен.

Введем множество мультииндексов

$$I = \{i = (i_1, \dots, i_{d+1}) \mid i \in \mathbb{Z}_+^{d+1}, |i| = i_1 + i_2 + \dots + i_{d+1} = n\}. \quad (1.1.2)$$

Пусть $l_i(\lambda)$, $i = (i_1, \dots, i_{d+1}) \in I$ — фундаментальные многочлены, т. е. такие многочлены степени n по совокупности переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}$, что если a_j , $j \in I$, — узел интерполяции из (1.1), то

$$l_i(a_j) = \delta_i^j,$$

где $\delta_i^j = \delta_{i_1}^{j_1} \delta_{i_2}^{j_2} \dots \delta_{i_{d+1}}^{j_{d+1}}$; $\delta_{i_k}^{j_k}$ — символ Кронекера. Тогда

$$L_n^d(\lambda) = \sum_{i \in I} |l_i(\lambda)|. \quad (1.1.3)$$

Фундаментальные многочлены имеют следующий вид:

$$l_i(\lambda) = \frac{\omega_i(\lambda)}{\omega_i(a_i)},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_i(\lambda) &= \prod_{s_1=0}^{i_1-1} \left(\lambda_1 - \frac{s_1}{n} \right) \prod_{s_2=0}^{i_2-1} \left(\lambda_2 - \frac{s_2}{n} \right) \dots \prod_{s_{d+1}=0}^{i_{d+1}-1} \left(\lambda_{d+1} - \frac{s_{d+1}}{n} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{n} \right)^n \prod_{s_1=0}^{i_1-1} (n\lambda_1 - s_1) \dots \prod_{s_{d+1}=0}^{i_{d+1}-1} (n\lambda_{d+1} - s_{d+1}) = \\ &= \left(\frac{1}{n} \right)^n \frac{\Gamma(n\lambda_1 + 1)}{\Gamma(n\lambda_1 - i_1 + 1)} \dots \frac{\Gamma(n\lambda_{d+1} + 1)}{\Gamma(n\lambda_{d+1} - i_{d+1} + 1)} \end{aligned}$$

(если $i_k = 0$, то считаем, что $\prod_{s_k=0}^{i_k-1} (n\lambda_k - s_k) = 1$). Впервые такое представление фундаментальных многочленов указал Р.А. Николаидис [65]. Отметим, что действительно $\omega_i(a_j) = 0$ при $i \neq j$, т. к. в этом случае найдется

$q \in \{1, \dots, d+1\}$ такое, что $j_q < i_q$ и, следовательно, $\prod_{s_q=0}^{i_q-1} \left(\frac{j_q}{n} - \frac{s_q}{n} \right) = 0$.

Поскольку

$$\omega_i(a_i) = (1/n)^n \Gamma(i_1 + 1) \dots \Gamma(i_{d+1} + 1) = (1/n)^n i_1! i_2! \dots i_{d+1}!,$$

то

$$\begin{aligned}
 l_i(\lambda) &= l_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}) = \\
 &= \frac{\Gamma(n\lambda_1 + 1) \dots \Gamma(n\lambda_{d+1} + 1)}{\Gamma(n\lambda_1 - i_1 + 1) \dots \Gamma(n\lambda_{d+1} - i_{d+1} + 1)} \cdot \frac{1}{i_1! i_2! \dots i_{d+1}!}. \quad (1.1.4)
 \end{aligned}$$

Договоримся при получении оценок исключать из рассмотрения те λ и i , при которых аргумент хотя бы одной из Γ -функций знаменателя является ее полюсом, т. к. этот случай соответствует ситуации $l_i(\lambda) = 0$, т. е. соответствующее слагаемое суммы (1.1.3) равно нулю.

Напомним, что

$$L_n^d = \max_{u(\lambda) \in \Delta} L_n^d(\lambda)$$

и что для $d = 1$ в [24, с. 42] была найдена асимптотика константы Лебега

$$L_n^1 = \frac{2^{n+1}}{\exp(1) n \ln n} (1 + \varepsilon_n), \quad \text{где} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0. \quad (1.1.5)$$

Цель данного параграфа — указать порядок роста констант Лебега по n для $d \geq 2$, а именно, доказать следующую теорему.

Теорема 1.1.1. *Для константы Лебега интерполяционного процесса по равномерным узлам (1.1.1) на d -симплексе Δ при фиксированном $d \geq 2$ справедлива оценка*

$$C_1 \frac{2^n}{n \ln n} \leq L_n^d \leq C_2(d) \frac{2^n}{n \ln n},$$

где C_1 — некоторая положительная константа, а величина $C_2(d)$ может зависеть от d .

1.1.2. Обозначения и вспомогательные результаты. Сумму, у которой нижний предел индекса суммирования больше верхнего предела, будем считать равной нулю. Далее в текущем параграфе используются следующие обозначения:

$[x]$ — целая часть числа x ;

α_p — дробная часть числа $n\lambda_p$, т. е. $\alpha_p = n\lambda_p - [n\lambda_p]$, $p \in \{1, \dots, d+1\}$;

$$Q(x, k) = \frac{\Gamma(x+1)}{k!|\Gamma(x-k+1)|} = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(k-x)}{\Gamma(k+1)} \frac{|\sin \pi x|}{\pi}, \quad (1.1.6)$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq [x] + 1;$$

$$F(x, k) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(k+1-x) \sin \pi x}{\pi \Gamma(k+1)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}; \quad (1.1.7)$$

$$N_s(j_1, \dots, j_{d+1}) = n - \sum_{q=s+1}^{d+1} [n\lambda_{j_q}] - d - 1 + s - \sum_{q=1}^{s-1} i_{j_q}, \quad (1.1.8)$$

$$s = 2, \dots, d, \quad i_{j_q} \in \mathbb{Z}_+;$$

$$N_s = N_s(1, \dots, d+1) = n - \sum_{q=s+1}^{d+1} [n\lambda_q] - d - 1 + s - \sum_{q=1}^{s-1} i_q, \quad (1.1.9)$$

$$s = 2, \dots, d, \quad i_q \in \mathbb{Z}_+;$$

$$\begin{aligned} & \sigma_k(j_1, j_2, \dots, j_{d+1}) = \\ & = \sum_{i_{j_1}=0}^{[n\lambda_{j_1}]} \dots \sum_{i_{j_{d+1-k}}=0}^{[n\lambda_{j_{d+1-k}}]} \sum_{i_{j_{d+2-k}}=[n\lambda_{j_{d+2-k}}]+1}^{N_{d+2-k}(j_1, \dots, j_{d+1})} \dots \sum_{i_{j_d}=[n\lambda_{j_d}]+1}^{N_d(j_1, \dots, j_{d+1})} |l_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1})|, \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

$$k = 1, \dots, d, \quad \{j_1, \dots, j_{d+1}\} = \{1, \dots, d+1\};$$

$$\begin{aligned} S_k = S_k(1, 2, \dots, d+1) &= \sum_{i_{d+2-k}=[n\lambda_{d+2-k}]+1}^{N_{d+2-k}} \frac{\Gamma(n\lambda_{d+2-k}+1)}{i_{d+2-k}!|\Gamma(n\lambda_{d+2-k}-i_{d+2-k}+1)|} \dots \\ & \dots \sum_{i_d=[n\lambda_d]+1}^{N_d} \frac{\Gamma(n\lambda_d+1)}{i_d!|\Gamma(n\lambda_d-i_d+1)|} \dots \frac{\Gamma(n\lambda_{d+1}+1)}{i_{d+1}!|\Gamma(n\lambda_{d+1}-i_{d+1}+1)|} = \\ & = \sum_{i_{d+2-k}=[n\lambda_{d+2-k}]+1}^{N_{d+2-k}} Q(n\lambda_{d+2-k}, i_{d+2-k}) \dots \sum_{i_d=[n\lambda_d]+1}^{N_d} Q(n\lambda_d, i_d) Q(n\lambda_{d+1}, i_{d+1}), \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

где верхние границы сумм определены в (1.1.9), $k = 2, \dots, d$;

$$S_1 = \frac{\Gamma(n\lambda_{d+1}+1)}{i_{d+1}!|\Gamma(n\lambda_{d+1}-i_{d+1}+1)|} = Q(n\lambda_{d+1}, i_{d+1}); \quad (1.1.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sigma_k(1, 2, \dots, d+1) = \\ &= \sum_{i_1=0}^{[n\lambda_1]} \frac{\Gamma(n\lambda_1 + 1)}{i_1! \Gamma(n\lambda_1 - i_1 + 1)} \cdots \sum_{i_{d+1-k}=0}^{[n\lambda_{d+1-k}]} \frac{\Gamma(n\lambda_{d+1-k} + 1)}{i_{d+1-k}! \Gamma(n\lambda_{d+1-k} - i_{d+1-k} + 1)} S_k, \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

где S_k определены в (1.1.11) и (1.1.12), $k = 1, \dots, d$. В дальнейшем при оценке σ_k будем считать, что $[n\lambda_1] \geq [n\lambda_2] \geq \dots \geq [n\lambda_{d+1-k}]$ (иначе можем изменить порядок суммирования и нумерацию);

$$\begin{aligned} S_k^s(1, \dots, d+1-k, j_{d+2-k}, \dots, j_{d+1}) &= \\ &= \sum_{i_{d+2-k}=[n\lambda_{j_{d+2-k}}]+1}^{[n\lambda_{j_{d+2-k}}]+2} Q(n\lambda_{j_{d+2-k}}, i_{d+2-k}) \cdots \\ \cdots \sum_{i_s=[n\lambda_{j_s}]+1}^{[n\lambda_{j_s}]+2} Q(n\lambda_{j_s}, i_s) &\sum_{i_{s+1}=[n\lambda_{j_{s+1}}]+3}^{n-[n\lambda_{j_{s+2}}]-\dots-[n\lambda_{j_{d+1}}]-3(d-s)-i_1-\dots-i_s} Q(n\lambda_{j_{s+1}}, i_{s+1}) \cdots \\ \cdots \sum_{i_d=[n\lambda_{j_d}]+3}^{n-[n\lambda_{j_{d+1}}]-3-i_1-\dots-i_{d-1}} &Q(n\lambda_{j_d}, i_d) Q(n\lambda_{j_{d+1}}, i_{d+1}), \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

$$s = d+2-k, \dots, d;$$

$$\begin{aligned} S_k^{d+1-k}(1, \dots, d+1) &= \\ &= \sum_{i_{d+2-k}=[n\lambda_{d+2-k}]+3}^{n-[n\lambda_{d+3-k}]-\dots-[n\lambda_{d+1}]-3(d-(d+1-k))-i_1-\dots-i_{d+1-k}} Q(n\lambda_{d+2-k}, i_{d+2-k}) \cdots \\ \cdots \sum_{i_d=[n\lambda_d]+3}^{n-[n\lambda_{d+1}]-3-i_1-\dots-i_{d-1}} &Q(n\lambda_d, i_d) Q(n\lambda_{j_{d+1}}, i_{d+1}); \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

$$R_q(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{i_q=3}^{n-\kappa-i_1-\dots-i_{q-1}} \frac{\alpha}{i_q^{1+\alpha/2}} \frac{\beta}{(n-i_1-\dots-i_q)^{1+\beta/2}}; \quad (1.1.16)$$

$$g(\theta, k) = \frac{\theta}{k^{1+\theta/2}}. \quad (1.1.17)$$

Лемма 1.1.1. *Справедливо следующее представление функции Лебега:*

$$L_n^d(\lambda) = \sum_{k=1}^d \sum_{\substack{\{j_1, j_2, \dots, j_{d+1-k}\} \subset \{1, \dots, d+1\} \\ j_s \neq j_p \text{ при } s \neq p}} \sigma_k(j_1, j_2, \dots, j_{d+1}),$$

где $\sigma_k(j_1, j_2, \dots, j_{d+1})$ определены в (1.1.10), и суммирование ведется по всем сочетаниям по $d+1-k$ элементов из множества $\{1, \dots, d+1\}$, $k = 1, \dots, d$.

Доказательство. При фиксированном λ , отличном от узлов интерполяции (узлы интерполяции можно не рассматривать, так как значение функции Лебега в любом из них известно и равно единице) разобьем правую часть равенства (1.1.3) на несколько сумм в зависимости от знаков $n\lambda_s - i_s$. Фиксируем $k \in \{1, \dots, d\}$, возьмем произвольно множество $\{j_1, \dots, j_{d+1-k}\} \subset \{1, \dots, d+1\}$ (где $j_s \neq j_p$ при $s \neq p$) и выделим те слагаемые суммы (1.1.3), для которых $n\lambda_{j_s} - i_{j_s} \geq 0$ (т. е. $0 \leq i_{j_s} \leq [n\lambda_{j_s}]$) при $s = 1, 2, \dots, d+1-k$ и $n\lambda_{j_s} - i_{j_s} < 0$ (т. е. $i_{j_s} \geq [\lambda_{j_s}] + 1$) при $s = d+2-k, \dots, d+1$, где $j_{d+2-k}, \dots, j_{d+1}$ выбраны произвольным образом так, чтобы выполнялось равенство $\{j_{d+2-k}, \dots, j_{d+1}\} = \{1, \dots, d+1\} \setminus \{j_1, \dots, j_{d+1-k}\}$. Чтобы при $s \geq d+2-k$ найти границы для i_{j_s} , рассмотрим для примера $s = d+2-k$. С одной стороны, $i_{j_{d+2-k}} \geq [n\lambda_{j_{d+2-k}}] + 1$. С другой, в силу того, что $i_{j_q} \geq [n\lambda_{j_q}] + 1$ для $q = d+3-k, \dots, d+1$, справедливо неравенство

$$\sum_{q=d+3-k}^{d+1} i_{j_q} \geq \sum_{q=d+3-k}^{d+1} [n\lambda_{j_q}] + k - 1,$$

т. е.

$$n - \sum_{q=1}^{d+2-k} i_{j_q} \geq \sum_{q=d+3-k}^{d+1} [n\lambda_{j_q}] + k - 1,$$

откуда следует, что

$$i_{j_{d+2-k}} \leq n - \sum_{q=d+3-k}^{d+1} [n\lambda_{j_q}] - k + 1 - \sum_{q=1}^{d+1-k} i_{j_q}.$$

Аналогично для $s = d + 3 - k, \dots, d$ получаем

$$[n\lambda_{j_s}] + 1 \leq i_{j_s} \leq N_s(j_1, \dots, j_{d+1}),$$

где $N_s(j_1, \dots, j_{d+1})$ выписаны в (1.1.8). Выделенные таким образом из (1.1.3) слагаемые составят $\sigma_k(j_1, j_2, \dots, j_{d+1})$. Так как λ не является узлом интерполяции, $i = (i_1, \dots, i_{d+1}) \in I$ и, следовательно,

$$\sum_{s=1}^{d+1} (n\lambda_s - i_s) = n - n = 0,$$

то для любого $i \in I$ множество $\{n\lambda_s - i_s\}_{s=1}^{d+1}$ содержит как отрицательные, так и неотрицательные элементы. Таким образом, взяв все возможные различные множества $\{j_1, \dots, j_{d+1-k}\} \subset \{1, \dots, d+1\}$, $k = 1, \dots, d$ и просуммировав соответствующие $\sigma_k(j_1, j_2, \dots, j_{d+1-k})$, получим $L_n^d(\lambda)$. Лемма 1.1.1 доказана. \square

Фиксируем $k \in \{1, \dots, d\}$. Дальнейшие действия будут связаны с оценкой σ_k , определенной в (1.1.13).

Лемма 1.1.2. Пусть $i_p \in \mathbb{N}$, $n\lambda_p \in \mathbb{R}_+$, $i_p \geq [n\lambda_p] + 1$, функция Q определена в (1.1.6). Тогда $Q(n\lambda_p, i_p) \leq 1$. Кроме того, если $i_p \geq [n\lambda_p] + 3$, то $Q(n\lambda_p, i_p) \leq Q(\alpha_p, i_p)$, где α_p – дробная часть числа $n\lambda_p$.

Доказательство. Проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} i_p! Q(n\lambda_p, i_p) &= \frac{\Gamma(n\lambda_p + 1)}{|\Gamma(n\lambda_p - i_p + 1)|} = |n\lambda_p(n\lambda_p - 1) \dots (n\lambda_p - i_p + 1)| = \\ &= |(-n\lambda_p)(-n\lambda_p + 1) \dots (-n\lambda_p + i_p - 2)(-n\lambda_p + i_p - 1)| \leq i_p!, \end{aligned}$$

т. е. $Q(n\lambda_p, i_p) \leq 1$. Если $i_p \geq [n\lambda_p] + 3$ и $[n\lambda_p] \geq 1$, то, так как $|\alpha_p - s| \leq |-\alpha_p - [n\lambda_p] + i_p - 1 + s|$ для $s \in \mathbb{N}$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} i_p! Q(n\lambda_p, i_p) &= \\ &= |(-n\lambda_p)(-n\lambda_p + 1) \dots (-n\lambda_p + i_p - 2)(-n\lambda_p + i_p - 1)| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-\alpha_p - [n\lambda_p])(-\alpha_p - [n\lambda_p] + 1) \dots \\
&\dots (-\alpha_p - 1)(-\alpha_p)(-\alpha_p + 1) \dots (-\alpha_p - [n\lambda_p] + i_p - 1) \leq \\
&\leq |(-\alpha_p - [n\lambda_p] + i_p - 1 + [n\lambda_p])(-\alpha_p - [n\lambda_p] + i_p - 1 + [n\lambda_p] - 1) \dots \\
&\dots (-\alpha_p - [n\lambda_p] + i_p - 1 + 1)(-\alpha_p)(-\alpha_p + 1) \dots (-\alpha_p - [n\lambda_p] + i_p - 1)| = \\
&= |(-\alpha_p)(-\alpha_p + 1) \dots (-\alpha_p + i_p - 1)| = i_p! Q(\alpha_p, i_p),
\end{aligned}$$

откуда следует оставшаяся часть доказываемого утверждения. Лемма 1.1.2 доказана. \square

Лемма 1.1.3. *Справедливо следующее неравенство:*

$$\sigma_k \leq \sum_{i_1=0}^{[n\lambda_1]} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \dots \sum_{i_{d+1-k}=0}^{[n\lambda_{d+1-k}]} C_{[n\lambda_{d+1-k}+1]}^{i_{d+1-k}} S_k,$$

где σ_k и S_k определяются соответственно в (1.1.13) и (1.1.11)–(1.1.12).

Доказательство вытекает из того, что для $i_s \leq [n\lambda_s]$ (т. е. при $s = 1, \dots, d + 1 - k$) выполняется неравенство

$$\frac{\Gamma(n\lambda_s + 1)}{i_s! \Gamma(n\lambda_s - i_s + 1)} = \frac{1}{i_s!} \prod_{p=0}^{i_s-1} (n\lambda_s - p) \leq \frac{1}{i_s!} \prod_{p=0}^{i_s-1} ([n\lambda_s] + 1 - p) = C_{[n\lambda_s+1]}^{i_s}.$$

Лемма 1.1.3 доказана. \square

Лемма 1.1.4. *Пусть $[n\lambda_1] < 2d$, σ_k определено в (1.1.13). Тогда*

$$\sigma_k \underset{d}{\lesssim} \frac{2^n}{n \ln n}.$$

Доказательство. Оценим сначала S_k из (1.1.11)–(1.1.12). Учитывая, что согласно лемме 1.1.2 для $i_p \geq [n\lambda_p] + 1$ справедлива оценка

$$Q(n\lambda_p, i_p) = \frac{\Gamma(n\lambda_p + 1)}{|\Gamma(n\lambda_p - i_p + 1)| i_p!} \leq 1,$$

можем заключить, что сумма S_k не превосходит числа своих слагаемых, т. е.

$$S_k \leq (N_d - [n\lambda_d]) \dots (N_{d+2-k} - [n\lambda_{d+2-k}]).$$

Поскольку для $s = d + 2 - k, \dots, d$ числа N_s (см. (1.1.9)) не превосходят n , то $S_k \leq n^{k-1}$, откуда с учетом леммы 1.1.3 и того, что $[n\lambda_{d+1-k}] \leq [n\lambda_{d-k}] \leq \dots \leq [n\lambda_1] \leq 2d$, получаем требуемую оценку

$$\begin{aligned} \sigma_k &\leq n^{k-1} \sum_{i_1=0}^{[n\lambda_1]} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \cdots \sum_{i_{d+1-k}=0}^{[n\lambda_{d+1-k}]} C_{[n\lambda_{d+1-k}+1]}^{i_{d+1-k}} \leq \\ &\leq n^{k-1} 2^{2d(d+1-k)} \leq 2^{2d^2} n^{d-1} \underset{d}{\lesssim} \frac{2^n}{n \ln n}. \end{aligned}$$

Лемма 1.1.4 доказана. □

Лемма 1.1.5. Пусть $0 \leq \alpha < 1$, $k \in \mathbb{N}$, функция F определяется формулой (1.1.7). Тогда

$$F(\alpha, k) \leq \sqrt{2} \frac{\alpha}{k^{\alpha/2}}.$$

Доказательство практически повторяет доказательство аналогичной леммы А.Х.Турецкого [24, с. 42] и приводится для удобства читателя. Рассмотрим $F(\alpha, k)$:

$$F(\alpha, k) = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(k+1-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \frac{\alpha}{k!} \prod_{s=1}^k (s-\alpha) \leq \frac{\alpha}{k!} \prod_{s=2}^k (s-\alpha).$$

Положим $\varphi_k(\alpha) = \prod_{s=2}^k (s-\alpha)$ и проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \ln \varphi_k(\alpha) &= \sum_{s=2}^k \ln(s-\alpha) = \sum_{s=2}^k \ln s - \sum_{s=2}^k (\ln s - \ln(s-\alpha)) = \\ &= \ln k! - \sum_{s=2}^k \ln \left(1 + \frac{\alpha}{s-\alpha} \right) \leq \\ &\leq \ln k! - \sum_{s=2}^k \frac{\alpha}{2(s-\alpha)} = \ln k! - \frac{\alpha}{2} \sum_{s=2}^k \frac{1}{s-\alpha} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \ln k! - \frac{\alpha}{2} \sum_{s=2}^k \frac{1}{s} \leq \ln k! - \frac{\alpha}{2} \int_2^k \frac{dx}{x} = \ln k! - \frac{\alpha}{2} \ln k + \frac{\alpha}{2} \ln 2.$$

Получаем

$$\varphi_k(\alpha) \leq \exp \left(\ln k! + \frac{\alpha}{2} \ln 2 - \frac{\alpha}{2} \ln k \right) = \frac{k! 2^{\alpha/2}}{k^{\alpha/2}}.$$

Таким образом, $F(\alpha, k) \leq \frac{\alpha}{k!} \cdot \frac{k! 2^{\alpha/2}}{k^{\alpha/2}} \leq \sqrt{2} \frac{\alpha}{k^{\alpha/2}}$. Лемма 1.1.5 доказана. \square

Лемма 1.1.6. Пусть $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $\kappa \geq 3$; $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $i_s \in \mathbb{Z}_+$ ($s = 1, \dots, q$), $i_1 + \dots + i_q < n$; R_q и g определены в (1.1.16) и (1.1.17) соответственно. Тогда

$$R_q(\alpha, \beta, \kappa) \lesssim g(\theta, l_{q-1}),$$

где $l_{q-1} = n - i_1 - \dots - i_{q-1}$, $\theta = \begin{cases} \alpha, & \text{если } g(\alpha, l_{q-1}) \geq g(\beta, l_{q-1}), \\ \beta, & \text{если } g(\alpha, l_{q-1}) < g(\beta, l_{q-1}). \end{cases}$

Доказательство. Преобразуем $R_q(\alpha, \beta, \kappa)$:

$$R_q(\alpha, \beta, \kappa) = \frac{1}{l_{q-1}} \sum_{i_q=3}^{n-\kappa-i_1-\dots-i_{q-1}} \frac{(n-i_1-\dots-i_q+i_q)\alpha\beta}{i_q^{1+\alpha/2}(n-i_1-\dots-i_q)^{1+\beta/2}} = R_1 + R_2,$$

где

$$R_1 = \frac{1}{l_{q-1}} \sum_{i_q=3}^{n-\kappa-i_1-\dots-i_{q-1}} \frac{\alpha\beta}{i_q^{1+\alpha/2}(n-i_1-\dots-i_q)^{\beta/2}},$$

$$R_2 = \frac{1}{l_{q-1}} \sum_{i_q=3}^{n-\kappa-i_1-\dots-i_{q-1}} \frac{\alpha\beta}{i_q^{\alpha/2}(n-i_1-\dots-i_q)^{1+\beta/2}}.$$

Оценим слагаемое R_1 . Для этого разобьем его на две суммы R_{11} и R_{12} следующим образом:

$$\sum_{i_q=3}^{n-\kappa-i_1-\dots-i_{q-1}} = \sum_{i_q=3}^{\lfloor \frac{1}{2}(n-i_1-\dots-i_{q-1}) \rfloor} + \sum_{i_q=\lfloor \frac{1}{2}(n-i_1-\dots-i_{q-1}) \rfloor + 1}^{n-\kappa-i_1-\dots-i_{q-1}}.$$

Рассмотрим вторую сумму R_{12} . В этой сумме не более $n - \kappa - i_1 - \dots - i_{q-1} - 2$ слагаемых, каждое из которых мы можем оценить сверху не зависящей от i_q величиной

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha\beta}{l_{q-1} \left[\frac{n-i_1-\dots-i_{q-1}}{2} + 1 \right]^{1+\alpha/2} (n-i_1-\dots-i_{q-1}-n+\kappa+i_1+\dots+i_{q-1})^{\beta/2}} = \\ & = \frac{\alpha\beta}{l_{q-1} \left[\frac{n-i_1-\dots-i_{q-1}}{2} + 1 \right]^{1+\alpha/2} \kappa^{\beta/2}}, \end{aligned}$$

поэтому с учетом числа слагаемых получаем

$$\begin{aligned} R_{12} & \leq \frac{1}{l_{q-1}} \cdot \frac{\alpha(n-\kappa-i_1-\dots-i_{q-1}-2)}{\left[\frac{n-i_1-\dots-i_{q-1}}{2} + 1 \right]^{1+\alpha/2}} \cdot \frac{\beta}{\kappa^{\beta/2}} \lesssim \\ & \lesssim \frac{1}{l_{q-1}} \frac{\alpha}{(n-i_1-\dots-i_{q-1})^{\alpha/2}} \lesssim g(\alpha, l_{q-1}). \end{aligned}$$

Сумма R_{11} оценивается следующим образом

$$\begin{aligned} R_{11} & \leq \frac{1}{l_{q-1}} \sum_{i_q=3}^{\left[\frac{1}{2}(n-i_1-\dots-i_{q-1}) \right]} \frac{\alpha\beta}{i_q^{1+\alpha/2} \left(n-i_1-\dots-i_{q-1}-\frac{n-i_1-\dots-i_{q-1}}{2} \right)^{\beta/2}} = \\ & = \frac{1}{l_{q-1}} \frac{\beta}{\left(\frac{n-i_1-\dots-i_{q-1}}{2} \right)^{\beta/2}} \sum_{i_q=3}^{\left[\frac{1}{2}(n-i_1-\dots-i_{q-1}) \right]} \frac{\alpha}{i_q^{1+\alpha/2}} \leq \\ & \leq \frac{2^{\beta/2}\beta}{(n-i_1-\dots-i_{q-1})^{1+\beta/2}} \int_2^{\left[\frac{1}{2}(n-i_1-\dots-i_{q-1}) \right]} \frac{\alpha dt}{t^{1+\alpha/2}}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_2^{\left[\frac{1}{2}(n-i_1-\dots-i_{q-1}) \right]} \frac{\alpha dt}{t^{1+\alpha/2}} = 2 \left(\frac{1}{2^{\alpha/2}} - \frac{1}{\left[\frac{l_{q-1}}{2} \right]^{\alpha/2}} \right) \leq 2,$$

получаем

$$R_{11} \lesssim g(\beta, l_{q-1}),$$

т. е.

$$R_1 = R_{11} + R_{12} \lesssim g(\theta, l_{q-1}).$$

Слагаемое R_2 после замены $i_q = n - i_1 - \dots - i_{q-1} - s$ оценивается аналогично. Лемма 1.1.6 доказана. \square

1.1.3. Доказательство теоремы. Оценка снизу является простым следствием результата А.Х.Турецкого (1.1.5). Оценка сверху сводится к оценке сверху величины σ_k .

1.1.3.1. Оценка снизу. Оценка снизу следует из одномерного результата А.Х.Турецкого (1.1.5): пусть $f \in C[0, 1]$ – функция одной переменной, экстремальная с точки зрения константы Лебега, т. е. такая, на которой достигается норма оператора интерполирования. Пусть $\|f\|_{C[0,1]} = 1$. Положим $F(\lambda) = F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}) = f(\lambda_1)$. Отметим, что $\|F\|_{C(\Delta)} = \|f\|_{C[0,1]} = 1$. Пусть $p(f)$ – многочлен одной переменной, интерполирующий f на $[0, 1]$; $P(F)$ – многочлен, интерполирующий F на Δ . Тогда, используя (1.1.5), получаем оценку:

$$L_n^d \geq \|P(F)\|_{C(\Delta)} = \|p(f)\|_{C[0,1]} = L_n^1 = \frac{2^{n+1}}{e n \ln n} (1 + \varepsilon_n).$$

Таким образом, требуется доказать лишь оценку сверху.

1.1.3.2. Сведение оценки сверху к оценке новой величины σ_k^0 .

В силу леммы 1.1.1,

$$L_n^d(\lambda) \lesssim_d \max_k \max_{\{j_1, \dots, j_{d+1-k}\}} \sigma_k(j_1, \dots, j_{d+1}). \quad (1.1.18)$$

Так как $L_n^d = \max_{u(\lambda) \in \Delta} L_n^d(\lambda)$, то задача сводится к оценке $\sigma_k(j_1, \dots, j_{d+1})$, где $\{j_1, \dots, j_{d+1-k}\} \subset \{1, \dots, d+1\}$. Без ограничений общности можем рассматривать $\sigma_k = \sigma_k(1, \dots, d+1)$ (см. (1.1.13)), $1 \leq k \leq d$. Напомним, что можем считать $[n\lambda_1] \geq [n\lambda_2] \geq \dots \geq [n\lambda_{d+1-k}]$ (см. комментарий к (1.1.13) в п. 1.1.2). Случай $[n\lambda_1] < 2d$ разобран в лемме 1.1.4, поэтому пусть далее $[n\lambda_1] \geq 2d$. Принимая во внимание результат леммы 1.1.3,

разобьем оценку σ_k на две суммы:

$$\sigma_k \leq \sigma_k^0 + \sigma_k^1, \quad (1.1.19)$$

где

$$\sigma_k^0 = \sum_{i_1=0}^{[n\lambda_1]-2d} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \sum_{i_2=0}^{[n\lambda_2]} C_{[n\lambda_2+1]}^{i_2} \cdots \sum_{i_{d+1-k}=0}^{[n\lambda_{d+1-k}]} C_{[n\lambda_{d+1-k}+1]}^{i_{d+1-k}} S_k(1, 2, \dots, d+1), \quad (1.1.20)$$

$$\sigma_k^1 = \sum_{i_1=[n\lambda_1]-2d+1}^{[n\lambda_1]} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \sum_{i_2=0}^{[n\lambda_2]} C_{[n\lambda_2+1]}^{i_2} \cdots \sum_{i_{d+1-k}=0}^{[n\lambda_{d+1-k}]} C_{[n\lambda_{d+1-k}+1]}^{i_{d+1-k}} S_k(1, 2, \dots, d+1). \quad (1.1.21)$$

Так как $S_k \leq n^{k-1}$ (см. доказательство леммы 1.1.4), $\sum_{i_s=0}^{[n\lambda_s]} C_{[n\lambda_s+1]}^{i_s} \leq 2^{[n\lambda_s+1]}$

для любого $s = 2, \dots, d+1-k$ и $\sum_{i_1=[n\lambda_1]-2d+1}^{[n\lambda_1]} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \leq 2d(n\lambda_1+1)^{2d}$, то

$$\sigma_k^1 \lesssim_d (n\lambda_1+1)^{2d} 2^{n\lambda_2+\dots+n\lambda_{d+1-k}+(d-k)} n^{k-1}.$$

Если $n\lambda_1+1 \leq n/d$, то с учетом условия $[n\lambda_1] \geq [n\lambda_2] \geq \dots \geq [n\lambda_{d+1-k}]$ получаем

$$\begin{aligned} \sigma_k^1 &\lesssim_d (n/d)^{2d} 2^{n\lambda_1(d-k)+(d-k)} n^{k-1} \leq (n/d)^{2d} 2^{\frac{n(d-k)}{d}} n^{k-1} \leq \\ &\leq 2^{\frac{n(d-k)}{d}} n^{k-1+2d} = 2^n \frac{n^{k-1+2d}}{2^{\frac{kn}{d}}} = \frac{2^n}{n \ln n} \cdot \frac{n^{k+2d} \ln n}{2^{\frac{kn}{d}}} \lesssim_d \frac{2^n}{n \ln n}. \end{aligned}$$

Если $n\lambda_1+1 > n/d$, то

$$\begin{aligned} \sigma_k^1 &\lesssim_d (n\lambda_1+1)^{2d} 2^{n-(n\lambda_1+1)} n^{k-1} \leq 2^n \frac{(n\lambda_1+1)^{2d} n^{k-1}}{2^{n\lambda_1+1}} \lesssim_d \\ &\lesssim_d \frac{2^n}{n \ln n} \frac{n^{2d} n^k \ln n}{2^{\frac{n}{d}}} \lesssim_d \frac{2^n}{n \ln n}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma_k^1 \lesssim_d \frac{2^n}{n \ln n}. \quad (1.1.22)$$

Остается оценить σ_k^0 .

1.1.3.2. Оценка σ_k^0 и завершение доказательства теоремы. В данном разделе мы считаем, что индексы i_1, \dots, i_{d+1} изменяются в пределах, определяемых формулой (1.1.20).

Лемма 1.1.7. *Для $k = 2, \dots, d$ справедливо следующее представление:*

$$S_k = \sum_{s=d+2-k}^d \sum_{\{j_{d+2-k}, \dots, j_s\} \subset \{d+2-k, \dots, d+1\}} S_k^s(1, \dots, d+1-k, j_{d+2-k}, \dots, j_{d+1}) + S_k^{d+1-k}(1, \dots, d+1), \quad (1.1.23)$$

где S_k и S_k^s определяются формулами (1.1.11) и (1.1.14)–(1.1.15) соответственно.

Доказательство. Рассмотрим, по каким индексам ведется суммирование в S_k в случае оценки σ_k^0 . Возьмем сумму по i_{d+2-k} и оценим снизу величину N_{d+2-k} , определенную в (1.1.9). Сначала оценим сверху $\sum_{q=1}^{d+1-k} i_q$, принимая во внимание значения верхних пределов соответствующих индексов суммирования в сумме σ_k^0 . В результате получаем следующую оценку для N_{d+2-k} :

$$N_{d+2-k} \geq n - \sum_{q=d+3-k}^{d+1} [n\lambda_q] - d - 1 + d + 2 - k - \sum_{q=1}^{d+1-k} [n\lambda_q] + 2d.$$

Так как узлы интерполяции мы не рассматриваем, то хотя бы две из величин $n\lambda_s$, $s = 1, 2, \dots, d+1$, отличны от целых чисел, поэтому

$$n - \sum_{q=d+3-k}^{d+1} [n\lambda_q] - \sum_{q=1}^{d+1-k} [n\lambda_q] \geq [n\lambda_{d+2-k}] + 1,$$

и, следовательно,

$$N_{d+2-k} \geq [n\lambda_{d+2-k}] + 1 + 1 + 2d - k \geq [n\lambda_{d+2-k}] + d + 2,$$

т. е. в сумме σ_k^0 , а значит, и в S_k индекс суммирования i_{d+2-k} может принимать значения $[n\lambda_{d+2-k}] + 1$, $[n\lambda_{d+2-k}] + 2$ и бóльшие. Так как порядок суммирования по i_s для $s \geq d + 2 - k$ выбирается произвольно и может бы быть изменен, то это утверждение справедливо и для других i_s : если $s \in \{d + 2 - k, \dots, d + 1\}$, то индекс i_s может принимать значения $[n\lambda_s] + 1$, $[n\lambda_s] + 2$ и бóльшие (для того, чтобы это увидеть, можно также непосредственно воспользоваться формулой (1.1.9)).

В лемме 1.1.2 приводятся разные оценки функции $Q(n\lambda_p, i_p)$ для $i_p \geq [n\lambda_p] + 3$ и $i_p = [n\lambda_p] + 1, [n\lambda_p] + 2$. С этим будет связано разбиение S_k на суммы $S_k^s(1, \dots, d + 1 - k, j_{d+2-k}, \dots, j_{d+1})$. Фиксируем $s \in \{d + 1 - k, \dots, d\}$, возьмем произвольно $\{j_{d+2-k}, \dots, j_s\} \subset \{d + 2 - k, \dots, d + 1\}$ и выделим те слагаемые суммы S_k , для которых $i_q = [n\lambda_q] + 1, [n\lambda_q] + 2$ при $q = j_{d+2-k}, \dots, j_s$ и $i_q \geq [n\lambda_q] + 3$ для $q = j_{s+1}, \dots, j_{d+1}$, где $\{j_{s+1}, \dots, j_{d+1}\} = \{d + 2 - k, \dots, d + 1\} \setminus \{j_{d+2-k}, \dots, j_s\}$ (случай $s = d + 1 - k$ соответствует ситуации $i_q \geq [n\lambda_q] + 3$ при $q = j_{d+2-k}, \dots, j_{d+1}$, где $j_{d+2-k} = d + 2 - k, \dots, j_{d+1} = d + 1$). Эти слагаемые составят сумму $S_k^s(1, \dots, d + 1 - k, j_{d+2-k}, \dots, j_{d+1})$. Отметим, что невозможен случай, когда $i_q \leq [n\lambda_q] + 2$ при всех $q = j_{d+2-k}, \dots, j_{d+1}$: если $i_q \leq [n\lambda_q] + 2$ для $q = j_{d+2-k}, \dots, j_d$, то

$$\begin{aligned} i_{j_{d+1}} &= n - i_1 - \dots - i_{d+1-k} - i_{j_{d+2-k}} - \dots - i_{j_d} \geq \\ &\geq n - ([n\lambda_1] - 2d) - [n\lambda_2] - \dots - [n\lambda_{d+1-k}] - ([n\lambda_{j_{d+2-k}}] + 2) - \dots - ([n\lambda_{j_d}] + 2). \end{aligned}$$

Так как узлы интерполяции не рассматриваются, то $[n\lambda_1] + \dots + [n\lambda_{d+1-k}] + [n\lambda_{j_{d+2-k}}] + \dots + [n\lambda_{j_d}] \leq n - [n\lambda_{j_{d+1}}] - 1$, поэтому

$$\begin{aligned} i_{j_{d+1}} &\geq n - (n - [n\lambda_{j_{d+1}}] - 1) + 2d - 2(d - (d + 1 - k)) = \\ &= [n\lambda_{j_{d+1}}] + 1 + 2d - 2(k - 1) \geq [n\lambda_{j_{d+1}}] + 3. \end{aligned}$$

Возьмем теперь $q = j_{s+1}$. С одной стороны, $i_{j_{s+1}} \geq [n\lambda_{j_{s+1}}] + 3$. С

другой,

$$\sum_{p=s+2}^{d+1} i_{j_p} \geq \sum_{p=s+2}^{d+1} [n\lambda_{j_p}] + 3(d-s),$$

т. е.

$$n - \sum_{p=1}^{d+1-k} i_p - \sum_{p=d+2-k}^{s+1} i_{j_p} \geq \sum_{p=s+2}^{d+1} [n\lambda_{j_p}] + 3(d-s),$$

откуда следует, что

$$[n\lambda_{j_{s+1}}] + 3 \leq i_{j_{s+1}} \leq n - \sum_{p=1}^{d+1-k} i_p - \sum_{p=d+2-k}^s i_{j_p} - \sum_{p=s+2}^{d+1} [n\lambda_{j_p}] - 3(d-s).$$

Действуя аналогичным образом, получаем

$$[n\lambda_{j_r}] + 3 \leq i_{j_r} \leq n - \sum_{p=1}^{d+1-k} i_p - \sum_{p=d+2-k}^{r-1} i_{j_p} - \sum_{p=r+1}^{d+1} [n\lambda_{j_p}] - 3(d-r+1) \quad (1.1.24)$$

для $r = s+1, \dots, d$;

$$[n\lambda_{j_r}] + 1 \leq i_{j_r} \leq [n\lambda_{j_r}] + 2 \quad (1.1.25)$$

для $r = d+2-k, \dots, s$.

Просуммировав слагаемые

$$Q(n\lambda_{j_{d+2-k}}, i_{j_{d+2-k}})Q(n\lambda_{j_{d+3-k}}, i_{j_{d+3-k}}) \dots Q(n\lambda_{j_{d+1}}, i_{j_{d+1}})$$

по индексам i_{j_p} в пределах, указанных в (1.1.25) и (1.1.24), после переобозначений i_{j_p} на i_p получим $S_k^s(1, \dots, d+1-k, j_{d+2-k}, \dots, j_{d+1})$. Взяв все возможные различные множества $\{j_{d+2-k}, \dots, j_s\} \subset \{d+2-k, \dots, d+1\}$, $s = d+2-k, \dots, d$ и просуммировав соответствующие $S_k^s(1, \dots, d+1-k, j_{d+2-k}, \dots, j_{d+1})$ и $S_k^{d+1-k}(1, \dots, d+1)$, получим (1.1.23). Лемма 1.1.7 доказана. \square

Замечание 1.1.1. Отметим, что в $S_k^s(1, \dots, d+1-k, j_{d+2-k}, \dots, j_{d+1})$ ведется суммирование слагаемых

$$Q(n\lambda_{j_{d+2-k}}, i_{d+2-k})Q(n\lambda_{j_{d+3-k}}, i_{d+3-k}) \dots Q(n\lambda_{j_{d+1}}, i_{d+1})$$

по индексам i_{d+2-k}, \dots, i_d , причем $i_p = [n\lambda_{j_p}] + 1, [n\lambda_{j_p}] + 2$ для $p = d + 2 - k, \dots, s$ и $i_p \geq [n\lambda_{j_p}] + 3$ для $p = s + 1, \dots, d + 1$.

Лемма 1.1.8. Пусть $i_q \geq [n\lambda_q] + 3$. Тогда для функции Q , определенной в (1.1.6), справедлива оценка

$$Q(n\lambda_q, i_q) \underset{d}{\lesssim} g(\alpha_q, i_q), \quad (1.1.26)$$

где α_q – дробная часть $n\lambda_q$, функция g определена в (1.1.17).

Доказательство следует из лемм 1.1.2 и 1.1.5:

$$\begin{aligned} Q(n\lambda_q, i_q) &\leq Q(\alpha_q, i_q) = F(\alpha_q, i_q) \frac{1}{i_q - \alpha_q} \underset{d}{\lesssim} \\ &\underset{d}{\lesssim} \frac{\alpha_q}{i_q^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{i_q - \alpha_q} \underset{d}{\lesssim} \frac{\alpha_q}{i_q^{\alpha/2} i_q} = g(\alpha_q, i_q). \end{aligned}$$

Лемма 1.1.8 доказана. □

Лемма 1.1.9. Для S_k , $k = 1, \dots, d$ определенного в (1.1.11), справедлива оценка

$$S_k \underset{d}{\lesssim} \frac{1}{([n\lambda_1] - 2d + 3 - i_1) \ln([n\lambda_1] - 2d + 3 - i_1)}.$$

Доказательство. Пусть $k \geq 2$. Так как лемма 1.1.7 приводит к неравенству

$$\begin{aligned} S_k \underset{d}{\lesssim} \max \left\{ \max_{d+2-k \leq s \leq d} \max_{\{j_{d+2-k}, \dots, j_s\}} S_k^s(1, \dots, d+1-k, j_{d+2-k}, \dots, j_{d+1}), \right. \\ \left. S_k^{d+1-k}(1, \dots, d+1) \right\}, \end{aligned}$$

то доказательство леммы сводится к оценке сверху величины

$$S_k^s(1, \dots, d+1-k, j_{d+2-k}, \dots, j_{d+1}), \quad d+1-k \leq s \leq d.$$

Без ограничений общности можем рассматривать $S_k^s = S_k^s(1, \dots, d+1)$ для произвольного $s \in \{d+1-k, \dots, d\}$ (см. (1.1.14) при $j_{d+2-k} = d+2-k, \dots, j_{d+1} = d+1$).

С учетом замечания 1.1.1 к лемме 1.1.7 для $q = d + 2 - k, \dots, s$ лемма 1.1.2 дает оценку $Q(n\lambda_q, i_q) \leq 1$, а для $q = s + 1, \dots, d + 1$ используем лемму 1.1.8: $Q(n\lambda_q, i_q) \lesssim_d g(\alpha_q, i_q)$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
S_k^s &\lesssim_d \sum_{i_{d+2-k}=[n\lambda_{d+2-k}]+1}^{[n\lambda_{d+2-k}]+2} \dots \\
&\dots \sum_{i_s=[n\lambda_s]+1}^{[n\lambda_s]+2} \sum_{i_{s+1}=[n\lambda_{s+1}]+3}^{n-[n\lambda_{s+2}]-\dots-[n\lambda_{d+1}]-3(d-s)-i_1-\dots-i_s} g(\alpha_{s+1}, i_{s+1}) \dots \\
&\dots \sum_{i_d=[n\lambda_d]+3}^{n-[n\lambda_{d+1}]-3-i_1-\dots-i_{d-1}} g(\alpha_d, i_d) g(\alpha_{d+1}, i_{d+1}).
\end{aligned}$$

Заменим i_{d+1} на $n - i_1 - \dots - i_d$. В суммах по i_q для $q = s + 1, \dots, d$ заменим нижние пределы суммирования на меньшие, а верхние – на бóльшие (вообще говоря, в зависимости от λ эти пределы или их часть могут остаться без изменений). При этом в правой части последнего неравенства могут лишь добавиться положительные слагаемые:

$$\begin{aligned}
S_k^s &\lesssim_d \sum_{i_{d+2-k}=[n\lambda_{d+2-k}]+1}^{[n\lambda_{d+2-k}]+2} \dots \sum_{i_s=[n\lambda_s]+1}^{[n\lambda_s]+2} \sum_{i_{s+1}=3}^{n-3(d-s)-i_1-\dots-i_s} g(\alpha_{s+1}, i_{s+1}) \dots \\
&\dots \sum_{i_d=3}^{n-3-i_1-\dots-i_{d-1}} g(\alpha_d, i_d) g(\alpha_{d+1}, n - i_1 - \dots - i_d). \tag{1.1.27}
\end{aligned}$$

Возьмем неравенство (1.1.27) и $(d - s)$ раз воспользуемся леммой 1.1.6:

$$S_k^s \lesssim_d \sum_{i_{d+2-k}=[n\lambda_{d+2-k}]+1}^{[n\lambda_{d+2-k}]+2} \dots \sum_{i_s=[n\lambda_s]+1}^{[n\lambda_s]+2} g(\theta, n - i_1 - \dots - i_s),$$

где $\theta \in \{\alpha_{s+1}, \dots, \alpha_{d+1}\}$, т. е. $0 \leq \theta \leq 1$. Из вида (1.1.17) функции $g(\theta, k)$ следует, что максимум по $\theta \geq 0$ этой функции при фиксированном $k > 1$ достигается при $\frac{2}{\ln k}$, т. е.

$$\begin{aligned}\max_{\theta \geq 0} g(\theta, k) &= g\left(\frac{2}{\ln k}, k\right) = \frac{\theta}{k^{1+\theta/2}} \Big|_{\theta=2/\ln k} = \\ &= \frac{\theta}{k \exp\left(\frac{\theta}{2} \ln k\right)} \Big|_{\theta=2/\ln k} = \frac{2}{e k \ln k}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\max_{\theta \geq 0} g(\theta, n - i_1 - \dots - i_s) = \frac{2}{e(n - i_1 - \dots - i_s) \ln(n - i_1 - \dots - i_s)}.$$

Таким образом, получаем

$$S_k^s \underset{d}{\lesssim} \sum_{i_{d+2-k}=[n\lambda_{d+2-k}]+1}^{[n\lambda_{d+2-k}]+2} \cdots \sum_{i_s=[n\lambda_s]+1}^{[n\lambda_s]+2} \frac{1}{(n - i_1 - \dots - i_s) \ln(n - i_1 - \dots - i_s)}. \quad (1.1.28)$$

Правая часть (1.1.28) содержит $2^{s-d-1+k}$ слагаемых, растущих с уменьшением $n - i_1 - \dots - i_s$. Учитывая пределы, в которых ведется суммирование в правой части (1.1.28), получаем:

$$n - i_1 - \dots - i_s \geq n - \sum_{q=1}^{d+1-k} i_q - [n\lambda_{d+2-k}] - 2 - \dots - [n\lambda_s] - 2.$$

При оценке величины σ_k^0 , определяемой равенством (1.1.20), выполняются неравенства $i_q \leq [n\lambda_q]$ для $q = 2, \dots, d+1-k$. Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что

$$n - i_1 - \dots - i_s \geq n - \sum_{q=2}^{d+1} [n\lambda_q] - i_1 - 2(s - d - 1 + k).$$

Так как узлы интерполяции не рассматриваются, то $n - \sum_{q=2}^{d+1} [n\lambda_q] \geq [n\lambda_1] + 1$ и, значит,

$$n - i_1 - \dots - i_s \geq [n\lambda_1] + 1 - i_1 - 2(d - d - 1 + k) \geq [n\lambda_1] - 2d + 3 - i_1.$$

Таким образом, из неравенства (1.1.28) получаем оценку

$$S_k^s \underset{d}{\lesssim} \frac{2^{s-d-1+k}}{([n\lambda_1] - 2d + 3 - i_1) \ln([n\lambda_1] - 2d + 3 - i_1)} \underset{d}{\lesssim}$$

$$\stackrel{\lesssim}{\sim}_d \frac{1}{([\!n\lambda_1] - 2d + 3 - i_1) \ln([\!n\lambda_1] - 2d + 3 - i_1)},$$

и для $k \geq 2$ лемма 1.1.9 доказана. Рассмотрим теперь случай $k = 1$.

Величина S_1 определяется формулой (1.1.12). Из сравнения верхних и нижних пределов индексов суммирования в равенстве (1.1.20), определяющем σ_k^0 при $k = 1$, следует, что

$$\begin{aligned} i_{d+1} = n - i_1 - \dots - i_d &\geq n - ([\!n\lambda_1] - 2d) - \sum_{s=2}^d [\!n\lambda_s] \geq \\ &\geq [\!n\lambda_{d+1}] + 1 + 2d \geq [\!n\lambda_{d+1}] + 3. \end{aligned}$$

Тогда согласно лемме 1.1.8 получаем

$$S_1 = Q(n\lambda_{d+1}, i_{d+1}) \leq g(\alpha_{d+1}, i_{d+1}),$$

Дальнейшее доказательство аналогично случаю $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \max_{\theta \geq 0} g(\theta, i_{d+1}) = g\left(\frac{2}{\ln i_{d+1}}, i_{d+1}\right) = \\ &= \frac{2}{e(n - i_1 - \dots - i_d) \ln(n - i_1 - \dots - i_d)} \leq \\ &\leq \frac{2}{e(n - i_1 - [\!n\lambda_2] - \dots - [\!n\lambda_{d+1}]) (\ln(n - i_1 - [\!n\lambda_2] - \dots - [\!n\lambda_{d+1}]))} \stackrel{\lesssim}{\sim} \\ &\stackrel{\lesssim}{\sim} \frac{1}{([\!n\lambda_1] + 1 - i_1) (\ln([\!n\lambda_1] + 1 - i_1))}. \end{aligned}$$

Лемма 1.1.9 доказана. □

Положим $N = [\!n\lambda_1] - 2d < [\!n\lambda_1] + 1$ и, применив лемму 1.1.9, вернемся к оценке σ_k^0 :

$$\begin{aligned} \sigma_k^0 &\stackrel{\lesssim}{\sim}_d \sum_{i_1=0}^N C_{[\!n\lambda_1+1]}^{i_1} \sum_{i_2=0}^{[\!n\lambda_2]} C_{[\!n\lambda_2+1]}^{i_2} \dots \\ &\dots \sum_{i_{d+1-k}=0}^{[\!n\lambda_{d+1-k}]} C_{[\!n\lambda_{d+1-k}+1]}^{i_{d+1-k}} \frac{1}{(N + 3 - i_1) \ln(N + 3 - i_1)} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2^{[n\lambda_2]+1+\dots+[n\lambda_{d+1-k}]+1} \sum_{i_1=0}^N C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \frac{1}{(N+3-i_1) \ln(N+3-i_1)} \lesssim_d \\ &\lesssim_d 2^{[n\lambda_2]+\dots+[n\lambda_{d+1-k}]} \sum_{i_1=0}^N C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \frac{1}{(N+3-i_1) \ln(N+3-i_1)}. \end{aligned}$$

Пусть далее $[n\lambda_1] \geq 4d^2$, т. к. если $[n\lambda_1] < 4d^2$, то, учитывая неравенство $[n\lambda_1] \geq [n\lambda_2] \geq \dots \geq [n\lambda_{d+1-k}]$, получим $\sigma_k^0 \leq C_0(d)$, где $C_0(d)$ — некоторая положительная величина, зависящая только от d . Рассмотрим два случая.

1°. Пусть $[n\lambda_1] \leq n/(d+1)$. Тогда $[n\lambda_{d+1-k}] \leq \dots \leq [n\lambda_2] \leq [n\lambda_1] \leq n/(d+1)$. В этом случае

$$\sigma_k^0 \lesssim_d 2^{[n\lambda_2]+\dots+[n\lambda_{d+1-k}]} 2^{[n\lambda_1]+1} \lesssim 2^{[n\lambda_1]+\dots+[n\lambda_{d+1-k}]} \lesssim 2^{nd/(d+1)} \lesssim_d \frac{2^n}{n \ln n}.$$

2°. Пусть $[n\lambda_1] > n/(d+1)$. В этом случае правую часть в оценке σ_k^0 разобьем на две суммы:

$$\sigma_k^0 \lesssim_d 2^{[n\lambda_2]+\dots+[n\lambda_{d+1-k}]} (g_1 + g_2), \quad (1.1.29)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= \sum_{i_1=0}^{N-[n\lambda_1]} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \frac{1}{(N+3-i_1) \ln(N+3-i_1)}, \\ g_2 &= \sum_{i_1=N-[n\lambda_1]+1}^N C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \frac{1}{(N+3-i_1) \ln(N+3-i_1)}. \end{aligned}$$

Оценим g_1 :

$$g_1 \leq \frac{1}{\ln(N+3-N+[n\lambda_1])} \sum_{i_1=0}^{N-[n\lambda_1]} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \frac{1}{(N+3-i_1)}.$$

Отметим, что $N+3-i_1 = ([n\lambda_1]+3-i_1) - 2d$, причем $[n\lambda_1]+3-i_1 \geq [n\lambda_1]+3 - ([n\lambda_1]-2d-[n\lambda_1]) = 2d+3+[n\lambda_1] \geq 2d+3+2d > 4d$. Так

как при $q \geq 4d$ справедливо неравенство $1/(q-2d) = 2/(q+q-4d) \leq 2/q$, то верна оценка:

$$\begin{aligned}
g_1 &\leq \frac{1}{\ln \sqrt{n\lambda_1}} \sum_{i_1=0}^{N-[\sqrt{n\lambda_1}]} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \frac{2}{[n\lambda_1] + 3 - i_1} \leq \\
&\leq \frac{2 \cdot 2}{[n\lambda_1 + 2] \ln n\lambda_1} \sum_{i_1=0}^{[n\lambda_1]} \frac{[n\lambda_1 + 1]![n\lambda_1 + 2]}{i_1![n\lambda_1 + 1 - i_1]![n\lambda_1 + 2 - i_1]} \leq \\
&\leq \frac{4}{n\lambda_1 \ln n\lambda_1} \sum_{i_1=0}^{[n\lambda_1]} C_{[n\lambda_1+2]}^{i_1} \leq \frac{4}{\frac{n}{d+1}(\ln n - \ln(d+1))} 2^{[n\lambda_1+2]} \lesssim \frac{2^{[n\lambda_1]}}{n \ln n}. \quad (1.1.30)
\end{aligned}$$

Остается оценить g_2 . Прежде всего отметим, что

$$g_2 \leq \sum_{i_1=N-[\sqrt{n\lambda_1}]+1}^N C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1}.$$

Так как $N - [\sqrt{n\lambda_1}] + 1 = [n\lambda_1] - 2d - [\sqrt{n\lambda_1}] + 1 \geq n\lambda_1/2$ при $[n\lambda_1] \geq 4d^2$, то

$$\begin{aligned}
g_2 &\leq \sqrt{n\lambda_1} C_{[n\lambda_1+1]}^{N-[\sqrt{n\lambda_1}]+1} = \sqrt{n\lambda_1} C_{[n\lambda_1+1]}^{[n\lambda_1]-2d-[\sqrt{n\lambda_1}]+1} = \\
&= \sqrt{n\lambda_1} \frac{[n\lambda_1 + 1]!}{([n\lambda_1 + 1] - 2d - [\sqrt{n\lambda_1}])! ([\sqrt{n\lambda_1}] + 2d)!}.
\end{aligned}$$

Положим $\nu = [\sqrt{n\lambda_1}] + 2d$, $\mu = [n\lambda_1 + 1]$. В этих обозначениях получаем:

$$g_2 \leq \nu \frac{\mu!}{(\mu - \nu)! \nu!} \leq \mu(\mu - 1) \dots (\mu - \nu + 1) \leq \mu^\nu.$$

Возьмем логарифм от обеих частей неравенства:

$$\ln g_2 \leq \nu \ln \mu = \mu \left(\frac{\nu \ln \mu}{\mu} + \frac{\ln \mu}{\mu} + \frac{\ln \ln \mu}{\mu} \right) - \ln \mu - \ln \ln \mu.$$

Сумма в скобках стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, поэтому, начиная с некоторого n , зависящего от d , не превосходит $\ln 2$. Тогда найдется положительная величина $C(d)$, зависящая только от d , такая, что справедлива оценка

$$\ln g_2 \leq C(d) + \mu \ln 2 - \ln \mu - \ln \ln \mu,$$

откуда следует, что $g_2 \underset{d}{\lesssim} \frac{2^\mu}{\mu \ln \mu}$, т. е.

$$g_2 \underset{d}{\lesssim} \frac{2^{[n\lambda_1]}}{\frac{n}{d+1} \ln \frac{n}{d+1}} \underset{d}{\lesssim} \frac{2^{[n\lambda_1]}}{n \ln n}. \quad (1.1.31)$$

Из (1.1.29)–(1.1.31) следует, что в рассматриваемом случае

$$\sigma_k^0 \underset{d}{\lesssim} \frac{2^{[n\lambda_1] + \dots + [n\lambda_{d+1-k}]}}{n \ln n} \underset{d}{\lesssim} \frac{2^n}{n \ln n}.$$

Таким образом, 1° и 2° дают оценку

$$\sigma_k^0 \underset{d}{\lesssim} \frac{2^n}{n \ln n}. \quad (1.1.32)$$

Тогда в силу (1.1.18), (1.1.19), (1.1.22) и (1.1.32) получаем неравенство

$$L_n^d \underset{d}{\lesssim} \frac{2^n}{n \ln n},$$

и теорема 1.1.1 доказана. □

§ 1.2. Оценка снизу функции Лебега

В процессе доказательства результатов нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1.2.А [4, гл. 5, §4, лемма 2]. *Для каждого $x \in (-1, 1)$ найдется такая последовательность натуральных чисел $n_k \rightarrow \infty$, что*

$$\left| \sin \frac{\pi n_k}{2} (1 - x) \right| \geq \sin \frac{\pi |x|}{2} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1.2.1)$$

Сделаем замену $x = 2\lambda_0 - 1$. Тогда для каждого $\lambda_0 \in (0, 1)$ для той же последовательности чисел $n_k \rightarrow \infty$ неравенство (1.2.1) преобразуется к виду

$$|\sin \pi n_k \lambda_0| \geq |\cos \pi \lambda_0|. \quad (1.2.2)$$

Лемма 1.2.В [4, гл. 5, §4, лемма 3]. Для любого натурального числа $d \geq 2$ и любого $\lambda_0 \in (0, 1/(d+1))$ выполняются неравенства

$$\varphi(\lambda_0) = 2\lambda_0^{\lambda_0} (1 - \lambda_0)^{1-\lambda_0} \geq 2 \frac{d}{d+1} \left(\frac{1}{d}\right)^{1/(d+1)} \geq \frac{2^{5/3}}{3} > 1. \quad (1.2.3)$$

Доказательство воспроизводится для удобства читателя, поскольку в [4] лемма формулируется в несколько другом виде. Так как $(\ln \varphi(\lambda_0))' = \ln \lambda_0 - \ln(1 - \lambda_0) < 0$ на $(0, 1/2)$, то функция $\varphi(\lambda_0)$ на $(0, 1/2)$ убывает, откуда следует, что

$$\varphi(\lambda_0) \geq \varphi(1/(d+1)) \geq \varphi(1/3).$$

Подставляя $1/(d+1)$ и $1/3$ в φ , получаем соответствующие неравенства в (1.2.3). Лемма 1.2.В доказана. \square

Введем множество числовых последовательностей

$$\mathcal{A} = \{\alpha_n \mid \alpha_n > 0, \alpha_n \rightarrow \infty \text{ и } \alpha_n/n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty\}.$$

Теорема 1.2.1. Пусть $d \geq 2$, $u \in \Delta$, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$. Если существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n_0$ выполнено соотношение $\lambda_0 = \lambda_0(u) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{s=1,2,\dots,d+1} \lambda_s \geq \alpha_n/n$, то найдется последовательность номеров $n_k \rightarrow \infty$ (при $k \rightarrow \infty$), для которых выполняются неравенства

$$L_{n_k}^d(u) = L_{n_k}^d(\lambda) \geq c_d(\lambda_0) \frac{\sqrt{\alpha_{n_k}}}{n_k^{1+d/2}} [\varphi(\lambda_0)]^{n_k}, \quad (1.2.4)$$

где $\varphi(\lambda_0) = 2\lambda_0^{\lambda_0} (1 - \lambda_0)^{1-\lambda_0}$, $c_d(\lambda_0) = C_d |\cos \pi \lambda_0|/\pi$, C_d — некоторая положительная величина, которая может зависеть только от d .

Доказательство. В силу представления (1.1.3) для любого $i' \in I$ (I — множество мультииндексов, введенное в (1.1.2)) имеет место неравенство $L_n^d(\lambda) \geq |l_{i'}(\lambda)|$. Тогда, чтобы доказать теорему, достаточно указать для произвольной точки симплекса такое i' , для которого будет выполняться

$$L_{n_k}^d(\lambda) \geq |l_{i'}(\lambda)| \geq c_d(\lambda_0) \frac{\sqrt{\alpha_{n_k}}}{n_k^{1+d/2}} [\varphi(\lambda_0)]^{n_k}. \quad (1.2.5)$$

Пусть точка $u = u(\lambda)$ такова, что $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1})$ удовлетворяет условиям теоремы. Без ограничений общности можем считать, что $\lambda_{d+1} = \min_s \lambda_s$. Отметим, что $\alpha_n/n \leq \lambda_{d+1} \leq 1/(d+1)$. Выберем $i' = (i'_1, i'_2, \dots, i'_{d+1}) \in I$ следующим образом:

$$\begin{aligned} i'_s &= \frac{n\lambda_s}{2(1-\lambda_{d+1})} + \varepsilon_s, \quad s = 1, 2, \dots, d; \\ i'_{d+1} &= \frac{n}{2} + \varepsilon_{d+1}, \quad \varepsilon_{d+1} = -\sum_{s=1}^d \varepsilon_s, \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

где для $s = 1, 2, \dots, d$ числа $\varepsilon_s \in [0, 1)$ таковы, что $i'_s \in \mathbb{N}$. Докажем (1.2.5).

Используя (1.1.4) и формулу $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$, т. е.

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{\Gamma(z) \sin \pi z}{\pi} = \frac{\Gamma(z+1) \sin \pi z}{\pi z},$$

преобразуем $l_{i'}$ к виду

$$l_{i'}(\lambda) = \pm \frac{\Gamma(n\lambda_1 + 1) \dots \Gamma(n\lambda_{d+1} + 1) \Gamma(i'_{d+1} - n\lambda_{d+1} + 1)}{\Gamma(n\lambda_1 - i'_1 + 1) \dots \Gamma(n\lambda_d - i'_d + 1) i'_1! i'_2! \dots i'_{d+1}!} \cdot \frac{\sin \pi n\lambda_{d+1}}{\pi(i'_{d+1} - n\lambda_{d+1})}. \quad (1.2.7)$$

Так как для любого s имеет место $n\lambda_s \geq n\lambda_{d+1} \geq \alpha_n$, то при указанном выборе i' аргументы всех Γ -функций в (1.2.7) (включая в их число все факториалы) стремятся к $+\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Используя формулу Стирлинга для логарифма Γ -функции, получаем

$$\ln \left| l_{i'}(\lambda) \frac{\pi(i'_{d+1} - n\lambda_{d+1})}{\sin \pi n\lambda_{d+1}} \right| = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (1.2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{s=1}^{d+1} n\lambda_s \ln n\lambda_s - \sum_{s=1}^d (n\lambda_s - i'_s) \ln (n\lambda_s - i'_s) + \\ &+ (i'_{d+1} - n\lambda_{d+1}) \ln (i'_{d+1} - n\lambda_{d+1}) - \sum_{s=1}^{d+1} i'_s \ln i'_s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 = & -\sum_{s=1}^{d+1} n\lambda_s + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{d+1} \ln n\lambda_s + \sum_{s=1}^d (n\lambda_s - i'_s) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^d \ln(n\lambda_s - i'_s) - \\ & - (i'_{d+1} - n\lambda_{d+1}) + \frac{1}{2} \ln(i'_{d+1} - n\lambda_{d+1}) + \sum_{s=1}^{d+1} i'_s - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{d+1} \ln i'_s,\end{aligned}$$

величина $|\sigma_3|$ ограничена константой, не зависящей от n и от λ .

Оценим сумму σ_1 , подставив i'_s ($s = 1, 2, \dots, d+1$) и разбив ее на 7 слагаемых следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_1 = & \sum_{s=1}^{d+1} n\lambda_s \ln n\lambda_s - \sum_{s=1}^d \frac{n\lambda_s(1-2\lambda_{d+1})}{2(1-\lambda_{d+1})} \ln \left(\frac{n\lambda_s(1-2\lambda_{d+1})}{2(1-\lambda_{d+1})} - \varepsilon_s \right) + \\ & + \frac{n(1-2\lambda_{d+1})}{2} \ln \left(\frac{n(1-2\lambda_{d+1})}{2} + \varepsilon_{d+1} \right) - \\ & - \sum_{s=1}^d \frac{n\lambda_s}{2(1-\lambda_{d+1})} \ln \left(\frac{n\lambda_s}{2(1-\lambda_{d+1})} + \varepsilon_s \right) - \frac{n}{2} \ln \left(\frac{n}{2} + \varepsilon_{d+1} \right) + \\ & + \sum_{s=1}^d \varepsilon_s \left(\ln \left(\frac{n\lambda_s(1-2\lambda_{d+1})}{2(1-\lambda_{d+1})} - \varepsilon_s \right) - \ln \left(\frac{n\lambda_s}{2(1-\lambda_{d+1})} + \varepsilon_s \right) \right) + \\ & + \varepsilon_{d+1} \left(\ln \left(\frac{n}{2} - n\lambda_{d+1} + \varepsilon_{d+1} \right) - \ln \left(\frac{n}{2} + \varepsilon_{d+1} \right) \right).\end{aligned}$$

Рассмотрим для примера пятое слагаемое из σ_1 и для достаточно больших n оценим его снизу величиной, которая не зависит от ε_{d+1} , но содержит дополнительное слагаемое, которое может зависеть только от d :

$$\begin{aligned}-\frac{n}{2} \ln \left(\frac{n}{2} + \varepsilon_{d+1} \right) &= -\frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{2\varepsilon_{d+1}}{n} \right) = \\ &= -\frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \cdot \frac{2\varepsilon_{d+1}/n}{1 + 2\varepsilon_{d+1}\theta/n} \geq -\frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} - d\end{aligned}$$

(здесь $\theta \in (0, 1)$). Аналогично присутствие всех ε_s во втором–четвертом слагаемых суммы σ_1 можно при оценке снизу заменить на дополнительное слагаемое, зависящее только от d . Кроме того, шестое и седьмое слагаемые при достаточно больших n оцениваются величиной, зависящей только

от d : например, если n достаточно велико (и это зависит только от d) для того, чтобы выполнялось неравенство $1 + 2\varepsilon_{d+1}/n \geq (2d+1)/(2d+2)$, то с учетом того, что $\lambda_{d+1} \leq 1/(d+1)$, получаем следующую оценку для седьмого слагаемого:

$$\begin{aligned}
& \left| \varepsilon_{d+1} \left(\ln \left(\frac{n}{2} - n\lambda_{d+1} + \varepsilon_{d+1} \right) - \ln \left(\frac{n}{2} + \varepsilon_{d+1} \right) \right) \right| = \\
& = \left| \varepsilon_{d+1} \ln \frac{1 - 2\lambda_{d+1} + 2\varepsilon_{d+1}/n}{1 + 2\varepsilon_{d+1}/n} \right| = \\
& = \left| \varepsilon_{d+1} \ln \left(1 - \frac{2\lambda_{d+1}}{1 + 2\varepsilon_{d+1}/n} \right) \right| \leq \left| \varepsilon_{d+1} \ln \left(1 - \frac{2 \cdot 1/(d+1)}{(2d+1)/(2d+2)} \right) \right| \leq \\
& \leq \left| \varepsilon_{d+1} \ln \left(1 - \frac{4}{2d+1} \right) \right| \leq \left| \varepsilon_{d+1} \ln \frac{1}{5} \right| \leq d \ln 5.
\end{aligned}$$

Шестое слагаемое (точнее, каждое из слагаемых в соответствующей сумме) оценивается аналогично. Таким образом, если $r_1(d) \in \mathbb{R}$ — некоторая величина, зависящая только от d , то

$$\begin{aligned}
\sigma_1 & \geq \sum_{s=1}^{d+1} n\lambda_s \ln n\lambda_s - \frac{n(1-2\lambda_{d+1})}{2(1-\lambda_{d+1})} \sum_{s=1}^d \lambda_s \ln \frac{n\lambda_s(1-2\lambda_{d+1})}{2(1-\lambda_{d+1})} + \\
& \quad + \frac{n(1-2\lambda_{d+1})}{2} \ln \frac{n(1-2\lambda_{d+1})}{2} - \\
& \quad - \frac{n}{2(1-\lambda_{d+1})} \sum_{s=1}^d \lambda_s \ln \frac{n\lambda_s}{2(1-\lambda_{d+1})} - \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} + r_1(d) = \\
& = \sum_{s=1}^{d+1} n\lambda_s \ln n\lambda_s - \frac{n(1-2\lambda_{d+1})}{2(1-\lambda_{d+1})} \sum_{s=1}^d \lambda_s \ln \frac{n\lambda_s}{2(1-\lambda_{d+1})} - \\
& \quad - \frac{n(1-2\lambda_{d+1})}{2(1-\lambda_{d+1})} \ln(1-2\lambda_{d+1}) \sum_{s=1}^d \lambda_s + \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \ln(1-2\lambda_{d+1}) - \\
& \quad - n\lambda_{d+1} \ln \frac{n(1-2\lambda_{d+1})}{2} - \frac{n}{2(1-\lambda_{d+1})} \sum_{s=1}^d \lambda_s \ln \frac{n\lambda_s}{2(1-\lambda_{d+1})} - \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} + r_1(d).
\end{aligned}$$

Сумма четвертого и восьмого слагаемых равна нулю. Складывая второе и седьмое слагаемые и заменяя $\sum_{s=1}^d \lambda_s$ на $(1 - \lambda_{d+1})$ в третьем, получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &\geq \sum_{s=1}^{d+1} n\lambda_s \ln n\lambda_s - n \left(\sum_{s=1}^d \lambda_s \ln n\lambda_s - \ln 2(1 - \lambda_{d+1}) \sum_{s=1}^d \lambda_s \right) \\
&\quad - \frac{n}{2}(1 - 2\lambda_{d+1}) \ln(1 - 2\lambda_{d+1}) + \frac{n}{2} \ln(1 - 2\lambda_{d+1}) - \\
&\quad - n\lambda_{d+1} \ln \frac{n}{2} - n\lambda_{d+1} \ln(1 - 2\lambda_{d+1}) + r_1(d) = \\
&= n\lambda_{d+1} \ln n\lambda_{d+1} + n(1 - \lambda_{d+1}) \ln 2(1 - \lambda_{d+1}) - n\lambda_{d+1} \ln \frac{n}{2} + r_1(d) = \\
&= n\lambda_{d+1} \ln 2\lambda_{d+1} + n(1 - \lambda_{d+1}) \ln 2(1 - \lambda_{d+1}) + r_1(d) = \\
&= n \ln 2^{\lambda_{d+1}} \lambda_{d+1}^{\lambda_{d+1}} 2^{1-\lambda_{d+1}} (1 - \lambda_{d+1})^{1-\lambda_{d+1}} + r_1(d) = \\
&= n \ln 2\lambda_{d+1}^{\lambda_{d+1}} (1 - \lambda_{d+1})^{1-\lambda_{d+1}} + r_1(d). \tag{1.2.9}
\end{aligned}$$

Перейдем к оценке σ_2 . Суммы первого и седьмого, третьего и пятого слагаемых равны нулю, так как $\sum_{s=1}^{d+1} \lambda_s = 1$ и $\sum_{s=1}^{d+1} i'_s = n$. Тогда

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{d+1} \ln n\lambda_s - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^d \ln(n\lambda_s - i'_s) + \frac{1}{2} \ln(i'_{d+1} - n\lambda_{d+1}) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{d+1} \ln i'_s.$$

Далее подставляем (1.2.6). Так же, как и при оценке σ_1 , присутствие всех величин ε_s можно заменить на некоторое слагаемое $r_2(d) \in \mathbb{R}$, зависящее только от d :

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &\geq \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{d+1} \ln n\lambda_s - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^d \ln \frac{n\lambda_s(1 - 2\lambda_{d+1})}{2(1 - \lambda_{d+1})} + \frac{1}{2} \ln \frac{n(1 - 2\lambda_{d+1})}{2} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^d \ln \frac{n\lambda_s}{2(1 - \lambda_{d+1})} - \frac{1}{2} \ln \frac{n}{2} + r_2(d) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^d \ln 2(1 - \lambda_{d+1}) + \frac{1}{2} \ln n\lambda_{d+1} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^d \ln \frac{n\lambda_s(1 - 2\lambda_{d+1})}{2(1 - \lambda_{d+1})} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - 2\lambda_{d+1}}{2} - \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln 2 + r_2(d) \geq \\
& \geq \frac{1}{2} \ln \alpha_n - \frac{d}{2} \ln n + \tilde{r}_2(d) = \ln \frac{\sqrt{\alpha_n}}{n^{d/2}} + \tilde{r}_2(d), \tag{1.2.10}
\end{aligned}$$

где $\tilde{r}_2(d) \in \mathbb{R}$ зависит только от d .

Из (1.2.8), (1.2.9) и (1.2.10), при некотором $r(d) \in \mathbb{R}$, зависящем только от d , получаем

$$\ln \left| l_{i'}(\lambda) \frac{\pi(i'_{d+1} - n\lambda_{d+1})}{\sin \pi n \lambda_{d+1}} \right| \geq \ln \frac{\sqrt{\alpha_n} \left(2\lambda_{d+1}^{\lambda_{d+1}} (1 - \lambda_{d+1})^{1-\lambda_{d+1}} \right)^n}{n^{d/2}} + r(d),$$

откуда следует

$$|l_{i'}(\lambda)| \geq C_d \frac{\sqrt{\alpha_n} (\varphi(\lambda_{d+1}))^n}{n^{d/2} (i'_{d+1} - n\lambda_{d+1})} \cdot \frac{|\sin \pi n \lambda_{d+1}|}{\pi},$$

где положительное число C_d зависит только от d . С учетом неравенства $i'_{d+1} - n\lambda_{d+1} \leq n$ получаем

$$|l_{i'}(\lambda)| \geq C_d \frac{\sqrt{\alpha_n} (\varphi(\lambda_{d+1}))^n}{n^{1+d/2}} \cdot \frac{|\sin \pi n \lambda_{d+1}|}{\pi}.$$

Полагая $\lambda_0 = \lambda_{d+1}$ и

$$c_d(\lambda_0) = C_d |\cos \pi \lambda_0| / \pi,$$

принимая к рассмотрению только те $n = n_k$, для которых имеет место (1.2.2), получаем утверждение теоремы. Теорема 1.2.1 доказана. \square

Замечание 1.2.1. Так как $\lambda_0 \leq 1/(d+1) \leq 1/3$, т. е. $c_d(\lambda_0) = C_d |\cos \pi \lambda_0| / \pi \geq C_d / (2\pi)$, то вместо (1.2.4) в формулировке теоремы 1.2.1 можно использовать оценку

$$L_{n_k}^d(u) = L_{n_k}^d(\lambda) \geq c_d \frac{\sqrt{\alpha_{n_k}}}{n_k^{1+d/2}} [\varphi(\lambda_0)]^{n_k},$$

где c_d — положительная величина, зависящая только от d .

Глава 2. Оценки погрешности аппроксимации производных в случаях простой и кратной интерполяции на треугольниках и тетраэдрах

Везде в данной главе, за исключением п. 2.1.3, рассматривается случай $d = 2$, т. е. Δ является треугольником с вершинами a_1, a_2, a_3 ; в п. 2.1.3 параграфа 2.1 рассматривается случай $d = 3$, Δ — тетраэдр. Изучаются величины $\mathbf{E}_{n,s}^d$ и $\mathcal{E}_{n,s}$ для разных способов интерполяции при соответствующих d, n, s .

§ 2.1. Оценки сверху для простых конечных элементов

2.1.1. Многочлены 3-й степени на треугольниках. Пусть треугольник Δ помещен в прямоугольную систему координат таким образом, что $a_1 = (a + b, 0)$, $a_2 = (0, 0)$, $a_3 = (a, h)$; $a, b, h > 0$; $0 < a \leq b$, $a + b = H$.

Для получения оценок погрешности интерполяции нам понадобится следующая теорема.

Теорема 2.1.А [77]. Пусть $g(t)$ — функция действительной переменной $t \in [0, l]$, непрерывная на $[0, l]$ и имеющая ограниченную константой M производную порядка $n + 1$ на $(0, l)$. Пусть $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_r = l$ и значения функции и ее производных удовлетворяют неравенствам

$$|g(t_i)| \leq \zeta_i^0, \dots, \left| g^{(\alpha_i-1)}(t_i) \right| \leq \zeta_i^{(\alpha_i-1)}, \quad i = 0, \dots, r,$$

где $\zeta_i^{(k)}$ — константы, α_i — натуральные числа, удовлетворяющие условию

$$\alpha_0 + \dots + \alpha_r = n + 1.$$

Пусть $\zeta = \max_{i=0,\dots,r} \left| \max_{k=0,\dots,\alpha_i-1} l^k \zeta_i^{(k)} \right|$. Тогда

$$\left| g^{(p)}(t) \right| \leq K_{2p+1} l^{-p} \zeta + K_{2p+2} M l^{n+1-p},$$

$$t \in [0, l], \quad p = 0, \dots, n+1,$$

где K_{2p+1} , K_{2p+2} – некоторые константы.

Пусть $n = 3$, $f \in W^4 M(\Omega)$. Через $P_3(x, y) = P_3(u) = P_3[f](u)$, где $u = (x, y) \in \Delta$, обозначим многочлен степени не выше 3 по совокупности переменных, удовлетворяющий следующим интерполяционным условиям:

$$P_3(a_i) = f(a_i), \quad i = 1, 2, 3; \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial P_3(a_i)}{\partial x} = \frac{\partial f(a_i)}{\partial x}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial P_3(a_i)}{\partial y} = \frac{\partial f(a_i)}{\partial y}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial^2 P_3(a_2)}{\partial \xi \partial \tau} = \frac{\partial^2 f(a_2)}{\partial \xi \partial \tau}, \quad (2.1.4)$$

где ξ и τ – единичные векторы, направленные от a_2 к a_1 и от a_2 к a_3 соответственно. Пусть

$$e(x, y) = f(x, y) - P_3(x, y).$$

Теорема 2.1.1. Для способа интерполяции, определяемого условиями (2.1.1)–(2.1.4), справедливы оценки

$$\mathbf{E}_{3,p}^2 \lesssim \frac{MH^{4-p}}{\sin^p \beta}, \quad p = \overline{0, 3}.$$

Доказательство. Докажем, что для любой функции $f \in W^4 M$ и любой точки $(x, y) \in \Delta$ справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^p (f(x, y) - P_3(x, y))}{\partial x^{p-j} \partial y^j} \right| \lesssim \frac{MH^{4-p}}{\sin^j \beta}, \quad (2.1.5)$$

где $0 \leq p \leq 3$, $0 \leq j \leq p$. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши, получим разложение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p e(x, y)}{\partial x^{p-s} \partial y^s} &= \sum_{i=s}^{3-p+s} \frac{1}{(i-s)!} y^{i-s} \sum_{k=0}^{3-p+s-i} \frac{\partial^{p-s+i+k} e(0, 0)}{\partial x^{p-s+k} \partial y^i} \frac{x^k}{k!} + \\ &+ \sum_{i=s}^{3-p+s} \frac{1}{(i-s)!} y^{i-s} \int_0^x \frac{(x-v)^{3-p+s-i}}{(3-p+s-i)!} \frac{\partial^4 f(v, 0)}{\partial v^{4-i} \partial y^i} dv + \\ &+ \int_0^y \frac{(y-t)^{3-p}}{(3-p)!} \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^{p-s} \partial t^{4-p+s}} dt . \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Тогда, чтобы доказать (2.1.5), достаточно оценить $\frac{\partial^p e(0, 0)}{\partial x^{p-j} \partial y^j}$, $0 \leq p \leq 3$, $0 \leq j \leq p$. Так как значение погрешности интерполяции $e(x, y)$ и ее первых производных в точке $a_2 = (0, 0)$ по условиям (2.1.1) – (2.1.3) равно нулю, остается оценить производные второго и третьего порядков.

Лемма 2.1.1. *Для $j = 0, 1, 2$ справедлива оценка*

$$\left| \frac{\partial^2 e(0, 0)}{\partial x^{2-j} \partial y^j} \right| \lesssim M H^2 \frac{1}{\sin^j \beta} . \quad (2.1.7)$$

Доказательство. Рассматривая $e(x, 0)$ на отрезке $a_2 a_1$ и используя формулы для оценки ошибки интерполяции в одномерном случае (см. [2] или теорему 2.1.А для $\zeta = 0$), получим

$$\left| \frac{\partial^2 e(0, 0)}{\partial x^2} \right| \lesssim M b^2 \leq M H^2 .$$

Аналогично, рассматривая $e(x, y)$ вдоль отрезка $a_2 a_3$, будем иметь

$$\left| \frac{\partial^2 e(0, 0)}{\partial \tau^2} \right| \lesssim M(a^2 + h^2) .$$

Кроме того, используем условие (2.1.4). Представляя $\frac{\partial^2 e(0, 0)}{\partial \tau^2}$, $\frac{\partial^2 e(0, 0)}{\partial x \partial \tau}$, $\frac{\partial^2 e(0, 0)}{\partial x^2}$ через производные по переменным x и y , получим систему уравнений относительно $\frac{\partial^2 e(0, 0)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 e(0, 0)}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 e(0, 0)}{\partial y^2}$, расширенная матрица

которой имеет следующий вид:

$$(D|B) = \begin{pmatrix} \cos^2 \beta & 2 \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta & B_1 \\ \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

где через D обозначена основная матрица, через B – столбец свободных членов; при этом выполняются оценки

$$|B_1| \lesssim M(a^2 + h^2), \quad |B_2| \lesssim MH^2.$$

Оценим величины $\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial y^2}$ (оценка для $\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial x^2}$ уже получена), решая систему по формулам Крамера. Очевидно, $\det D = -\sin^3 \beta$.

Так как

$$\det D_{xy} \triangleq \begin{vmatrix} \cos^2 \beta & B_1 & \sin^2 \beta \\ \cos \beta & 0 & 0 \\ 1 & B_2 & 0 \end{vmatrix} = B_2 \cos \beta \sin^2 \beta,$$

то

$$\left| \frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial x \partial y} \right| = \left| \frac{\det D_{xy}}{\det D} \right| \lesssim MH^2 \frac{1}{\sin \beta}.$$

Наконец,

$$\det D_{y^2} \triangleq \begin{vmatrix} \cos^2 \beta & 2 \cos \beta \sin \beta & B_1 \\ \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 1 & 0 & B_2 \end{vmatrix} = -B_1 \sin \beta - B_2 \cos^2 \beta \sin \beta,$$

и поэтому

$$\left| \frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial y^2} \right| \leq \frac{|B_1| + |B_2|}{\sin^2 \beta} \lesssim MH^2 \frac{1}{\sin^2 \beta}.$$

Лемма 2.1.1 доказана. □

Лемма 2.1.2. Для $j = 0, 1, 2, 3$ справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x^{3-j} \partial y^j} \right| \lesssim MH \frac{1}{\sin^j \beta}. \quad (2.1.8)$$

Доказательство. Рассмотрим сужение функции $\frac{\partial e(x, y)}{\partial y}$ на сторону $a_2 a_1$. Учитывая условие (2.1.3) для $i = 1, 2$ и то, что $\left| \frac{\partial e^2(0, 0)}{\partial x \partial y} \right| \lesssim M \frac{H^2}{\sin \beta}$ (согласно лемме 2.1.1), по теореме 2.1.A получаем

$$\left| \frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial x^2 \partial y} \right| \lesssim M H \frac{1}{\sin \beta} .$$

Аналогично, рассматривая сужение функции $\frac{\partial e(x, y)}{\partial x}$ на $a_2 a_3$ и используя (2.1.2) при $i = 2, 3$ и (2.1.3), получим оценку

$$\left| \frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial x \partial \tau^2} \right| \lesssim M H (a^2 + h^2)^{1/2} .$$

Кроме того, так же, как при доказательстве леммы 2.2.1, получаем оценки $\left| \frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial x^3} \right| \lesssim M H$ и $\left| \frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial \tau^3} \right| \lesssim M (a^2 + h^2)^{1/2}$.

Представляя $\frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial \tau^3}$, $\frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial x \partial \tau^2}$, $\frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial x^3}$ через производные по переменным x и y , получим систему уравнений относительно $\frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial y^3}$, расширенная матрица которой имеет вид

$$(D|B) = \begin{pmatrix} \cos^3 \beta & 3 \cos^2 \beta \sin \beta & 3 \cos \beta \sin^2 \beta & \sin^3 \beta & B_1 \\ \cos^2 \beta & 2 \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta & 0 & B_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & B_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & B_4 \end{pmatrix} ,$$

где $|B_1| \lesssim M(a^2 + h^2)^{1/2}$, $|B_2| \lesssim M(a^2 + h^2)^{1/2}$, $|B_3| \lesssim M H / \sin \beta$, $|B_4| \lesssim M H$. Так как оценки величин $\frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial x^3}$ и $\frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial x^2 \partial y}$ уже получены, остается оценить $\frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial x \partial y^2}$ и $\frac{\partial^3 e(0, 0)}{\partial y^3}$, решая систему по формулам Крамера. Определитель основной матрицы равен $\det D = \sin^5 \beta$. Кроме

того,

$$\det D_{xy^2} \triangleq \begin{vmatrix} \cos^3 \beta & 3 \cos^2 \beta \sin \beta & B_1 & \sin^3 \beta \\ \cos^2 \beta & 2 \cos \beta \sin \beta & B_2 & 0 \\ 0 & 1 & B_3 & 0 \\ 1 & 0 & B_4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\sin^3 \beta (-B_2 + 2B_3 \cos \beta \sin \beta + B_4 \cos^2 \beta),$$

откуда следует, что

$$\left| \frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x \partial y^2} \right| = \left| \frac{\det D_{xy^2}}{\det D} \right| \lesssim MH \frac{1}{\sin^2 \beta}.$$

Наконец,

$$\det D_{y^3} \triangleq \begin{vmatrix} \cos^3 \beta & 3 \cos^2 \beta \sin \beta & 3 \cos \beta \sin^2 \beta & B_1 \\ \cos^2 \beta & 2 \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta & B_2 \\ 0 & 1 & 0 & B_3 \\ 1 & 0 & 0 & B_4 \end{vmatrix} =$$

$$= B_1 \sin^2 \beta - 3B_2 \cos \beta \sin^2 \beta + 3B_3 \cos^2 \beta \sin^3 \beta + 2B_4 \cos^3 \beta \sin^2 \beta,$$

и поэтому

$$\left| \frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial y^3} \right| = \left| \frac{\det D_{y^3}}{\det D} \right| \lesssim MH \frac{1}{\sin^3 \beta}.$$

Лемма 2.1.2 доказана. \square

Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться разложением (2.1.6) с учетом условий (2.1.1)–(2.1.3) для $i = 2$ и оценок (2.1.10) и (2.1.9). Таким образом, теорема 2.1.1 доказана. \square

Следствие 2.1.1. Для любой $f \in W^4 M$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^{s+p+q} e(x,y)}{\partial \tau_{ij}^s \partial \tau_{ik}^p \partial \tau_{jk}^q} \right| \lesssim MH^{4-n}, \quad (2.1.9)$$

где $(x,y) \in \Delta$, $0 \leq s+p+q \leq 3$, $0 \leq s,p,q \leq 3$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.

Следствие 2.1.2. Для любой $f \in W^4M$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^n e(x, y)}{\partial \tau_{ij}^{n-s} \partial \varsigma^s} \right| \lesssim M H^{4-n} \frac{1}{\sin^s \beta}, \quad (2.1.10)$$

где $(x, y) \in \Delta$, $1 \leq i, j \leq 3$, $i \neq j$, ς – произвольный единичный вектор, в том числе единичная нормаль к τ_{ij} , $0 \leq n \leq 3$, $0 \leq s \leq n$.

Доказательства обоих следствий вытекают из (2.1.5) и из того, что при выбранном расположении треугольника Δ в системе координат $\tau_{21} = (1, 0)$, $\tau_{13} = (-\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\tau_{23} = (\cos \beta, \sin \beta)$, поскольку $\frac{\partial e}{\partial \tau} = \frac{\partial e}{\partial x} \tau_x + \frac{\partial e}{\partial y} \tau_y$, где $\tau = (\tau_x, \tau_y)$, $(\tau_x)^2 + (\tau_y)^2 = 1$. Кроме того, утверждение следствия 2.1.1 независимо доказано в [15]. \square

Замечание 2.1.1. Так как существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что $C_1 \sin \gamma \leq \sin \beta \leq C_2 \sin \gamma$ (где β – средний, а γ – наибольший углы треугольника Δ), то средний угол треугольника в правой части оценки (2.1.5) можно заменить на наибольший.

Замечание 2.1.2. Теорема 2.1.1 и следствия 2.1.1, 2.1.2 останутся справедливыми, если считать, что точка a_2 в интерполяционном условии является вершиной при наибольшем угле треугольника Δ . Чтобы убедиться в этом, достаточно повторить доказательство теоремы в предположении $\alpha \leq \gamma \leq \beta$. В этом случае считаем, что $a_1 = (a + b, 0)$, $a_2 = (0, 0)$, $a_3 = (a, h)$ в случае $0 < \alpha \leq \gamma \leq \beta < \pi/2$; $a_1 = (b, 0)$, $a_2 = (0, 0)$, $a_3 = (-a, h)$ в случае $0 < \alpha \leq \gamma \leq \beta$ и $\beta > \pi/2$; $a, b, h > 0$; $0 < a \leq b$, $a + b = H$.

Замечание 2.1.3. Оценки (2.1.5) также дают положительный ответ на вопрос о корректности предложенного способа интерполяции, поскольку по сути эти оценки получены как оценки решения системы линейных алгебраических уравнений, и из (2.1.5) следует, что если $f(x, y) \equiv 0$,

т. е. $M = 0$, то существует единственный интерполяционный многочлен, удовлетворяющий рассматриваемым интерполяционным условиям, а именно, $P_3(x, y) \equiv 0$. Ниже для других способов интерполяции вопросы существования интерполяционного многочлена решаются аналогичным образом, и поэтому в дальнейшем обсуждаться не будут.

2.1.2. Уточнение для многочленов 3-й степени на треугольниках. Пусть треугольник Δ с вершинами a_1, a_2, a_3 расположен в прямоугольной системе координат так же, как в п. 2.2.1; пусть $f \in W^4(\Omega)$, а многочлен $P_3(x, y) = P_3(u) = P_3[f](u)$ определяется условиями (2.1.1)–(2.1.3) и условием

$$\frac{\partial^3 P_3}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f(a_2)}{\partial y^3}, \quad (2.1.11)$$

т. е. (2.1.4) из п. 2.2.1 заменяем на (2.1.11); $e(x, y) = f(x, y) - P_3[f](x, y)$.

Задача интерполяции функции в соответствии с условиями (2.1.1)–(2.1.3), (2.1.11) уже рассматривалась в [14], однако в знаменателях полученных там оценок сверху для производных второго и третьего порядков присутствует синус наименьшего угла треугольника.

Теорема 2.1.2. Пусть многочлен $P_3(x, y)$ удовлетворяет условиям (2.1.1)–(2.1.3), (2.1.11). Тогда имеют место оценки

$$\mathbf{E}_{3,p}^2 \lesssim M H^{4-p} (\sin \beta)^{-\min\{2,p\}}, \quad p = \overline{0, 3}.$$

Доказательство. Докажем, что для любой точки $(x, y) \in \Delta$ и любых $p = \overline{0, 3}$, $j = \overline{0, p}$ имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial^p (f(x, y) - P_3(x, y))}{\partial x^{p-j} \partial y^j} \right| \lesssim \begin{cases} M H^{4-p} & \text{при } j = 0, \\ M H^{4-p} (\sin \beta)^{-1} & \text{при } j = 1, \\ M H^{4-p} (\sin \beta \operatorname{tg} \beta)^{-1} & \text{при } j = 2, 3. \end{cases} \quad (2.1.12)$$

Как и в п. 2.2.1, используем разложение (2.1.6) остатка $e(x, y)$ и его производных по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной

форме Коши. Для доказательства (2.1.12) достаточно оценить величины $\frac{\partial^p e(0,0)}{\partial x^{p-j} \partial y^j}$, $0 \leq p \leq 3$, $0 \leq j \leq p$. Так как значение погрешности интерполяции функции $e(x, y)$ и ее первых производных в точке $a_2 = (0, 0)$ согласно условиям (2.1.1)–(2.1.3) равно нулю, остается оценить производные второго и третьего порядков. Через ζ_{ij}^s будем обозначать некоторые внутренние точки отрезков $a_i a_j$, через C_i — некоторые подходящие константы.

Лемма 2.1.3. *Для $j = \overline{0, 3}$ справедливы оценки*

$$\left| \frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x^{3-j} \partial y^j} \right| \lesssim \begin{cases} MN & \text{при } j = 0 \text{ и } j = 3, \\ MN (\sin \beta)^{-1} & \text{при } j = 1, \\ MN (\sin \beta \operatorname{tg} \beta)^{-1} & \text{при } j = 2. \end{cases} \quad (2.1.13)$$

Доказательство. Пусть $j = 0$. Рассматривая $e(x, 0)$ на отрезке $a_2 a_1$ и используя формулы для оценки ошибки интерполяции в одномерном случае (см., например, [7]), получим $\left| \frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x^3} \right| \lesssim MN$. Для $j = 3$ оценки (2.1.13) являются следствием условия (2.1.11). Остается рассмотреть случаи $j = 1$ и $j = 2$.

Применяя последовательно формулы конечных приращений Лагранжа и производной остатка интерполяции, получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial \tau_{31}^3} &= \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial \tau_{31}^3} - \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^1)}{\partial \tau_{31}^3 \partial \tau_{23}} (a^2 + h^2)^{1/2} = \\ &= C_1 \frac{\partial^4 f(\zeta_{13}^1)}{\partial \tau_{31}^4} \frac{b}{\cos \alpha} - \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^1)}{\partial \tau_{31}^3 \partial \tau_{23}} (a^2 + h^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

С другой стороны, так как $\tau_{31} = (\cos \alpha, -\sin \alpha)$, производная по направлению τ_{31} в левой части (2.1.14) может быть представлена следующим образом:

$$\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial \tau_{31}^3} = \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^3} \cos^3 \alpha - 3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \alpha \sin \alpha +$$

$$+ 3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial y^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha - \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial y^3} \sin^3 \alpha. \quad (2.1.15)$$

Объединяя (2.1.14) и (2.1.15) и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^3} = C_2 \frac{\partial^4 f(\zeta_{21}^1)}{\partial x^4} (a + b) \quad (2.1.16)$$

(используем формулу производной остатка интерполяции на отрезке $a_2 a_1$), получаем равенство

$$-3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial y^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha - \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial y^3} \sin^3 \alpha = b m_1, \quad (2.1.17)$$

где

$$m_1 = C_1 \frac{\partial^4 f(\zeta_{13}^1)}{\partial \tau_{31}^4} \frac{1}{\cos \alpha} - C_2 \frac{\partial^4 f(\zeta_{21}^1)}{\partial x^4} \frac{(a + b)}{b} \cos^3 \alpha - \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^1)}{\partial \tau_{31}^3 \partial \tau_{23}} \frac{(a^2 + h^2)^{1/2}}{b}.$$

Первое и второе слагаемые в m_1 однозначно определяются величинами $\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial \tau_{31}^3}$ и $\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^3}$ соответственно, т. е. условиями (2.1.1)–(2.1.3) и не зависят от условий (2.1.4) или (2.1.11), а модуль третьего слагаемого для любой функции $f \in W^4 M$ оценивается сверху величиной $M (a^2 + h^2)^{1/2} / b$, умноженной на подходящую положительную константу. Поэтому сумму первых двух слагаемых в m_1 можно оценить через сумму абсолютных величин третьего слагаемого в m_1 и левой части (2.1.17), используя для получения оценок сверху оценки (2.1.5) для условий (2.1.1)–(2.1.4). Таким образом, если через $P_3^{[2.1.4]}(x, y)$ обозначить многочлен степени 3, удовлетворяющий условиям (2.1.1)–(2.1.4), и положить

$$e^{[2.1.4]}(x, y) = f(x, y) - P_3^{[2.1.4]}(x, y),$$

то

$$\left| C_1 \frac{\partial^4 f(\zeta_{13}^1)}{\partial \tau_{31}^4} \frac{1}{\cos \alpha} - C_2 \frac{\partial^4 f(\zeta_{21}^1)}{\partial x^4} \frac{(a + b)}{b} \cos^3 \alpha \right| \lesssim \left| \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^1)}{\partial \tau_{31}^3 \partial \tau_{23}} \frac{(a^2 + h^2)^{1/2}}{b} \right| +$$

$$+ \frac{1}{b} \left| -3 \frac{\partial^3 e^{[2.1.4]}(a_2)}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3 \frac{\partial^3 e^{[2.1.4]}(a_2)}{\partial x \partial y^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha - \right.$$

$$-\left. \frac{\partial^3 e^{[2.1.4]}(a_2)}{\partial y^3} \sin^3 \alpha \right| \lesssim M \frac{(a^2 + h^2)^{1/2}}{b},$$

и тогда

$$|m_1| \lesssim M \frac{(a^2 + h^2)^{1/2}}{b} \lesssim M \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (2.1.18)$$

С учетом (2.1.11) равенство (2.1.17) приводит к соотношению

$$-3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial y^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha = b m_1. \quad (2.1.19)$$

Рассматривая $e(x, y)$ вдоль отрезка $a_2 a_3$ и используя формулу производной остатка интерполяции и представление производной по направлению $\tau_{23} = (\cos \beta, \sin \beta)$ через частные производные по переменным x и y , получим последовательность равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial \tau_{23}^3} &= C_3 \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^2)}{\partial \tau_{23}^4} (a^2 + h^2)^{1/2} = \\ &= \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^3} \cos^3 \beta + 3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \beta \sin \beta + 3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial y^2} \cos \beta \sin^2 \beta + \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial y^3} \sin^3 \beta. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Из (2.1.20), (2.1.11) и (2.1.16) получим соотношение

$$3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \beta \sin \beta + 3 \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial y^2} \cos \beta \sin^2 \beta = b m_2, \quad (2.1.21)$$

где

$$m_2 = C_3 \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^2)}{\partial \tau_{23}^4} \frac{(a^2 + h^2)^{1/2}}{b} - C_2 \frac{\partial^4 f(\zeta_{21}^1)}{\partial x^4} \frac{a + b}{b} \cos^3 \beta,$$

т. е.

$$|m_2| \lesssim M \frac{(a^2 + h^2)^{1/2}}{b} + M \cos^3 \beta. \quad (2.1.22)$$

Решим систему уравнений (2.1.19), (2.1.21) (используем формулы Крамера):

$$\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial y} = - \frac{b (m_1 \cos \beta \sin^2 \beta - m_2 \cos \alpha \sin^2 \alpha)}{3 \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta \sin \beta \sin(\alpha + \beta)},$$

$$\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial y^2} = \frac{b (m_1 \cos^2 \beta \sin \beta + m_2 \cos^2 \alpha \sin \alpha)}{3 \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}.$$

С учетом (2.1.18), (2.1.22) и того, что $\sin \beta \lesssim \sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma \lesssim \sin \beta$, получаем оценки

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial y} \right| \lesssim MH (\sin \beta)^{-1}, \quad \left| \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial y^2} \right| \lesssim MH (\sin \beta \operatorname{tg} \beta)^{-1}.$$

Лемма 2.1.3 доказана. \square

Лемма 2.1.4. Для $j = \overline{0, 2}$ справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^2 e(0, 0)}{\partial x^{2-j} \partial y^j} \right| \lesssim \begin{cases} MH^2 & \text{при } j = 0, \\ MH^2 (\sin \beta)^{-1} & \text{при } j = 1, \\ MH^2 (\sin \beta \operatorname{tg} \beta)^{-1} & \text{при } j = 2. \end{cases} \quad (2.1.23)$$

Доказательство. При $j = 0$ так же, как в лемме 2.1.3, рассмотрим $e(x, 0)$ на отрезке $a_2 a_1$ и используя формулы для оценки ошибки интерполяции в одномерном случае, получим $\left| \frac{\partial^2 e(0, 0)}{\partial x^2} \right| \lesssim MH^2$.

Для случая $j = 1$ используем формулу Тейлора на отрезке $a_2 a_3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e(a_3)}{\partial x} &= \frac{\partial e(a_2)}{\partial x} + \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial x \partial \tau_{23}} (a^2 + h^2)^{1/2} + \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x \partial \tau_{23}^2} \frac{(a^2 + h^2)}{2} + \\ &+ \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^3)}{\partial x \partial \tau_{23}^3} \frac{(a^2 + h^2)^{3/2}}{6}. \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Левая часть и первое слагаемое в правой части (2.1.24) равны нулю в силу условий (2.1.2). Тогда

$$\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial x \partial \tau_{23}} = \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial x^2} \cos \beta + \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial x \partial y} \sin \beta = m_3, \quad (2.1.25)$$

где

$$m_3 = -\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x \partial \tau_{23}^2} \frac{(a^2 + h^2)^{1/2}}{2} - \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^3)}{\partial x \partial \tau_{23}^3} \frac{(a^2 + h^2)}{6}. \quad (2.1.26)$$

Для оценки первого слагаемого из (2.1.26) представим производную по направлению τ_{23} через частные производные по переменным x, y и воспользуемся оценками (2.1.13). Таким образом,

$$|m_3| \lesssim MH (a^2 + h^2)^{1/2}.$$

С учетом данной оценки из (2.1.25) и (2.1.23) при $j = 0$ получаем:

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial x \partial y} \right| \lesssim MH^2 (\sin \beta)^{-1}.$$

Остается доказать (2.1.23) для $j = 2$. Аналогично (2.1.20) получим последовательность равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial \tau_{23}^2} &= C_4 \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^3)}{\partial \tau_{23}^4} (a^2 + h^2) = \\ &= \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x^2} \cos^2 \beta + 2 \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial y} \cos \beta \sin \beta + \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial y^2} \sin^2 \beta, \end{aligned}$$

откуда с учетом (2.1.23) для $j = 0, 1$ следует, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial y^2} \right| &\leq \left| C_4 \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^3)}{\partial \tau_{23}^4} \frac{(a^2 + h^2)}{\sin^2 \beta} \right| + \left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x^2} \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} \right| + 2 \left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial y} \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right| \lesssim \\ &\lesssim M \left(\frac{a^2}{\sin^2 \beta} + \frac{h^2}{\sin^2 \beta} + \frac{H^2}{\sin \beta \operatorname{tg} \beta} \right). \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Так как $\cos \beta \gtrsim \cos((\pi - \alpha)/2) = \sin(\alpha/2) \gtrsim \sin \alpha$ и $\cos \alpha \geq 1/2$, то

$$\frac{h^2}{ab} = \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta \cos \alpha} \lesssim \sin \beta;$$

$$h^2 \lesssim ab \sin \beta;$$

$$\frac{h^2}{\sin^2 \beta} \lesssim \frac{ab \sin \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{hb}{\sin \beta \operatorname{tg} \beta} \lesssim \frac{H^2}{\sin \beta \operatorname{tg} \beta};$$

$$\frac{a^2}{\sin^2 \beta} = \frac{a^2 (a^2 + h^2)^{1/2}}{h \sin \beta} = \frac{a (a^2 + h^2)^{1/2}}{\sin \beta \operatorname{tg} \beta} \lesssim \frac{H^2}{\sin \beta \operatorname{tg} \beta}.$$

Тогда (2.1.27) дает оценку

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial y^2} \right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin \beta \operatorname{tg} \beta}.$$

Лемма 2.1.4 доказана. \square

Таким образом, теорема 2.1.2 доказана (объединяем разложение (2.1.6), условия (2.1.1)–(2.1.3) при $i = 2$, оценки (2.1.13) и (2.1.23)). \square

2.1.3. Многочлены 3-й степени на тетраэдрах. В п. 2.1.3 мы считаем, что Δ — тетраэдр с вершинами a_1, a_2, a_3, a_4 из триангуляции множества $\Omega \in \mathbb{R}^3$; $f \in W^4(\Omega)$. Через T_i будем обозначать грани Δ напротив вершин a_i ; через $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — соответственно наименьший, средний и наибольший углы в T_i .

Если P_3 — многочлен Эрмита степени не выше 3 по совокупности переменных, интерполирующий функцию f и ее производные на Δ , то такой многочлен задается с помощью 20 интерполяционных условий, из которых 16 обычно имеют следующий вид:

$$P_3(a_i) = f(a_i), \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad (2.1.28)$$

$$\frac{\partial P_3(a_i)}{\partial \tau_{ij}} = \frac{\partial f(a_i)}{\partial \tau_{ij}} \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}. \quad (2.1.29)$$

Оставшиеся условия могут варьироваться, при этом желательно выбирать их таким образом, чтобы в итоге можно было обеспечить непрерывность кусочно полиномиальной функции на исходной триангулированной области Ω . Мы будем задавать по одной смешанной производной на каждой грани T_i в вершине при среднем или наибольшем угле. Таким образом, на каждой из граней многочлен P_3 , становясь многочленом двух переменных, будет удовлетворять условиям вида (2.1.1)–(2.1.4).

Чтобы определить, в каком из углов каждого треугольника T_i будут задаваться смешанные производные, будем различать тетраэдры двух типов: К1 и К2. К типу К1 отнесем тетраэдры, у которых наименьшее и следующее по величине ребра (условимся далее два таких ребра называть наименьшими) не имеют общих точек, к типу К2 — тетраэдры, у которых такие ребра имеют общую вершину.

Пусть для определенности у тетраэдра типа К1 наименьшими являются ребра a_1a_4 и a_2a_3 , т. е.

$$\max\{|a_1a_4|, |a_2a_3|\} \leq \min\{|a_1a_2|, |a_1a_3|, |a_2a_4|, |a_3a_4|\}$$

(см. рис. 2.2.1). Для данного типа тетраэдра две смешанных производных зададим в одной из точек a_1 или a_4 , и две – в одной из точек a_2 или a_3 . Для определенности пусть это будут точки a_1 и a_2 :

$$\frac{\partial^2 P_3(a_i)}{\partial \tau_{ij} \partial \tau_{ik}} = \frac{\partial^2 f(a_i)}{\partial \tau_{ij} \partial \tau_{ik}}, \quad (2.1.30)$$

$$(i, j, k) \in \{(1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 1, 3), (2, 4, 3)\} .$$

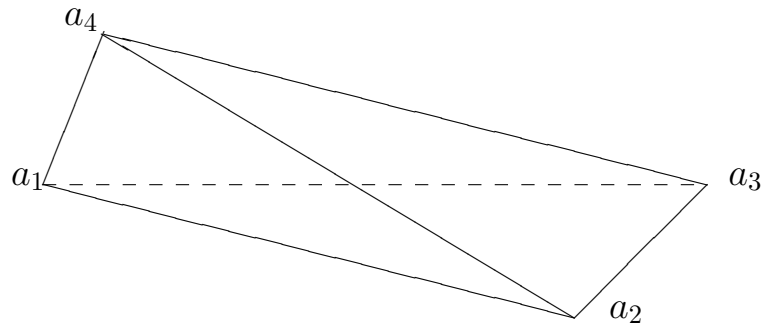


Рис. 2.1.1. Тетраэдр типа К1

Для тетраэдра типа К2 будем предполагать для определенности, что наименьшее и следующее по величине ребра принадлежат грани T_1 (см. рис. 2), т. е.

$$\begin{aligned} \min \left\{ \max\{|a_2, a_3|, |a_2, a_4|\}, \max\{|a_2, a_3|, |a_3, a_4|\}, \max\{|a_2, a_4|, |a_3, a_4|\} \right\} \leq \\ \leq \min \left\{ |a_1, a_2|, |a_1, a_3|, |a_1, a_4| \right\}. \end{aligned}$$

Для такого симплекса рассмотрим следующие два способа задания смешанных производных.

1. Задаются по две производных в любых двух вершинах, принадлежащих T_1 . Для определенности пусть это будут точки a_2 и a_3 :

$$\frac{\partial^2 P_3(a_i)}{\partial \tau_{ij} \partial \tau_{ik}} = \frac{\partial^2 f(a_i)}{\partial \tau_{ij} \partial \tau_{ik}} , \quad (2.1.31)$$

$$(i, j, k) \in \{(2, 1, 3), (2, 1, 4), (3, 1, 4), (3, 2, 4)\} .$$

2. Задаются производные в вершинах, принадлежащих наименьшему ребру симплекса: три производных в одной вершине и одна - в другой. Пусть в этом случае для определенности наименьшим будет ребро $a_2 a_3$. Тогда оставшиеся интерполяционные условия имеют вид

$$\frac{\partial^2 P_3(a_i)}{\partial \tau_{ij} \partial \tau_{ik}} = \frac{\partial^2 f(a_i)}{\partial \tau_{ij} \partial \tau_{ik}} , \quad (2.1.32)$$

$$(i, j, k) \in \{(3, 1, 2), (3, 1, 4), (3, 2, 4), (2, 1, 4)\} .$$

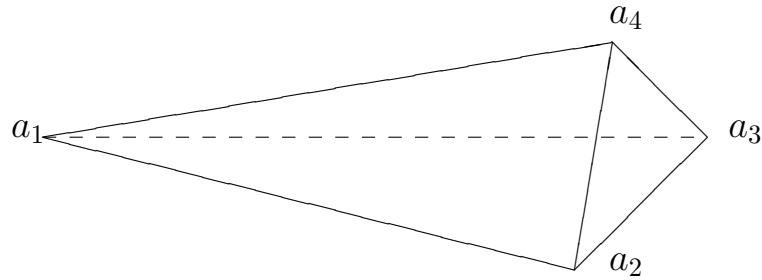


Рис. 2.1.2. Тетраэдр типа K2

Пусть ϑ_{ij} – угол между τ_{ij} и T_i . Пусть ϑ_i – такой угол, что

$$\sin \vartheta_i = \max_{\substack{1 \leq j \leq 4 \\ j \neq i}} \sin \vartheta_{ij} .$$

Через ϑ обозначим угол, такой, что

$$\sin \vartheta = \min_{1 \leq i \leq 4} \sin \vartheta_i . \quad (2.1.33)$$

Нашей целью будет являться доказательство того, что при выбранных интерполяционных условиях справедливы оценки

$$\mathbf{E}_{3,s}^3 \lesssim \frac{MH^{4-s}}{\sin^s \vartheta} . \quad (2.1.34)$$

где $0 \leq s \leq 3$. Для этого для каждого типа симплекса и соответствующей системы интерполяционных условий (2.1.28)–(2.1.30), (2.1.28)–(2.1.29) и (2.1.31), (2.1.28)–(2.1.29) и (2.1.32) будет выбрана собственная система координат xuz и доказана теорема об оценках сверху. Следствием этих теорем станет неравенство (2.1.34). Пусть

$$e(u) = f(u) - P_3(u),$$

где $u \in \Delta$.

Лемма 2.1.5. Пусть функция $g(u)$, $u \in \Delta$, непрерывна на Δ вместе со всеми своими частными производными до порядка $r + 1$ включительно, и пусть все частные производные порядка $r + 1$ для любых единичных векторов ξ_1, \dots, ξ_{r+1} ограничены на Δ константой M :

$$\left| \frac{\partial^{r+1} g(u)}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_{r+1}} \right| \leq M, \quad u \in \Delta,$$

Рассмотрим произвольную вершину a_i тетраэдра Δ и три единичных вектора τ_{ij} , $j \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}$. Тогда существует величина $C(r)$, зависящая только от r , такая, что

$$|g(u)| \leq C(r) \left(MH^{r+1} + \max_{0 \leq s+p+q \leq r} \left| \frac{\partial^{s+p+q} g(a_i)}{\partial \tau_{ij}^s \partial \tau_{ik}^p \partial \tau_{il}^q} H^{s+p+q} \right| \right), \quad (2.1.35)$$

где $\{j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}$.

Доказательство. Пусть $u \in \Delta$. Напомним, что $d_{ij} = |a_i - a_j|$. Применим формулу Тейлора для $g(u)$ вдоль прямой L_1 , проходящей через u параллельно τ_{ij} . Пусть u_j – точка пересечения грани T_j и прямой L_1 . Пусть μ ($0 \leq \mu \leq 1$) таково, что $\mu d_{ij} = |u - u_j|$. Тогда

$$g(u) = \sum_{s=0}^r \frac{1}{s!} \frac{\partial^s g(u_j)}{\partial \tau_{ji}^s} (\mu d_{ij})^s + E_r,$$

где $|E_r| \leq B_r M H^{r+1}$, B_r зависит только от r .

Повторим ту же процедуру для величин $\frac{\partial^s g(u_j)}{\partial \tau_{ji}^s}$ вдоль прямой L_2 , проходящей через u_j параллельно τ_{ik} . Обозначим через u_{jk} точку пересечения L_2 и ребра $a_i a_k$. Пусть ν ($0 \leq \nu \leq 1$) таково, что $\nu d_{ik} = |u_j - u_{jk}|$. Тогда

$$g(u) = \sum_{s=0}^r \frac{1}{s!} (\mu d_{ij})^s \left(\sum_{p=0}^{r-s} \frac{1}{p!} \frac{\partial^{s+p} g(u_{jk})}{\partial \tau_{ji}^s \partial \tau_{ki}^p} (\nu d_{ik})^p + E_{r-s}^s \right) + E_r,$$

где $|E_{r-s}^s| \leq B_r^s M H^{n+1-s}$; B_r^s – положительные константы, которые могут быть оценены сверху числом, зависящим только от r .

Наконец, применим формулу Тейлора для величин $\frac{\partial^{s+p} g(u_{jk})}{\partial \tau_{ij}^s \partial \tau_{ik}^p}$ вдоль прямой L_3 , проходящей через u_{jk} и a_i (эта прямая параллельна τ_{il}). Пусть λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) таково, что $\lambda d_{il} = |u_{jk} - a_i|$. Тогда

$$g(u) = \sum_{s=0}^r \frac{1}{s!} (\mu d_{ij})^s \sum_{p=0}^{r-s} \frac{1}{p!} (\nu d_{ik})^p \left(\sum_{q=0}^{r-s-p} \frac{1}{q!} \frac{\partial^{s+p+q} g(a_i)}{\partial \tau_{ji}^s \partial \tau_{ki}^p \partial \tau_{li}^q} (\lambda d_{il})^q + E_{r-s-p}^{sp} \right) + \sum_{s=0}^r \frac{1}{s!} (\mu d_{ij})^s E_{r-s}^s + E_r,$$

где $|E_{r-s-p}^{sp}| \leq B_r^{sp} M H^{n+1-s-p}$; B_r^{sp} – положительные константы, которые могут быть оценены сверху числом, зависящим только от r . Из полученного разложения следует (2.1.35). Лемма 2.1.5 доказана. \square

Перейдем к получению оценок для каждого типа тетраэдров и предложенных способов интерполяции.

2.1.3.1. Тетраэдр типа К1 и условия (2.1.28)–(2.1.30). Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ таким образом, что ось Ox будет параллельна ребру $a_1 a_2$, в вершинах которого задаются смешанные производные (2.1.30). Данное ребро принадлежит граням T_4 и T_3 . Пусть для определенности $\sin \beta_4 \geq \sin \beta_3$. В этом случае плоскость Oxy совместим с плоскостью треугольника T_4 . Остается ввести ось Oz перпендикулярно плоскости Oxy .

Пусть φ_x^{ij} , φ_y^{ij} , φ_z^{ij} – углы между τ_{ij} и соответствующими координатными осями (им соответствуют направляющие косинусы). Тогда имеют место соотношения

$$|\cos \varphi_z^{14}| = \sin \vartheta_{41} = \sin \vartheta_4, \quad |\cos \varphi_y^{14}| \lesssim \sin \beta_3 \leq \sin \beta_4. \quad (2.1.36)$$

Убедиться в справедливости последних оценок можно, например, следующим образом. Выберем направления осей x и y таким образом, чтобы углы между этими осями и вектором τ_{14} не превосходили $\pi/2$, и рассмотрим трехгранный угол с вершиной в точке a_1 , образованный полупрямыми, направления которых совпадают с направлениями полученных осей x и y и направлением вектора τ_{14} . Положим $\omega = \varphi_x^{14} + \varphi_y^{14}$. Тогда $\pi/2 \leq \omega \leq \pi$, откуда $0 \leq \cos \varphi_y^{14} = \cos(\omega - \varphi_x^{14}) = \cos \omega \cos \varphi_x^{14} + \sin \omega \sin \varphi_x^{14} \leq \sin \varphi_x^{14} \lesssim \sin \beta_3 \leq \sin \beta_4$. Поскольку ниже для нас будут иметь значение абсолютные величины направляющих косинусов, требования на выбор направлений осей координат в дальнейшем можно не учитывать.

Теорема 2.1.3. *Для введенной системы координат, тетраэдра Δ типа $K1$ и условий интерполяции (2.1.28)–(2.1.30) справедливы следующие оценки:*

$$\left| \frac{\partial^{s+p+q} e(u)}{\partial x^s \partial y^p \partial z^q} \right| \lesssim \frac{MH^{4-s-p-q}}{\sin^p \beta_4 \sin^q \vartheta_4}, \quad (2.1.37)$$

где $u \in \Delta$; $0 \leq s + p + q \leq 3$.

Доказательство. Получим сначала оценки производных функции $e(u)$ в вершине a_2 . Отметим, что значения функции $e(u)$ и ее первых производных в точке a_2 равны нулю в силу условий (2.1.28)–(2.1.29). Оценим значения производных второго и третьего порядков.

Лемма 2.1.6. *Пусть $s + p + q = 2$. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x^s \partial y^p \partial z^q} \right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin^p \beta_4 \sin^q \vartheta_4}. \quad (2.1.38)$$

Доказательство. При $q = 0$ оценки (2.1.38) следуют из теоремы 2.1.1 и замечания 2.1.2 для треугольника T_4 . Остается получить (2.1.38) для $q = 1, 2$. Рассматривая T_3 , согласно (2.1.9) получаем

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial \tau_{14}} \right| \lesssim MH^2 .$$

Переходя от производной по направлению τ_{14} к производным по переменным x, y, z , приходим к неравенству

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x^2} \cos \varphi_x^{14} + \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial y} \cos \varphi_y^{14} + \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial z} \cos \varphi_z^{14} \right| \lesssim MH^2 ,$$

откуда с учетом соотношений (2.1.36) и оценок (2.1.5) для T_4 получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial z} \cos \varphi_z^{14} \right| &= \left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial z} \sin \vartheta_4 \right| \lesssim \\ &\lesssim MH^2 + \left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x^2} \cos \varphi_x^{14} \right| + \left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial y} \cos \varphi_y^{14} \right| \lesssim \\ &\lesssim MH^2 + MH^2 + MH^2 \frac{1}{\sin \beta_4} \sin \beta_4 \lesssim MH^2 . \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial z} \right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin \vartheta_4} . \quad (2.1.39)$$

Среди условий (2.1.30) имеются, в частности, следующие:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{21}} \left(\frac{\partial e(a_2)}{\partial \tau_{23}} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau_{24}} \left(\frac{\partial e(a_2)}{\partial \tau_{23}} \right) = 0 .$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{14}} \left(\frac{\partial e(a_2)}{\partial \tau_{23}} \right) = \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial \tau_{23} \partial \tau_{14}} = 0 . \quad (2.1.40)$$

Переходя от производных по направлениям к производным по переменным x, y, z , используя оценки (2.1.5), (2.1.39) и соотношения (2.1.30), как это было при выводе оценки (2.1.39), получаем

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial y \partial z} \right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin \beta_4 \sin \vartheta_4} . \quad (2.1.41)$$

Наконец, рассматривая T_3 , с учетом (2.1.9) видим, что

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial \tau_{14}^2} \right| \lesssim MH^2,$$

откуда так же, как (2.1.39) и (2.1.41), получим последнюю оценку

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial z^2} \right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin^2 \vartheta_4}. \quad (2.1.42)$$

Лемма 2.1.6 доказана. \square

Лемма 2.1.7. Пусть $s + p + q = 3$. Тогда имеют место следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^s \partial y^p \partial z^q} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin^p \beta_4 \sin^q \vartheta_4}. \quad (2.1.43)$$

Доказательство. Как и в лемме 2.1.6, для $q = 0$ оценки (2.1.43) следуют из теоремы 2.1.1 и замечания 2.1.2 для треугольника T_4 . Оставшиеся оценки для $q = 1, 2, 3$ будем получать аналогично доказательству леммы 2.1.6, учитывая связь производных по направлениям выбираемых ребер с производными по x, y, z , оценки (2.1.9) и соотношения (2.1.36).

Из того, что в силу (2.1.9) на T_3 выполняется неравенство $\left| \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial \tau_{14}} \right| \lesssim MH$, с учетом (2.1.36) и оценок (2.1.5), отнесенных к треугольнику T_4 , получаем

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2 \partial z} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin \vartheta_4}.$$

Так как $\frac{\partial^2 e(a_1)}{\partial \tau_{12} \partial \tau_{14}} = \frac{\partial^2 e(a_1)}{\partial \tau_{13} \partial \tau_{14}} = 0$ согласно (2.1.30), то

$$\frac{\partial^2 e(a_1)}{\partial y \partial \tau_{14}} = 0, \quad (2.1.44)$$

откуда методом леммы 2.1.6 приходим к неравенству

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_1)}{\partial y \partial z} \right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin \beta_4 \sin \vartheta_4}. \quad (2.1.45)$$

Рассматривая $\frac{\partial^2 e}{\partial y \partial z}$ вдоль $a_1 a_2$, из (2.1.41) и (2.1.45) и теоремы 2.1.A получаем

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial y \partial z} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin \beta_4 \sin \vartheta_4}.$$

Условия (2.1.29) и (2.1.40) дают:

$$\frac{\partial e(a_3)}{\partial \tau_{14}} = \frac{\partial e(a_2)}{\partial \tau_{14}} = \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial \tau_{14} \partial \tau_{23}} = 0,$$

поэтому

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial \tau_{14} \partial \tau_{23}^2} \right| \lesssim M |a_2 a_3|,$$

и тогда

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial y^2 \partial z} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin^2 \beta_4 \sin \vartheta_4}.$$

Из того, что на T_3 выполняется $\left| \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial \tau_{14}^2} \right| \lesssim MH$, получаем

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x \partial z^2} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin \vartheta_4^2}.$$

Из (2.1.29) и (2.1.44) видим, что

$$\frac{\partial e(a_4)}{\partial y} = \frac{\partial e(a_1)}{\partial y} = \frac{\partial^2 e(a_1)}{\partial y \partial \tau_{14}} = 0,$$

откуда

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_1)}{\partial y \partial \tau_{14}^2} \right| \lesssim M |a_1 a_4|,$$

и тогда

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_1)}{\partial y \partial z^2} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin^2 \vartheta_4} \lesssim \frac{MH}{\sin \beta_4 \sin^2 \vartheta_4}.$$

Полагая $g(u) = \frac{\partial^3 e(u)}{\partial y \partial z^2}$ и $n = 1$ в лемме 2.1.5, получаем:

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial y \partial z^2} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin^2 \vartheta_4} \lesssim \frac{MH}{\sin \beta_4 \sin^2 \vartheta_4}.$$

Наконец, так как $\left| \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial \tau_{14}^3} \right| \lesssim MH$ (в треугольнике T_3), получим последнюю оценку

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial z^3} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin^3 \vartheta_4}.$$

Лемма 2.1.7 доказана. \square

Пусть $s, p, q, t, r, m \geq 0$ и $0 \leq s+p+q+t+r+m \leq 3$. Тогда, представляя производные по направлению через производные по x, y, z и оценивая их с помощью леммы 2.1.6, леммы 2.1.7 и соотношения (2.1.36), будем иметь

$$\left| \frac{\partial^{s+p+q+t+r+m} e(a_2)}{\partial x^s \partial y^p \partial z^q \partial \tau_{21}^t \partial \tau_{23}^r \partial \tau_{24}^m} \right| \lesssim \frac{MH^{4-(s+p+q+t+r+m)}}{\sin^p \beta_4 \sin^q \gamma_4}.$$

Для завершения доказательства теоремы остается применить лемму ??, положив

$$g(u) = \frac{\partial^{s+p+q} e(u)}{\partial x^s \partial y^p \partial z^q}, \quad n = 3 - (s + p + q), \quad a_i = a_2.$$

Теорема 2.1.3 доказана. \square

2.1.3.2. Тетраэдр типа К2 и условия (2.1.28)–(2.1.29), (2.1.31).

Выберем систему координат $Oxyz$ таким образом, что ось Ox будет параллельна ребру a_2a_3 , в вершинах которого задаются смешанные производные (2.1.31). Данное ребро принадлежит граням T_1 и T_4 . Пусть для определенности $\sin \beta_4 \geq \sin \beta_1$. В этом случае плоскость Oxy совместим с плоскостью треугольника T_4 . Остается ввести ось Oz перпендикулярно плоскости Oxy . Направление осей значения не имеет. Договоренность о том, что $\sin \beta_4 \geq \sin \beta_1$ не влияет на общность результатов, так как в противном случае мы переобозначим вершины и соответственно грани, поменяв ролями a_1 и a_4 , a_2 и a_3 ; текст доказательства при этом не изменится.

Пусть, как и выше, φ_x^{ij} , φ_y^{ij} , φ_z^{ij} – углы между τ_{ij} и соответствующими координатными осями. Отметим, что так как условия (2.1.31) задаются в средних или наибольших углах граней T_i , ребра a_2a_4 и a_1a_4

при выбранном способе интерполяции не могут быть наименьшими в T_1 и T_2 соответственно. Тогда $|a_3a_4| \leq 2 \max\{|a_2a_4|, |a_1a_4|\}$. Таким образом, имеют место соотношения

$$\max\{\sin \vartheta_{42}, \sin \vartheta_{41}\} \lesssim |\cos \varphi_z^{34}| = \sin \vartheta_4, \quad |\cos \varphi_y^{34}| \lesssim 2 \sin \beta_1 \leq \sin \beta_4 \quad (2.1.46)$$

(первое неравенство следует из соотношений между ребрами $a_i a_4$, $i = 1, 2, 3$; второе получаем аналогично неравенству из (2.1.36)).

Теорема 2.1.4. *Для введенной системы координат, тетраэдра Δ типа $K2$ и условий интерполяции (2.1.28)–(2.1.29), (2.1.31) справедливы следующие оценки:*

$$\left| \frac{\partial^{s+p+q} e(u)}{\partial x^s \partial y^p \partial z^q} \right| \lesssim \frac{MH^{4-s-p-q}}{\sin^p \beta_4 \sin^q \vartheta_4}, \quad (2.1.47)$$

где $u \in \Delta$; $0 \leq s + p + q \leq 3$.

Доказательство. Для доказательства теоремы нам будут нужны оценки производных для $e(u)$ в точке a_3 . Поскольку значения функции $e(u)$ и ее первых производных в точке a_3 равны нулю в силу условий (2.1.28)–(2.1.29), остается оценить производные второго и третьего порядков.

Лемма 2.1.8. *Пусть $s + p + q = 2$. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial x^s \partial y^p \partial z^q} \right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin^p \beta_4 \sin^q \gamma_4}. \quad (2.1.48)$$

Доказательство. Для $q = 0$ оценки (2.1.48) следуют из (2.1.10) для треугольника T_4 . Остается рассмотреть $q = 1, 2$. Тем же способом, что и (2.1.39) в лемме 2.1.6, рассматривая последовательно треугольники T_1 , T_2 и ребро a_3a_4 , используя оценки (2.1.9) и соотношения (2.1.46), представляя производные по направлениям через производные по x, y, z , получаем:

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial x \partial \tau_{34}} \right| \lesssim MH^2 \quad \implies \quad \left| \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial x \partial z} \right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin \vartheta_4},$$

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial \tau_{13} \partial \tau_{34}} \right| \lesssim MH^2 \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial y \partial z} \right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin \beta_4 \sin \vartheta_4},$$

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial \tau_{34}^2} \right| \lesssim MH^2 \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial z^2} \right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin^2 \vartheta_4}.$$

Лемма 2.1.8 доказана. □

Лемма 2.1.9. Пусть $s + p + q = 3$. Тогда имеют место следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x^s \partial y^p \partial z^q} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin^p \beta_4 \sin^q \vartheta_4}. \quad (2.1.49)$$

Доказательство. Оценки для $q = 0$ следуют из (2.1.10) для треугольника T_4 . Оставшиеся оценки для $q = 1, 2, 3$ получаются аналогично доказательствам лемм 2.1.6–2.1.8. Так, рассматривая T_1 , получаем

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x^2 \partial \tau_{34}} \right| \lesssim MH \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x^2 \partial z} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin \vartheta_4}.$$

Условия (2.1.31) имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{23}} \left(\frac{\partial e(a_2)}{\partial \tau_{21}} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau_{24}} \left(\frac{\partial e(a_2)}{\partial \tau_{21}} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{31}} \left(\frac{\partial e(a_3)}{\partial \tau_{34}} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau_{32}} \left(\frac{\partial e(a_3)}{\partial \tau_{34}} \right) = 0.$$

Следствием этих условий являются равенства

$$\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial \tau_{12} \partial \tau_{34}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial \tau_{12} \partial \tau_{34}} = 0, \quad (2.1.50)$$

откуда (используем одномерную интерполяцию) будем иметь

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x \partial \tau_{12} \partial \tau_{34}} \right| \lesssim M |a_2 a_3|.$$

Снова переходя от производных по направлениям к производным по x, y, z , используя оценки (2.1.10) и соотношения (2.1.46), приходим к неравенству

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x \partial y \partial z} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin \beta_4 \sin \vartheta_4}.$$

Далее, рассматривая последовательно треугольники T_2 , T_1 , T_2 и ребро a_3a_4 , получим оставшиеся оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial \tau_{13}^2 \partial \tau_{34}} \right| \lesssim MH & \implies \left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial y^2 \partial z} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin^2 \beta_4 \sin \vartheta_4}, \\ \left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x \partial \tau_{34}^2} \right| \lesssim MH & \implies \left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x \partial z^2} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin^2 \vartheta_4}, \\ \left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial \tau_{13} \partial \tau_{34}^2} \right| \lesssim MH & \implies \left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial y \partial z^2} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin \beta_4 \sin^2 \vartheta_4}, \\ \left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial \tau_{34}^3} \right| \lesssim MH & \implies \left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial z^3} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin^3 \vartheta_4}. \end{aligned}$$

Лемма 2.1.9 доказана. \square

Далее доказательство теоремы 2.1.4 аналогично доказательству теоремы 2.1.3 (с той разницей, что вместо точки a_2 берется точка a_3 , т. е. применяя лемму 2.1.5, берем $a_i = a_3$).

2.1.3.3. Тетраэдр типа К2 и условия (2.1.28)–(2.1.29), (2.1.32).

Систему координат $Oxyz$ выберем так же, как в п. 2.1.3.2 (в частности, считаем, что $\sin \beta_4 \geq \sin \beta_1$; в противном случае перенумеруем вершины, как в п. 2.1.3.2). Так как a_2a_3 — наименьшее ребро в Δ , в тех же обозначениях остаются справедливыми соотношения (2.1.46).

Теорема 2.1.5. *Для введенной системы координат, тетраэдра Δ типа К2 и условий интерполяции (2.1.28)–(2.1.29), (2.1.32) справедливы следующие оценки:*

$$\left| \frac{\partial^{s+p+q} e(u)}{\partial x^s \partial y^p \partial z^q} \right| \lesssim \frac{MH^{4-s-p-q}}{\sin^p \beta_4 \sin^q \vartheta_4}, \quad (2.1.51)$$

где $u \in \Delta$; $0 \leq s + p + q \leq 3$.

Доказательство. Получим оценки производных второго и третьего порядков функции $e(u)$ в a_3 (значения функции $e(u)$ и ее первых производных в точке a_3 равны нулю в силу условий (2.1.28)–(2.1.29)).

Лемма 2.1.10. Пусть T – треугольник с вершинами b_1, b_2, b_3 ; $\alpha_T, \beta_T, \gamma_T$ – внутренние углы треугольника при вершинах b_1, b_2, b_3 соответственно, где $0 < \alpha_T \leq \beta_T \leq \gamma_T$ или $0 < \alpha_T \leq \gamma_T \leq \beta_T$, т. е. угол при вершине b_3 является наибольшим или средним углом треугольника, b_2b_3 – наименьшая сторона треугольника; τ_{ij} – единичный вектор, направленный от b_i к b_j . Пусть функция $g(u)$, $u \in T$ удовлетворяет неравенствам

$$\left| \frac{\partial g(b_3)}{\partial \tau_{31}} \right| \lesssim M |b_2b_3|^2, \quad \left| \frac{\partial g(b_3)}{\partial \tau_{32}} \right| \lesssim M |b_2b_3|^2.$$

Тогда для любых i, j имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial g(b_3)}{\partial \tau_{ij}} \right| \lesssim M |b_2b_3|^2.$$

Доказательство. Введем оси координат: Ox – параллельно τ_{31} , $Oy \perp Ox$. Угол при вершине b_3 обозначим через ω ($\omega = \beta_T$ или $\omega = \gamma_T$). Тогда условия леммы могут быть переписаны следующим образом:

$$\left| \frac{\partial g(b_3)}{\partial x} \right| \lesssim M |b_2b_3|^2, \quad \left| \frac{\partial g(b_3)}{\partial x} \cos \omega + \frac{\partial g(b_3)}{\partial y} \sin \omega \right| \lesssim M |b_2b_3|^2.$$

Тогда

$$\left| \frac{\partial g(b_3)}{\partial y} \right| \lesssim \frac{M |b_2b_3|^2}{\sin \omega},$$

откуда получаем требуемое неравенство

$$\left| \frac{\partial g(b_3)}{\partial \tau_{ij}} \right| \lesssim \left| \frac{\partial g(b_3)}{\partial x} \right| \cos \alpha + \left| \frac{\partial g(b_3)}{\partial y} \right| \sin \beta \lesssim M |b_2b_3|^2.$$

Лемма 2.1.10 доказана. \square

Лемма 2.1.11. Пусть $2 \leq s + p + q \leq 3$. Тогда имеют место следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^{s+p+q} e(a_3)}{\partial x^s \partial y^p \partial z^q} \right| \lesssim \frac{M H^{4-(s+p+q)}}{\sin^p \beta_4 \sin^q \vartheta_4}. \quad (2.1.52)$$

Доказательство. Для $q = 0$ утверждение леммы является верным в силу (2.1.10). Прочие оценки производных второго порядка и производной $\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x^2 \partial z}$ получаются так же, как в леммах 2.1.8–2.1.9.

Найдем оценку для $\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x \partial y \partial z}$. Используя условия (2.1.32) при $i = 3, j = 2, k = 4$ и то, что в точках a_2, a_3 значения функции e и ее производных первого порядка равны нулю, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{34}} \left(\frac{\partial e(a_3)}{\partial \tau_{23}} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \tau_{23}} \left(\frac{\partial e(a_3)}{\partial \tau_{23}} \right) \lesssim M |a_2 a_3|^2.$$

Применение леммы 2.1.10 при $g = \frac{\partial e}{\partial \tau_{23}}$ на T_1 дает

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial \tau_{23} \partial \tau_{24}} \right| \leq CM |a_2 a_3|^2. \quad (2.1.53)$$

В (2.1.32) содержатся условия

$$\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial \tau_{13} \partial \tau_{23}} = \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial \tau_{13} \partial \tau_{34}} = 0,$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial \tau_{13} \partial \tau_{24}} = 0. \quad (2.1.54)$$

Объединяя (2.1.53) и (2.1.54) и применяя лемму 2.1.10 для $g = \frac{\partial e}{\partial \tau_{24}}$ на T_4 , приходим к неравенству

$$\left| \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial \tau_{24} \partial \tau_{12}} \right| \lesssim M |a_2 a_3|^2,$$

откуда с учетом условий (2.1.32) для $i = 2, j = 1, k = 4$ по теореме 2.1.А следует

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial \tau_{24} \partial \tau_{12} \partial \tau_{23}} \right| = \left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial \tau_{24} \partial \tau_{12} \partial x} \right| \lesssim M |a_2 a_3|.$$

Отсюда, как и ранее, получаем:

$$\left| \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x \partial y \partial z} \right| \lesssim \frac{MN}{\sin \beta_4 \sin \vartheta_4}.$$

Оставшиеся оценки леммы 2.1.11 и теоремы 2.1.5 доказываются так же, как соответствующие утверждения в п. 2.1.3.2. Лемма 2.1.11 и теорема 2.1.5 доказаны. \square

2.1.3.4. Некоторые комментарии. Теоремы 2.1.3–2.1.5 могут быть объединены в одно следствие.

Следствие 2.1.3. Пусть многочлен P_3 задается на Δ интерполяционными условиями (2.1.28)–(2.1.29) и, в зависимости от типа симплекса, условиями (2.1.30), или (2.1.31), или (2.1.32). Тогда

$$\mathbf{E}_{3,r}^3 \lesssim \frac{MH^{4-r}}{\sin^r \vartheta}, \quad r = \overline{0, 3}. \quad (2.1.55)$$

Доказательство. Для каждой прямоугольной системы координат, выбранной соответственно способу интерполяции, выполняются соотношения

$$\sin \vartheta_4 \leq \sin \vartheta, \quad \sin \beta_4 \lesssim \sin \vartheta_2 \lesssim \sin \vartheta.$$

Тогда

$$\left| \frac{\partial^{s+p+q} e(u)}{\partial x^s \partial y^p \partial z^q} \right| \lesssim \frac{MH^{4-s-p-q}}{\sin^{p+q} \vartheta}.$$

Таким образом, для доказательства (2.1.55) достаточно производные по направлениям произвольных единичных векторов ξ_1, \dots, ξ_r представить через производные по x, y, z . Следствие 2.1.3 доказано. \square

Рассмотренные способы интерполяции позволяют разработать алгоритм выбора условий интерполяции Эрмита на тетраэдрах из триангуляции исходной области с целью получения непрерывной результирующей кусочно-полиномиальной функции и построения соответствующих пространств конечных элементов. Использование предлагаемых пространств требует некоторых дополнительных ограничений на триангуляцию исходной области, но построенное пространство имеет при этом меньшую размерность по сравнению с пространствами, строящимися при интерполяции Лагранжа. Данный алгоритм не обсуждается в диссертации, но может быть найден в [92].

2.1.4. Многочлены степени n на треугольнике. Пусть снова Δ — треугольник с вершинами a_1, a_2, a_3 ; $f \in W^{n+1}M$; $n \geq 3$; α, β, γ — углы при вершинах a_1, a_2, a_3 соответственно; $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Пусть Q — множество равномерных узлов на треугольнике Δ , т. е.,

$$Q = \{u_{ijk}\}_{(i,j,k) \in I} =$$

$$= \{u_{ijk} \mid u_{ijk} = (i/n)a_1 + (j/n)a_2 + (k/n)a_3, (i, j, k) \in I\},$$

где

$$I = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}_+; i + j + k = n\}.$$

Рассмотрим многочлен $\tilde{P}_n = \tilde{P}_n[f]$ степени n по совокупности переменных такой, что

$$\forall u \in Q \quad \tilde{P}_n(u) = f(u) \quad (2.1.56)$$

Мы будем использовать результат Ю.Н.Субботина из [18], где, в частности, доказано, что для любых единичных векторов ξ_1, \dots, ξ_s имеют место оценки

$$\|D_{\xi_1 \dots \xi_s}^s (f - \tilde{P}_n)\|_{\Delta} \lesssim M H^{n+1-s} \sin^{-s} \gamma, \quad (2.1.57)$$

$$0 \leq s \leq n.$$

Ниже предлагается сохранить те условия из (2.1.56), которые задаются в точках, принадлежащих сторонам треугольника Δ , и заменить оставшиеся на условия интерполяции старших производных в точке a_2 .

Рассмотрим множество

$$I_0 = \{(i, j, k) \in I \mid i \cdot j \cdot k = 0\}$$

и соответствующее подмножество Q_0 множества Q (точки из Q , принадлежащие сторонам треугольника):

$$\begin{aligned} Q_0 &= \{u_{ijk}\}_{(i,j,k) \in I_0} = \\ &= \{u_{ijk} \mid u_{ijk} = (i/n)a_1 + (j/n)a_2 + (k/n)a_3, (i, j, k) \in I_0\}. \end{aligned}$$

Пусть многочлен P_n степени n по совокупности переменных определяется следующими условиями:

$$P_n(u) = f(u) \quad (2.1.58)$$

для всех $u \in Q_0$ и

$$\frac{\partial^{i+j} P_n(a_2)}{\partial \tau_{12}^i \partial n_{12}^j} = \frac{\partial^{i+j} f(a_2)}{\partial \tau_{12}^i \partial n_{12}^j}, \quad (2.1.59)$$

для всех $j = \overline{3, n}$, $i = \overline{0, n - j}$.

Вместо условий (2.1.59) можно использовать аналогичные условия в наибольшем угле:

$$\frac{\partial^{i+j} P_n(a_3)}{\partial \tau_{31}^i \partial n_{31}^j} = \frac{\partial^{i+j} f(a_3)}{\partial \tau_{31}^i \partial n_{31}^j}, \quad (2.1.60)$$

для всех $j = \overline{3, n}$, $i = \overline{0, n - j}$.

Множество всех многочленов степени не выше n , удовлетворяющих условию (2.1.58), обозначим через $\mathcal{P}_n[Q_0]$. Ясно, что $P_n, \tilde{P}_n \in \mathcal{P}_n[Q_0]$.

Поместим треугольник Δ в прямоугольную систему координат Oxy таким образом, что для некоторых положительных a, b, h координаты вершин будут записываться следующим образом: $a_1 = (a + b, 0)$, $a_2 = (0, 0)$, $a_3 = (a, h)$ (см. рис. 2.1.3). Так как $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, то $a \leq b$, $a + b = H$. В этом случае условия (2.1.59) принимают вид

$$\frac{\partial^{i+j} P(a_2)}{\partial x^i \partial y^j} = \frac{\partial^{i+j} f(a_2)}{\partial x^i \partial y^j},$$

где $j = \overline{3, n}$, $i = \overline{0, n - j}$.

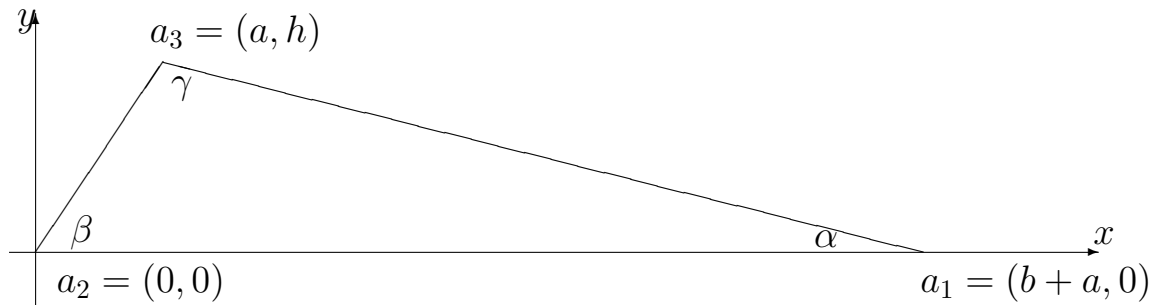


Рис. 2.1.3. Расположение треугольника Δ в системе координат Oxy

Теорема 2.1.6. Пусть многочлен P_n определяется условиями (2.1.58)–(2.1.59). Тогда для любого $\beta_0 < \pi/2$ и любого треугольника Δ , удовлетворяющего условию $\beta \leq \beta_0$, справедливы оценки

$$\mathbf{E}_{n,s}^2 \leq \begin{cases} C(n, \beta_0) M H^{n+1-s} \sin^{-s} \gamma, & s = 0, 1, 2, \\ C(n, \beta_0) M H^{n+1-s} \sin^{-2} \gamma, & s = 3, \dots, n, \end{cases} \quad (2.1.61)$$

где $C(n, \beta_0)$ — неотрицательная величина, зависящая только от n и β_0 .

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, обсудим подробнее результаты Ю.Н.Субботина из [18]. Наряду с оценками (2.1.57) в [18, лемма 4] для многочлена \tilde{P}_n доказан следующий факт. Для любого $s = 0, \dots, n$ и для одного из условий

$$\xi_k \in \{\tau_{21}, \tau_{23}\} \quad \text{для всех } k = \overline{1, s} \quad (2.1.62)$$

или

$$\xi_k \in \{\tau_{31}, \tau_{32}\} \quad \text{для всех } k = \overline{1, s} \quad (2.1.63)$$

имеет место следующее соотношение:

$$\left\| D_{\xi_1 \dots \xi_s}^s (f - \tilde{P}_n) \right\|_{\Delta} \lesssim M H^{n+1-s}. \quad (2.1.64)$$

Способ выбора условия (2.1.62) или (2.1.63) указан в [18], но для нас он не будет иметь значения. Покажем, что это, в частности, означает, что

$$\left\| \frac{\partial^s (f - \tilde{P}_n)}{\partial x^{s-i} \partial y^i} \right\|_{\Delta} \lesssim M H^{n+1-s} \sin^{-i} \beta \quad (2.1.65)$$

для $i = 0, \dots, s$; $s = 0, \dots, n$.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда (2.1.64) выполняется для случая (2.1.62). Рассмотрим произвольное $s \in \{0, \dots, n\}$. Для $i = 0$ оценка (2.1.65) совпадает с (2.1.64) при $\xi_1 = \dots = \xi_s = \tau_{21}$. Пусть теперь $1 \leq j \leq s$, и неравенство (2.1.65) имеет место для $i = 0, \dots, j-1$. Тогда в (2.1.64) возьмем $\xi_1 = \dots = \xi_{s-j+1} = \tau_{21}$, $\xi_{s-j+1} = \dots = \xi_s = \tau_{23}$ и представим s -ю производную по направлениям τ_{21} и τ_{23} через сумму частных производных

$$D_{\xi_1 \dots \xi_s}^s (f - \tilde{P}_n) = \sum_{k=0}^j C_j^k \frac{\partial^s (f - \tilde{P})}{\partial x^{s-k} \partial y^k} \cos^{j-k} \beta \sin^k \beta,$$

откуда следует оценка

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial^s (f - \tilde{P}_n)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \sin^j \beta \right\|_{\Delta} = \\
& = \left\| D_{\xi_1 \dots \xi_s}^s (f - \tilde{P}_n) - \sum_{k=0}^{j-1} C_j^k \frac{\partial^s (f - \tilde{P}_n)}{\partial x^{s-k} \partial y^k} \cos^{j-k} \beta \sin^k \beta \right\|_{\Delta} \leq \\
& \leq \left\| D_{\xi_1 \dots \xi_s}^s (f - \tilde{P}_n) \right\|_{\Delta} + \sum_{k=0}^{j-1} C_j^k \left\| \frac{\partial^s (f - \tilde{P})}{\partial x^{s-k} \partial y^k} \cos^{j-k} \beta \sin^k \beta \right\|_{\Delta} \lesssim_n \\
& \lesssim_n MH^{n+1-s} + \sum_{k=0}^{j-1} C_j^k MH^{n+1-s} \sin^{-k} \beta \cos^{j-k} \beta \sin^k \beta \lesssim_n MH^{n+1-s},
\end{aligned}$$

т. е. (2.1.65) доказано.

В ситуации, когда (2.1.64) выполняется при (2.1.63), введем вспомогательную систему координат Ox_1y_1 таким образом, чтобы точка a_3 совпадала с началом координат, вектор τ_{31} был сонаправлен с осью Ox_1 , и треугольник Δ для определенности находился в верхней полуплоскости (см. рис. 2.1.4).

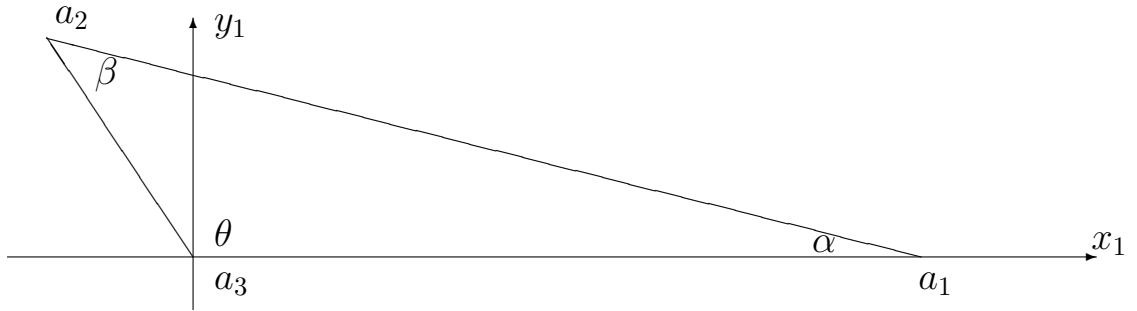


Рис. 2.1.4. Расположение треугольника Δ в системе координат Ox_1y_1

Тогда аналогично уже рассмотренному случаю получаем оценки

$$\left\| \frac{\partial^s (f - \tilde{P}_n)}{\partial x_1^{s-i} \partial y_1^i} \right\|_{\Delta} \lesssim MH^{n+1-s} \sin^{-i} \gamma \lesssim MH^{n+1-s} \sin^{-i} \beta \quad (2.1.66)$$

для $i = 0, \dots, s$; $s = 0, \dots, n$. Далее, поскольку $\frac{\partial}{\partial \tau_{21}} = \frac{\partial}{\partial x_1} \cos \alpha - \frac{\partial}{\partial y_1} \sin \alpha$, $\frac{\partial}{\partial \tau_{23}} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \cos \gamma - \frac{\partial}{\partial y_1} \sin \gamma$ и $\sin \beta \lesssim \sin \theta \lesssim \sin \beta$, можем утверждать, что (2.1.64) имеет место также при (2.1.62). Таким образом, мы оказываемся в условиях уже рассмотренного случая.

Замечание 2.1.4. Приведенные выше рассуждения означают также, что если соотношение (2.1.64) имеет место при одном из условий (2.1.62) или (2.1.63), то оно имеет место и при другом из этих условий (нами показано, что из справедливости (2.1.64) при (2.1.63) следует справедливость (2.1.64) при (2.1.62); обратное утверждение доказывается аналогично).

Замечание 2.1.5. Так как $\sin \gamma \lesssim \sin \beta \lesssim \sin \gamma$, то везде в оценках вместо $\sin \gamma$ можно писать $\sin \beta$.

Доказательство теоремы 2.1.6. Покажем, что если треугольник Δ помещен в систему координат Oxy так, как показано на рис. 2.1.3, то в условиях теоремы 2.1.6 для некоторой неотрицательной величины $\mathcal{K}_1(n, \beta_0)$, зависящей только от n и β_0 , и любого неотрицательного целого числа s такого, что $0 \leq s \leq n$, справедливы оценки

$$\left\| \frac{\partial^{s-j}(f - P_n)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{\Delta} \leq \begin{cases} \mathcal{K}_1(n, \beta_0) M H^{n+1-s} \sin^{-j} \gamma, & j = \overline{0, \min\{2, s\}}, \\ \mathcal{K}_1(n, \beta_0) M H^{n+1-s}, & j = \overline{3, \dots, s}, \end{cases} \quad (2.1.67)$$

откуда следует (2.1.61).

Рассмотрим многочлен $R \in \{P_n, \tilde{P}_n\}$. Введем обозначение

$$e[R](x, y) = f(x, y) - R(x, y).$$

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши, получим следующее разложение для всех $(x, y) \in \Delta$:

$$\frac{\partial^s e[R](x, y)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} = \sum_{i=j}^{n-s+j} \frac{1}{(i-j)!} y^{i-j} \sum_{k=0}^{n-s+j-i} \frac{\partial^{s-j+i+k} e[R](0, 0)}{\partial x^{s-j+k} \partial y^i} \frac{x^k}{k!} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=j}^{n-s+j} \frac{1}{(i-j)!} y^{i-j} \int_0^x \frac{(x-v)^{n-s+j-i}}{(n-s+j-i)!} \frac{\partial^{n+1} e[R](v, 0)}{\partial v^{n+1-i} \partial y^i} dv + \\
& \quad + \int_0^y \frac{(y-t)^{n-s}}{(n-s)!} \frac{\partial^{n+1} f(x, t)}{\partial x^{s-j} \partial t^{n+1-s+j}} dt. \tag{2.1.68}
\end{aligned}$$

Чтобы доказать (2.1.67), достаточно для многочлена $R = P_n$, определяемого условиями (2.1.58)–(2.1.59), оценить $\partial^s e[R](0, 0) / (\partial x^{s-j} \partial y^j)$, $0 \leq s \leq n$, $0 \leq j \leq s$.

Лемма 2.1.12. *В условиях теоремы 2.1.6 найдется неотрицательная величина $K(n, \beta_0)$, зависящая только от n и β_0 , такая, что для любого $s = 1, \dots, n$ имеют место следующие соотношения:*

$$\left| \frac{\partial^s e[P_n](0, 0)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right| \leq K(n, \beta_0) M H^{n+1-s} \sin^{-j} \beta, \quad \text{если } j = \overline{0, \min\{2, s\}}; \tag{2.1.69}$$

$$\frac{\partial^s e[P_n](0, 0)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} = 0, \quad \text{если } s \geq 3 \text{ и } j = 3, \dots, s. \tag{2.1.70}$$

Доказательство. Равенства (2.1.70) следуют из (2.1.59). Остается доказать (2.1.69). Пусть s — произвольное натуральное число, удовлетворяющее неравенству $1 \leq s \leq n$. Напомним, что $a_2 = (0, 0)$. Рассматривая $e[P_n](x, 0)$ на отрезке $[a_2, a_1]$ и используя формулы для оценки ошибки интерполяции в одномерном случае, получаем

$$\frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^s} = C_1(s) \frac{\partial^{n+1} f(\zeta_{21}^s)}{\partial x^{n+1}} H^{n+1-s}, \tag{2.1.71}$$

где $C_1(s)$ — величина, зависящая только от s и допускающая оценку сверху величиной, зависящей от n ; ζ_{21}^s — точка между a_2 и a_1 . Таким образом,

$$\left| \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^s} \right| \lesssim_n M H^{n+1-s},$$

т. е. (2.1.69) доказано для $j = 0$ при любом выбранном нами $s = 1, \dots, n$. Если $s \geq 2$, то для оценки оставшихся двух производных (при $j = 1, 2$)

составим систему уравнений; при этом воспользуемся методом математической индукции.

Пусть (2.1.69) доказано для $s = r + 1, \dots, n$, где $r \in \{2, \dots, n - 1\}$. Тогда, принимая во внимание (2.1.68), можем утверждать, что оценка (2.1.67) имеет место для всех $s = r + 1, \dots, n$. Рассмотрим произвольное $s = r \in \{2, \dots, n - 1\}$ (что соответствует шагу индукции) или $s = r = n$ (база индукции). Поскольку шаг и база индукции доказываются почти одинаково, мы будем рассматривать эти случаи одновременно, лишь иногда при необходимости отдельно останавливаясь на обсуждении случая $s = r = n$. Возьмем сужение функции $e[P_n]$ на отрезок a_2a_3 . С одной стороны, применяя известные результаты для оценок ошибок интерполяции в одномерном случае, получим равенство

$$\frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial \tau_{23}^s} = C_2(s) \frac{\partial^{n+1} f(\zeta_{23}^s)}{\partial \tau_{23}^{n+1}} (a^2 + h^2)^{(n+1-s)/2}, \quad (2.1.72)$$

где $C_2(s)$ — величина, зависящая только от s и допускающая оценку сверху величиной, зависящей от n ; ζ_{23}^s — точка между a_2 и a_3 . С другой стороны, производную по направлению τ_{23} можно разложить в сумму частных производных, принимая во внимание равенства (2.1.70):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial \tau_{23}^s} &= \sum_{k=0}^s C_s^k \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-k} \partial y^k} \cos^{s-k} \beta \sin^k \beta = \\ &= \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^s} \cos^s \beta + s \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-1} \partial y} \cos^{s-1} \beta \sin \beta + \\ &\quad + \frac{s(s-1)}{2} \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-2} \partial y^2} \cos^{s-2} \beta \sin^2 \beta. \end{aligned} \quad (2.1.73)$$

Объединяя (2.1.71), (2.1.72) и (2.1.73), приходим к равенству

$$\begin{aligned} s \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-1} \partial y} \cos^{s-1} \beta \sin \beta + \frac{s(s-1)}{2} \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-2} \partial y^2} \cos^{s-2} \beta \sin^2 \beta = \\ = m_1(s), \end{aligned} \quad (2.1.74)$$

где

$$\begin{aligned}
& |m_1(s)| = \\
& = \left| C_2(s) \frac{\partial^{n+1} f(\zeta_{23}^s)}{\partial \tau_{23}^{n+1}} (a^2 + h^2)^{(n+1-s)/2} - C_1(s) \frac{\partial^{n+1} f(\zeta_{21}^s)}{\partial x^{n+1}} H^{n+1-s} \cos^s \beta \right| \underset{n}{\lesssim} \\
& \underset{n}{\lesssim} M (a^2 + h^2)^{(n+1-s)/2} + MH^{n+1-s} \cos^s \beta.
\end{aligned}$$

Для получения второго уравнения системы рассмотрим произвольный многочлен $R \in \{\tilde{P}_n, P_n\}$, т. е. многочлен, удовлетворяющий условиям (2.1.58). Рассмотрим сужение функции $\partial^s e[R] / (\partial \tau_{31}^s)$ на отрезок $[a_2, a_3]$ и разложим значение этой функции в точке a_2 по формуле Тейлора в точке a_3 . В результате имеем равенство

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial \tau_{31}^s} &= \frac{\partial^s e[R](a_3)}{\partial \tau_{31}^s} + \sum_{k=1}^{n-s} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^{s+k} e[R](a_3)}{\partial \tau_{31}^s \partial \tau_{23}^k} (a^2 + h^2)^{k/2} + \\
&+ \frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!} \frac{\partial^{n+1} f(\eta_{23}^s[R])}{\partial \tau_{31}^s \partial \tau_{23}^{n+1-s}} (a^2 + h^2)^{(n+1-s)/2} \quad (2.1.75)
\end{aligned}$$

(если $s = n$, то в правой части этого равенства присутствуют только первое и последнее слагаемые, т. е. сумму $\sum_{k=1}^0$ считаем равной нулю). С другой стороны, производную по направлению τ_{31} можно разложить в сумму частных производных:

$$\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial \tau_{31}^s} = \sum_{k=0}^s C_s^k \frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial x^{s-k} \partial y^k} \cos^{s-k} \alpha (-\sin \alpha)^k. \quad (2.1.76)$$

Из (2.1.75) и (2.1.76) приходим к равенству

$$\begin{aligned}
-s \frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial x^{s-1} \partial y} \cos^{s-1} \alpha \sin \alpha + \frac{s(s-1)}{2} \frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial x^{s-2} \partial y^2} \cos^{s-2} \alpha \sin^2 \alpha = \\
= \mu_1^s[R] + \mu_2^s[R], \quad (2.1.77)
\end{aligned}$$

где

$$\mu_1^s[R] = \sum_{k=1}^{n-s} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^{s+k} e[R](a_3)}{\partial \tau_{31}^s \partial \tau_{23}^k} (a^2 + h^2)^{k/2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!} \frac{\partial^{n+1} f(\eta_{23}^s[R])}{\partial \tau_{31}^s \partial \tau_{23}^{n+1-s}} (a^2 + h^2)^{(n+1-s)/2} - \\
& - \sum_{k=3}^s C_s^k \frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial x^{s-k} \partial y^k} \cos^{s-k} \alpha (-\sin \alpha)^k, \\
\mu_2^s[R] & = \frac{\partial^s e[R](a_3)}{\partial \tau_{31}^s} - \frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial x^s} \cos^s \alpha.
\end{aligned}$$

Отметим, что $\mu_2^s[R]$ зависит только от условий интерполяции на сторонах $[a_3, a_1]$ и $[a_2, a_1]$, т. е. от части условий (2.1.58). Таким образом, $\mu_2^s[R] = \mu_2^s[\tilde{P}_n] = \mu_2^s[P_n]$. Следовательно, для оценки этой величины можем использовать результат Ю.Н.Субботина (2.1.64), (2.1.65) и равенство (2.1.77):

$$\begin{aligned}
|\mu_2^s[R]| & = |\mu_2^s[\tilde{P}_n]| = \left| -s \frac{\partial^s e[\tilde{P}_n](a_2)}{\partial x^{s-1} \partial y} \cos^{s-1} \alpha \sin \alpha + \right. \\
& + \left. \frac{s(s-1)}{2} \frac{\partial^s e[\tilde{P}_n](a_2)}{\partial x^{s-2} \partial y^2} \cos^{s-2} \alpha \sin^2 \alpha - \mu_1^s[\tilde{P}_n] \right| = \\
& = \left| \sum_{k=1}^s C_s^k \frac{\partial^s e[\tilde{P}_n](a_2)}{\partial x^{s-k} \partial y^k} \cos^{s-k} \alpha (-\sin \alpha)^k - \right. \\
& - \sum_{k=1}^{n-s} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^{s+k} e[\tilde{P}_n](a_3)}{\partial \tau_{31}^s \partial \tau_{23}^k} (a^2 + h^2)^{k/2} - \\
& - \left. \frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!} \frac{\partial^{n+1} f(\eta_{23}^s[\tilde{P}_n])}{\partial \tau_{31}^s \partial \tau_{23}^{n+1-s}} (a^2 + h^2)^{(n+1-s)/2} \right| \lesssim_n \\
& \lesssim_n \sum_{k=1}^s C_s^k M H^{n+1-s} \frac{\cos^{s-k} \alpha \sin^k \alpha}{\sin^k \beta} + \sum_{k=1}^{n-s} M H^{n+1-s-k} (a^2 + h^2)^{k/2} + \\
& + M (a^2 + h^2)^{(n+1-s)/2} \lesssim_n M H^{n-s} (a^2 + h^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Подставим $R = P_n$ в (2.1.77) и с учетом условий (2.3.9) получим

$$-s \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-1} \partial y} \cos^{s-1} \alpha \sin \alpha + \frac{s(s-1)}{2} \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-2} \partial y^2} \cos^{s-2} \alpha \sin^2 \alpha =$$

$$= \mu_1^s[P_n] + \mu_2^s[P_n], \quad (2.1.78)$$

где

$$\begin{aligned} |\mu_2^s[P_n]| &= |\mu_2^s[R]| \underset{n}{\lesssim} MH^{n-s} (a^2 + h^2)^{1/2}; \\ \mu_1^s[P_n] &= \sum_{k=1}^{n-s} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^{s+k} e[P_n](a_3)}{\partial \tau_{31}^s \partial \tau_{23}^k} (a^2 + h^2)^{k/2} + \\ &+ \frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!} \frac{\partial^{n+1} f(\eta_{23}^s[P_n])}{\partial \tau_{31}^s \partial \tau_{23}^{n+1-s}} (a^2 + h^2)^{(n+1-s)/2} - \\ &- \sum_{k=3}^s C_s^k \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-k} \partial y^k} \cos^{s-k} \alpha (-\sin \alpha)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{n-s} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^{s+k} e[P_n](a_3)}{\partial \tau_{31}^s \partial \tau_{23}^k} (a^2 + h^2)^{k/2} + \\ &+ \frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!} \frac{\partial^{n+1} f(\eta_{23}^s[P_n])}{\partial \tau_{31}^s \partial \tau_{23}^{n+1-s}} (a^2 + h^2)^{(n+1-s)/2}. \end{aligned} \quad (2.1.79)$$

Если $s = n$, то правая часть равенства (2.1.79) состоит из одного слагаемого, и тогда

$$|\mu_1^s[P_n]|_{s=n} = |\mu_1^n[P_n]| = \left| -\frac{\partial^{n+1} f(\eta_{23}^n[P_n])}{\partial \tau_{31}^n \partial \tau_{23}} (a^2 + h^2)^{1/2} \right| \underset{n}{\lesssim} M (a^2 + h^2)^{1/2}.$$

Если $s = r \in \{2, \dots, n-1\}$, то правая часть равенства (2.1.79) содержит также сумму по k . В силу предположения индукции оценки (2.1.67) имеют место при всех $s = r+1, \dots, n$, и тогда этот факт и то, что

$$\left| \frac{\partial^{s+k} e[P_n](a_3)}{\partial \tau_{31}^s \partial \tau_{23}^k} \right| \underset{n}{\lesssim} \left| \frac{\partial^{s+k} e[P_n](a_3)}{\partial x^{s_1+k_1} \partial y^{s_2+k_2}} \cos^{s_1} \alpha \cos^{k_1} \beta (-\sin \alpha)^{s_2} \sin^{k_2} \beta \right|,$$

где $s_1 + s_2 = s$, $k_1 + k_2 = k$, приводит к оценке

$$\left| \frac{\partial^{s+k} e[P_n](a_3)}{\partial \tau_{31}^s \partial \tau_{23}^k} \right| \underset{n}{\lesssim} MH^{n+1-s-k}.$$

Таким образом,

$$|\mu_1^s[P_n]| \underset{n}{\lesssim} MH^{n-s} (a^2 + h^2)^{1/2}.$$

Объединяя (2.1.74) и (2.1.78), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} s \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-1} \partial y} \cos^{s-1} \beta \sin \beta + \frac{s(s-1)}{2} \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-2} \partial y^2} \cos^{s-2} \beta \sin^2 \beta = m_1(s), \\ -s \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-1} \partial y} \cos^{s-1} \alpha \sin \alpha + \frac{s(s-1)}{2} \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-2} \partial y^2} \cos^{s-2} \alpha \sin^2 \alpha = m_2(s), \end{cases}$$

где

$$|m_1(s)| \underset{n}{\lesssim} M (a^2 + h^2)^{(n+1-s)/2} + MH^{n+1-s} \cos^s \beta,$$

$$|m_2(s)| = |\mu_1^s[P_n] + \mu_2^s[P_n]| \underset{n}{\lesssim} MH^{n-s} (a^2 + h^2)^{1/2}.$$

Для решения системы используем формулы Крамера. Обозначим через A основную матрицу системы. Вычислим определитель основной матрицы

$$\begin{aligned} \det A &= \frac{s^2(s-1)}{2} \cos^{s-2} \beta \sin \beta \cos^{s-2} \alpha \sin \alpha \begin{vmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = \\ &= \frac{s^2(s-1)}{2} \cos^{s-2} \beta \sin \beta \cos^{s-2} \alpha \sin \alpha \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Тогда, принимая во внимание то, что $\cos \alpha \gtrsim 1$, $\sin \beta = h / (a^2 + h^2)^{1/2}$, $h/H \lesssim \sin \alpha = h/b \lesssim h/H$, $\sin \beta \lesssim \sin(\alpha + \beta) = \sin \theta \lesssim \sin \beta$, получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-1} \partial y} \right| &\underset{n}{\lesssim} \frac{|m_1(s)| \cos^{s-2} \alpha \sin^2 \alpha + |m_2(s)| \cos^{s-2} \beta \sin^2 \beta}{\cos^{s-2} \beta \sin \beta \cos^{s-2} \alpha \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{|m_1(s)| \sin \alpha}{\cos^{s-2} \beta \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} + \frac{|m_2(s)| \sin \beta}{\cos^{s-2} \alpha \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} \underset{n}{\lesssim} \\ &\underset{n}{\lesssim} \frac{|m_1(s)| \sin \alpha}{\cos^{s-2} \beta \sin^2 \beta} + \frac{|m_2(s)|}{\cos^{s-2} \alpha \sin \alpha} \underset{n}{\lesssim} \\ &\underset{n}{\lesssim} \frac{M (a^2 + h^2)^{(n+1-s)/2} \sin \alpha}{\cos^{s-2} \beta \sin^2 \beta} + \frac{MH^{n+1-s} \cos^s \beta \sin \alpha}{\cos^{s-2} \beta \sin^2 \beta} + \frac{MH^{n-s} (a^2 + h^2)^{1/2}}{\cos^{s-2} \alpha \sin \alpha} \underset{n}{\lesssim} \\ &\underset{n}{\lesssim} MH^{n+1-s} \cdot \frac{(a^2 + h^2)^{(n+1-s)/2}}{H^{n+1-s}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^{s-2} \beta \sin^2 \beta} + \\ &+ \frac{MH^{n+1-s}}{\sin \beta} \cos^2 \beta \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{MH^{n-s} (a^2 + h^2)^{1/2}}{\sin \alpha} \underset{n}{\lesssim} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lesssim_n MH^{n+1-s} \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right)^{n+1-s} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^{s-2} \beta \sin^2 \beta} + \\
& \quad + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin \beta} + \frac{MH^{n+1-s} (a^2 + h^2)^{1/2}}{h} \lesssim_n \\
& \lesssim_n MH^{n+1-s} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^{s-2} \beta \sin^2 \beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin \beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin \beta} \lesssim_n \\
& \lesssim_n \frac{MH^{n+1-s}}{\cos^{s-2} \beta \sin \beta} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin \beta}. \tag{2.1.80}
\end{aligned}$$

Так как $\sin \alpha \leq \sin(2\beta)$ (это следует из того, что $\sin \alpha - \sin(2\beta) = \sin(\theta + \beta) - \sin(2\beta) = 2 \sin((\theta - \beta)/2) \cos((\theta + \beta)/2 + \beta) = 2 \sin((\theta - \beta)/2) \cos((\pi - \alpha)/2 + \beta) = -2 \sin((\theta - \beta)/2) \sin(\beta - \alpha/2) \leq 0$) и $\beta \leq \beta_0$, то (2.1.80) приводит к оценке

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-1} \partial y} \right| & \lesssim_n \frac{MH^{n+1-s}}{\cos^{s-4} \beta \sin \beta} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2(2\beta)} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin \beta} \lesssim \frac{MH^{n+1-s}}{\cos^{n-4} \beta \sin \beta} \leq \\
& \leq \left(\frac{1}{\cos \beta_0} \right)^{n-4} \frac{MH^{n+1-s}}{\sin \beta}. \tag{2.1.81}
\end{aligned}$$

Аналогично оцениваем оставшуюся производную:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-2} \partial y^2} \right| & \lesssim_n \frac{|m_1(s)| \cos^{s-1} \alpha \sin \alpha + |m_2(s)| \cos^{s-1} \beta \sin \beta}{\cos^{s-2} \beta \sin \beta \cos^{s-2} \alpha \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} = \\
& = \frac{|m_1(s)| \cos \alpha}{\cos^{s-2} \beta \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} + \frac{|m_2(s)| \cos \beta}{\cos^{s-2} \alpha \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} \lesssim \\
& \lesssim \frac{|m_1(s)|}{\cos^{s-2} \beta \sin^2 \beta} + \frac{|m_2(s)| \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \lesssim_n \\
& \lesssim_n \frac{M (a^2 + h^2)^{(n+1-s)/2}}{\cos^{s-2} \beta \sin^2 \beta} + \frac{MH^{n+1-s} \cos^s \beta}{\cos^{s-2} \beta \sin^2 \beta} + \frac{MH^{n-s} (a^2 + h^2)^{1/2} \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \lesssim \\
& \lesssim MH^{n+1-s} \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right)^{n+1-s} \cdot \frac{1}{\cos^{s-2} \beta \sin^2 \beta} + MH^{n+1-s} \cdot \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} + \\
& \quad + MH^{n+1-s} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \lesssim
\end{aligned}$$

$$\lesssim \frac{MH^{n+1-s}}{\cos^{s-2} \beta \sin^2 \beta} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin^2 \beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin^2 \beta}. \quad (2.1.82)$$

Окончательно с учетом того, что $\sin \alpha \leq \sin(2\beta)$ и $\beta \leq \beta_0$, неравенство (2.1.82) дает оценку

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^s e[P_n](a_2)}{\partial x^{s-2} \partial y^2} \right| &\lesssim_n \frac{MH^{n+1-s}}{\cos^{s-3} \beta \sin^2 \beta} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(2\beta)} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin^2 \beta} \lesssim \\ &\lesssim \left(\frac{1}{\cos \beta_0} \right)^{n-3} \frac{MH^{n+1-s}}{\sin^2 \beta}. \end{aligned} \quad (2.1.83)$$

Для завершения доказательства леммы 2.1.12 осталось доказать (2.1.69) при $s = 1$.

В случае $s = 1$ нет необходимости составлять систему уравнений. Достаточно рассмотреть сужение функции $e[P_n]$ на сторону $a_2 a_3$ и использовать оценки ошибки аппроксимации производной функции производной интерполяционного многочлена, с одной стороны, и разложение производной по направлению в сумму частных производных, с другой стороны. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial e[P_n](a_2)}{\partial \tau_{23}} &= C_2^* \frac{\partial^{n+1} f(\zeta_{23}^1)}{\partial \tau_{23}^{n+1}} (a^2 + h^2)^{n/2} = \\ &= \frac{\partial e[P_n](a_2)}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial e[P_n](a_2)}{\partial y} \sin \beta \end{aligned}$$

где C_2^* — величина, допускающая оценку сверху величиной, зависящей от n ; ζ_{23}^1 — точка между a_2 и a_3 . Принимая во внимание то, что (2.1.69) доказано при всех s для $j = 0$, получаем

$$\left| \frac{\partial e[P_n](a_2)}{\partial y} \right| \lesssim_n \frac{MH^n}{\sin \beta}.$$

Лемма 2.1.12 доказана. \square

Для окончательного доказательства оценок (2.1.67) остается применить разложение (2.1.68) и лемму 2.1.12. Таким образом, теорема 2.1.6 доказана. \square

Следствие 2.1.4. Если $n = 3$, то в формулировке теоремы 2.1.6 можно исключить ограничения на угол β и зависимость величины $C(n, \beta_0)$ от β_0 .

Доказательство следует из (2.1.81) и (2.1.83). \square

Теорема 2.1.7. Пусть многочлен P_n определяется интерполяционными условиями (2.1.58), (2.1.60). Тогда для любого $\gamma_0 \neq \pi/2$ и любого треугольника Δ , удовлетворяющего условию $|\cos \gamma| > |\cos \gamma_0|$, справедливы оценки

$$\mathbf{E}_{n,s}^2 \leq \begin{cases} C_*(n, \gamma_0) M H^{n+1-s} \sin^{-s} \gamma, & s = 0, 1, 2, \\ C_*(n, \gamma_0) M H^{n+1-s} \sin^{-2} \gamma, & s = 3, \dots, n, \end{cases} \quad (2.1.84)$$

где $C_*(n, \gamma_0)$ — неотрицательная величина, зависящая только от n и γ_0 .

Доказательство. Теорема 2.1.7 доказывается аналогично теореме 2.1.6. Вводится прямоугольная система координат Ox_1y_1 так, как это показано на рис. 2.1.4 (точка a_3 совпадает с началом координат, точка a_1 принадлежит оси Ox_1 , точка a_2 находится в верхней полуплоскости). Далее мы переходим к получению оценок

$$\left\| \frac{\partial^{s-j}(f - P)}{\partial x_1^{s-j} \partial y_1^j} \right\|_{\Delta} \leq \begin{cases} \mathcal{K}_2(n, \gamma_0) M H^{n+1-s} \sin^{-j} \theta, & j = \overline{0, \min\{2, s\}} \\ \mathcal{K}_2(n, \gamma_0) M H^{n+1-s}, & j = 3, \dots, s, \end{cases} \quad (2.1.85)$$

где $0 \leq s \leq n$; $\mathcal{K}_2(n, \gamma_0)$ — неотрицательные величины, зависящие только от n и γ_0 . Почти полностью повторяется доказательство леммы 2.1.12 с заменой угла β на γ , переменных x и y — на x_1 и y_1 соответственно. Исключением является то, что не доказываются оценки вида (2.1.81) и (2.1.83). Доказательство останавливается на оценках вида (2.1.80) и (2.1.82), откуда для любого $s = 2, \dots, n$ следуют неравенства

$$\left| \frac{\partial^s e[P](a_3)}{\partial x_1^{s-1} \partial y_1} \right| \lesssim_n \left(\frac{1}{\cos \beta_0} \right)^{n-2} \frac{M H}{\sin \beta},$$

$$\left| \frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x_1^{s-2} \partial y_1^2} \right| \lesssim_n \left(\frac{1}{\cos \beta_0} \right)^{n-2} \frac{MH}{\sin^2 \beta}.$$

Прочая часть доказательства леммы 2.1.12 и теоремы 2.1.6 остается без изменений. Теорема 2.1.7 доказана. \square

С учетом теоремы 2.1.6 пространство конечных элементов предлагается строить следующим образом (аналогично — с учетом теоремы 2.1.7). Пусть Δ — произвольный треугольник из триангуляции области Ω , β — средний угол этого треугольника. Очевидно, $0 \leq \beta \leq \pi/2$. Представим отрезок $[0, \pi/2]$ в виде объединения двух отрезков. Например, $[0, \pi/2] = [0, \pi/3] \cup [\pi/3, \pi/2]$.

Если $\beta < \pi/3$, то при построении конечного элемента выберем многочлен P_n , задаваемый условиями (2.1.58)–(2.1.59), для которого имеют место оценки (2.1.61), т. е. для любого $0 \leq s \leq n$ будет

$$E_{n,s}^d \lesssim MH^{n+1-s} (\sin \gamma)^{-\min\{s,2\}}.$$

Если $\beta \geq \pi/3$, то выберем многочлен \tilde{P}_n , задаваемый условиями (2.1.56). В силу (2.1.57), замечания 2.1.4 и имеющегося ограничения на угол β для любого $0 \leq s \leq n$ имеют место оценки

$$E_{n,s}^d \lesssim MH^{n+1-s} \sin^{-s} \gamma \lesssim MH^{n+1-s} \sin^{-s} \beta \lesssim MH^{n+1-s}.$$

Так как в определении многочлена P_n и многочлена \tilde{P}_n участвуют условия (2.1.58), то результирующий сплайн на Ω будет непрерывной функцией.

§ 2.2. Оценки снизу для простых конечных элементов

Мы рассматриваем функцию $f(x, y)$, определенную на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; $f \in W^{n+1}M(\Omega)$; Ω триангулирована на конечное число треугольников. На каждом треугольнике для $f(x, y)$ строится многочлен степени n типа Лагранжа, Эрмита или Биркгофа, интерполирующий функцию $f(x, y)$

(и ее производные, если речь идет о многочленах Эрмита или Биркгофа) в узлах треугольника (всего задается $(n + 1)(n + 2)/2$ условий на каждом треугольнике), такой, что результирующая кусочно-полиномиальная функция на Ω имеет гладкость m ($m \in \mathbb{Z}_+$), $n \geq 4m + 1$.

Пусть произвольный треугольник Δ с вершинами a_1, a_2, a_3 из триангуляции области Ω помещен в прямоугольную систему координат Oxy таким образом, что для некоторых положительных a, b, h координаты вершин записываются следующим образом: $a_1 = (b, 0)$, $a_2 = (-a, 0)$, $a_3 = (0, h)$. Так как мы считаем, что $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$ (напомним, что α, β, γ — величины углов при вершинах a_1, a_2, a_3 соответственно), то $a \leq b$, и диаметр Δ равен $a + b = H$.

Пусть на Δ по функции f строится интерполяционный многочлен $P_n(u) = P_n(x, y)$ (n фиксировано). Пусть сужения $P_n(u)$ и $\partial^k P_n(u)/\partial n_{ij}^k$ ($k = 1, \dots, m$) на любую сторону $a_i a_j$ треугольника однозначно определяются интерполяционными условиями, задаваемыми в точках стороны $a_i a_j$ (или в точках прямой, проходящей через a_i и a_j). Если при этом $P_n^*(u)$ — интерполяционный многочлен на соседнем с Δ треугольнике Δ^* , $a_i a_j$ — общая сторона Δ и Δ^* , условия для нахождения $P_n^*(u)$, задаваемые на $a_i a_j$, совпадают с условиями для $P_n(u)$, и это имеет место для всех соседних треугольников, то обеспечена гладкость порядка m кусочно-полиномиальной функции на Ω . Пусть, кроме того, условия для определения $P_n(u)$ задаются таким образом, что для любой стороны $a_i a_j$ треугольника Δ имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial^k (f(u) - P_n(u))}{\partial n_{ij}^k} \right|_{u \in [a_i, a_j]} = \\ & = \frac{1}{(n + 1 - k)!} \frac{\partial^{n+1} f(\vartheta_{ij}^k)}{\partial n_{ij}^k \partial \tau_{ij}^{n+1-k}} d_{ij}^{n+1-k} \omega_{ij, n+1-k} \left(\frac{|u - a_i|}{d_{ij}} \right), \quad (2.2.1) \\ & k = 0, \dots, m, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

где $\vartheta_{ij}^k \in a_i a_j$ (или ϑ_{ij}^k является точкой прямой, проходящей через a_i и a_j , если узлы интерполяции вынесены за пределы треугольника и находятся в области $\tilde{\Omega}$ ($\Omega \subset \tilde{\Omega}$), в которой функция $f(x, y)$ такова, что $f \in W^{n+1}M(\tilde{\Omega})$); $\omega_{ij, n+1-k}$ — многочлен степени $n+1-k$ с старшим коэффициентом, равным единице; через $|u - a_i|$ обозначено расстояние между u и a_i .

Введем определитель

$$D = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_m \\ \binom{n-2}{m-1} & \binom{n-2}{m} & \dots & \binom{n-2}{2m-2} \\ \binom{n-3}{m-2} & \binom{n-3}{m-1} & \dots & \binom{n-3}{2m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n-m}{1} & \binom{n-m}{2} & \dots & \binom{n-m}{m+1} \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} d_s &= \binom{n-1}{m-1+s} \left(n\omega_{21,n}^{(n-1)}(1) + n\frac{a}{b}\omega_{21,n}^{(n-1)}(1) - \omega_{31,n+1}^{(n)}(1) \right) + \\ &+ \binom{n}{m+s} \left(\omega_{31,n}^{(n-1)}(1) - \omega_{21,n}^{(n-1)}(1) \right), \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$s = 1, \dots, m;$$

ПОЛОЖИМ

$$g = b\omega_{31,n+1}^{(n)}(1) - (a+b)\omega_{21,n+1}^{(n)}(1).$$

Теорема 2.2.1. Пусть условия интерполяции функции $f \in W^{n+1}M(\Delta)$ на треугольнике Δ многочленом $P_n(x, y)$ таковы, что выполнены условия (2.2.1) и имеют место неравенства

$$\left| \omega_{kl, n+1-j}^{(n-j)}(1) \right|_{n,m} \lesssim 1, \quad j = 0, \dots, m, \quad k, l \in \{1, 2, 3\}; \quad (2.2.3)$$

$$|g| \underset{n,m}{\gtrsim} a; \quad (2.2.4)$$

$$|D| \underset{n,m}{\gtrsim} 1. \quad (2.2.5)$$

Тогда найдутся число $\alpha_0 > 0$ и натуральное число $s_0 \geq 2m + 1$ такие что для любого $\alpha < \alpha_0$ имеют место оценки

$$\mathbf{E}_{n,s}^2 \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{MH^{n+1-s}}{\sin \beta (\sin \alpha)^{s-1}}, \quad s = 1, \dots, s_0; \quad (2.2.6)$$

$$\mathbf{E}_{n,s}^2 \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{MH^{n+1-s}}{\sin \beta (\sin \alpha)^{s_0-1}}, \quad s = s_0 + 1, \dots, n. \quad (2.2.7)$$

Если, кроме того, $m \geq 1$ и

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = 0, \quad (2.2.8)$$

то найдутся $\tilde{\alpha}_0 > 0$ и натуральные числа $\{r_i\}_{i=0}^{m+1}$, $2m + 1 = r_0 < r_1 < \dots < r_{m+1} \leq n$ такие что для любого $\alpha < \tilde{\alpha}_0$ имеют место оценки

$$\mathbf{E}_{n,r}^2 \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{MH^{n+1-r}}{\sin \beta (\sin \alpha)^{2m} (\operatorname{tg} \beta)^{r-2m-1}}, \quad r = r_1, \dots, r_{m+1}; \quad (2.2.9)$$

$$\mathbf{E}_{n,r}^2 \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{MH^{n+1-r}}{\sin \beta (\sin \alpha)^{2m} (\operatorname{tg} \beta)^{r_{m+1}-2m-1}}, \quad r = r_{m+1} + 1, \dots, n; \quad (2.2.10)$$

$$\mathbf{E}_{n,r}^2 \underset{n,m}{\gtrsim} \max \left\{ \frac{MH^{n+1-r}}{\sin \beta (\sin \alpha)^{p_r} (\operatorname{tg} \beta)^{q_r}}, \frac{MH^{n+1-r}}{\sin \beta (\sin \alpha)^{2m} (\operatorname{tg} \beta)^{r_{i-1}-2m-1}} \right\}, \quad (2.2.11)$$

$$r = r_{i-1} + 1, \dots, r_i - 1, \quad i = 1, \dots, m + 1,$$

где $p_r = \max\{0, 2m - r_i + r\}$, $q_r = \min\{r_i - 2m, r\} - 1$.

Далее в замечаниях 2.2.3–2.2.5 обсуждаются ситуации, в которых условия (2.2.3)–(2.2.5) являются выполненными. В частности, эти условия имеют место при использовании стандартных общепринятых условий интерполяции.

Докажем сначала вспомогательную лемму.

Лемма 2.2.1. Пусть $s_0, \dots, s_k \in \mathbb{N}$, $k \leq s_0 < \dots < s_k$. Положим $s_{-1} = -1$. Тогда

$$\mathfrak{D}_n(s_0, \dots, s_k) \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} \binom{n}{s_0} & \binom{n}{s_1} & \cdots & \binom{n}{s_k} \\ \binom{n-1}{s_0-1} & \binom{n-1}{s_1-1} & \cdots & \binom{n-1}{s_k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n-k}{s_0-k} & \binom{n-k}{s_1-k} & \cdots & \binom{n-k}{s_k-k} \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^k \prod_{i=0}^{k-j} \frac{\binom{n-1-s_{j-1}-i}{s_{j-1}-s_{j-1}}}{\binom{s_{i+j}-1-s_{j-1}}{s_{j-1}-s_{j-1}}}. \quad (2.2.12)$$

Отметим, что точное значение $\mathfrak{D}_n(s_0, \dots, s_k)$ не имеет принципиального значения для доказательства теоремы; достаточно того, что $\mathfrak{D}_n(s_0, \dots, s_k) \neq 0$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\binom{r-1}{s-1} - \binom{r}{s} = -\binom{r-1}{s}$. Из каждой строки определителя со второй по $(k+1)$ -ю вычтем предыдущую, вынесем множитель (-1) из этих строк. Далее из строк с третьей по $(k+1)$ -ю вычтем предыдущую и т. д. (выполняем данную процедуру k раз). Получаем

$$\mathfrak{D}_n(s_0, \dots, s_k) = (-1)^{k(k+1)/2} \begin{vmatrix} \binom{n}{s_0} & \binom{n}{s_1} & \cdots & \binom{n}{s_k} \\ \binom{n-1}{s_0} & \binom{n-1}{s_1} & \cdots & \binom{n-1}{s_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n-k}{s_0} & \binom{n-k}{s_1} & \cdots & \binom{n-k}{s_k} \end{vmatrix}. \quad (2.2.13)$$

В случае $s_i = s_0 + i$, $i = 1, \dots, k$, определитель из правой части (2.2.13) вычислен в [25, задача 317]. Мы будем использовать тот же метод вычисления, действуя по индукции. Из $(i+1)$ -й строки, $i = 0, \dots, k$, вынесем множитель $(n-i)(n-i-1)\dots(n-i-s_0+1)$; из $(j+1)$ -го столбца, $j = 0, \dots, k$, вынесем множитель $1/(s_j(s_j-1)\dots(s_j-s_0+1))$. Тогда

$$\mathfrak{D}_n(s_0, \dots, s_k) =$$

$$= (-1)^{k(k+1)/2} \prod_{i=0}^k \frac{(n-i)! (s_i - s_0)!}{(n-i-s_0)! s_i!} \begin{vmatrix} 1 & \binom{n-s_0}{s_1-s_0} & \cdots & \binom{n-s_0}{s_k-s_0} \\ 1 & \binom{n-1-s_0}{s_1-s_0} & \cdots & \binom{n-1-s_0}{s_k-s_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \binom{n-k-s_0}{s_1-s_0} & \cdots & \binom{n-k-s_0}{s_k-s_0} \end{vmatrix}.$$

Из каждой строки с первой по k -ю вычтем следующую и разложим получившийся определитель по первому столбцу:

$$\mathfrak{D}_n(s_0, \dots, s_k) = (-1)^{k(k+1)/2+(k+2)} \prod_{i=0}^k \frac{\binom{n-i}{s_0}}{\binom{s_i}{s_0}} \begin{vmatrix} \binom{n-1-s_0}{s_1-1-s_0} & \binom{n-1-s_0}{s_2-1-s_0} & \cdots & \binom{n-1-s_0}{s_k-1-s_0} \\ \binom{n-2-s_0}{s_1-1-s_0} & \binom{n-2-s_0}{s_2-1-s_0} & \cdots & \binom{n-2-s_0}{s_k-1-s_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-k-s_0}{s_1-1-s_0} & \binom{n-k-s_0}{s_2-1-s_0} & \cdots & \binom{n-k-s_0}{s_k-1-s_0} \end{vmatrix}.$$

Первый шаг индукции завершен. В результате мы получили определитель, аналогичный определителю из правой части (2.2.13), но его порядок на единицу меньше. Продолжая процесс, получим (2.2.12). Лемма 2.2.1 доказана. \square

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим функцию

$$f^*(x, y) = \delta_1 M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \delta_2 M \frac{x^n y}{n!}, \quad (2.2.14)$$

где δ_1 и δ_2 выбираются таким образом, чтобы $f^* \in W^{n+1}M$, $\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0$ (аналогичная функция была использована в [20] при $n = 5$, $m = 1$ для доказательства неумлучшаемости полученных там оценок погрешности аппроксимации производных). Под $P_n(x, y)$ будем понимать многочлен, интерполирующий функцию $f^*(x, y)$ и удовлетворяющий условиям теоремы. Положим

$$e(x, y) = f^*(x, y) - P_n(x, y).$$

Далее будем оценивать производные $e(x, y)$ по некоторым выбранным направлениям.

Лемма 2.2.2. Если многочлен $P_n(x, y)$, интерполирующий функцию $f^*(x, y)$ на треугольнике Δ , удовлетворяет условиям (2.2.1) при $f = f^*$, и выполнены условия (2.2.3), (2.2.4), (2.2.5), то имеют место оценки (2.2.6), (2.2.7).

Доказательство. Пусть для определенности направление нормали n_{31} таково, что она образует острый угол с осью Oy . Данное предположение не влияет на общность результатов. Рассмотрим сужения $\partial^j e(x, y)/(\partial n_{31}^j)$, $j = 0, \dots, m$, на отрезок $a_3 a_1$. Отметим, что $\tau_{31} = (\cos \alpha, -\sin \alpha)$, $n_{31} = (\sin \alpha, \cos \alpha)$. Используя условие (2.2.1), вид функции f^* и расположение треугольника в системе координат, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial \tau_{31}^{n-j} \partial n_{31}^j} &= \frac{1}{(n+1-j)!} \frac{\partial^{n+1} f^*(\vartheta_{31}^j)}{\partial \tau_{31}^{n+1-j} \partial n_{31}^j} (b^2 + h^2)^{1/2} \omega_{31, n+1-j}^{(n-j)}(1) = \\ &= \frac{M}{(n+1-j)!} (b^2 + h^2)^{1/2} \omega_{31, n+1-j}^{(n-j)}(1) (\delta_1 \cos^{n+1-j} \alpha \sin^j \alpha - \\ &\quad - \delta_2 (n+1-j) \cos^{n-j} \alpha \sin^{j+1} \alpha + \delta_2 j \cos^{n+2-j} \alpha \sin^{j-1} \alpha) = \\ &= \frac{Mb \cos^n \alpha}{(n+1-j)!} \omega_{31, n+1-j}^{(n-j)}(1) (\delta_1 \operatorname{tg}^j \alpha - \delta_2 (n+1-j) \operatorname{tg}^{j+1} \alpha + \delta_2 j \operatorname{tg}^{j-1} \alpha). \end{aligned}$$

Тогда, так как вектор единичной длины, сонаправленный с осью Oy , представляется в виде $(-\tau_{31} \sin \alpha + n_{31} \cos \alpha)$, для $k = 0, \dots, m$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial \tau_{31}^{n-k} \partial y^k} &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial \tau_{31}^{n-j} \partial n_{31}^j} \sin^{k-j} \alpha \cos^j \alpha = \\ &= (-1)^k Mb \mu_k \sin^k \alpha \cos^n \alpha, \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

где

$$\mu_k = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{(n+1-j)!} \binom{k}{j} \omega_{31, n+1-j}^{(n-j)}(1) \left(\delta_1 - \delta_2 (n+1-j) \operatorname{tg} \alpha + \frac{\delta_2 j}{\operatorname{tg} \alpha} \right). \quad (2.2.16)$$

Отметим, что с учетом (2.2.3) имеют место оценки

$$|\mu_0| \lesssim_{n,m} 1; \quad |\mu_k| \lesssim_{n,m} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.2.17)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial \tau_{31}^{n-k} \partial y^k} &= \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k} \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} \cos^{n-i} \alpha (-\sin \alpha)^{i-k} = \\ &= (-1)^k \frac{\cos^n \alpha}{\sin^k \alpha} \sum_{i=k}^n (-1)^i \binom{n-k}{i-k} \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} \operatorname{tg}^i \alpha. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Рассмотрим сужения $\partial^n e(a_1) / (\partial x^{n-i} \partial y^i)$ на сторону $a_2 a_1$ для $i = 0, \dots, m$. Так как f^* имеет вид (2.2.14), многочлен $\partial^i P_n(x, 0) / (\partial y^i)$ совпадает с $\partial^i f^*(x, 0) / (\partial y^i)$ при $i = 2, \dots, m$, т. е. $\partial^n e(a_1) / (\partial x^{n-i} \partial y^i) = 0$ при $i = 2, \dots, m$. Для $i = 0, 1$ согласно (2.2.1) получаем

$$\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^n} = \frac{M\delta_1}{(n+1)!} (a+b) \omega_{21, n+1}^{(n)}(1), \quad (2.2.19)$$

$$\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-1} \partial y} = \frac{M\delta_2}{n!} (a+b) \omega_{21, n}^{(n-1)}(1). \quad (2.2.20)$$

Таким образом, объединяя (2.2.15) и (2.2.18), приходим к системе линейных уравнений относительно величин $\partial^n e(a_1) / (\partial x^{n-i} \partial y^i)$:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=m+1}^{2m+1} (-1)^i \binom{n-k}{i-k} \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} \operatorname{tg}^i \alpha = \\ &= - \sum_{i=2m+2}^n (-1)^i \binom{n-k}{i-k} \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} \operatorname{tg}^i \alpha + \tilde{\mu}_k, \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

$$k = 0, \dots, m,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_k &= Mb\mu_k \sin^{2k} \alpha, \quad k = 2, \dots, m; \\ \tilde{\mu}_0 &= -\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^n} + n \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-1} \partial y} \operatorname{tg} \alpha + Mb\mu_0, \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-1} \partial y} \operatorname{tg} \alpha + Mb\mu_1 \sin^2 \alpha.$$

Используя (2.2.16), (2.2.19) и (2.2.20), можем $\tilde{\mu}_0$ представить в следующем виде:

$$\tilde{\mu}_0 = \tilde{\mu}_{00} + \tilde{\mu}_{01}, \quad (2.2.23)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{00} &= \frac{M\delta_1}{(n+1)!} \left(b\omega_{31,n+1}^{(n)}(1) - (a+b)\omega_{21,n+1}^{(n)}(1) \right) = \frac{M\delta_1 g}{(n+1)!}, \\ \tilde{\mu}_{01} &= \frac{M\delta_2 h}{n!} \left(n\omega_{21,n}^{(n-1)}(1) + n\frac{a}{b}\omega_{21,n}^{(n-1)}(1) - \omega_{31,n+1}^{(n)}(1) \right). \end{aligned}$$

Аналогично $\tilde{\mu}_1$ представляется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_1 &= M\delta_1 b \sin^2 \alpha \left(\phi_1(n, \delta_1, \delta_2, \alpha)\omega_{31,n+1}^{(n)}(1) + \phi_2(n, \delta_1, \delta_2, \alpha)\omega_{31,n}^{(n-1)}(1) \right) + \\ &+ \frac{M\delta_2}{n!} h\omega_{21,n}^{(n-1)}(1) + \frac{M\delta_2}{n!} \frac{ah}{b}\omega_{21,n}^{(n-1)}(1) - \frac{M\delta_2}{n!} \omega_{31,n}^{(n-1)}(1) b \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

где $|\phi_i(n, \delta_1, \delta_2, \alpha)| \lesssim 1$, $i = 1, 2$. Так как $ah/b = b \operatorname{tg}^2 \alpha / \operatorname{tg} \beta$, $b \sin \alpha \cos \alpha = h - h \sin^2 \alpha$, то с учетом (2.2.3) можем $\tilde{\mu}_1$ разложить на сумму двух слагаемых

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_{11} + \tilde{\mu}_{12}, \quad (2.2.24)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{11} &= \frac{M\delta_2 h}{n!} \left(\omega_{21,n}^{(n-1)}(1) - \omega_{31,n}^{(n-1)}(1) \right); \\ \tilde{\mu}_{12} &= Mb\phi_3(n, \delta_1, \delta_2, \alpha) \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg} \beta} + Mb\phi_4(n, \delta_1, \delta_2, \alpha) \sin^2 \alpha, \\ |\phi_i(n, \delta_1, \delta_2, \alpha)| &\lesssim 1, \quad i = 3, 4. \end{aligned}$$

Разрешим систему (2.2.21) относительно $m+1$ неизвестных, стоящих в левой части, которые будем считать базисными, по формулам Крамера. Тогда

$$\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = \frac{\mathfrak{D}_i}{\mathfrak{D}}, \quad i = m+1, \dots, 2m+1,$$

где \mathfrak{D} представляет собой определитель $\mathfrak{D}_n(m+1, \dots, 2m+1)$, у которого каждый столбец умножен на $(-\operatorname{tg} \alpha)^{s+m}$, где s — номер столбца, т. е.

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= (-\operatorname{tg} \alpha)^{(m+1)(3m+2)/2} \mathfrak{D}_n(m+1, \dots, 2m+1) = \\ &= (-\operatorname{tg} \alpha)^{(m+1)(3m+2)/2} \prod_{j=0}^m \frac{\binom{n-j}{m+1}}{\binom{m+1+j}{m+1}}; \end{aligned}$$

\mathfrak{D}_i — определитель, получающийся в результате замены i -го столбца \mathfrak{D} на столбец правых частей (2.2.21). Таким образом,

$$\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = (\operatorname{tg} \alpha)^{-i} \sum_{s=2m+2}^n \nu_{is} \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-s} \partial y^s} \operatorname{tg}^s \alpha + \varphi_i, \quad i = m+1, \dots, 2m+1, \quad (2.2.25)$$

где $\varphi_i = \left(\sum_{k=0}^m \nu_{ik} \tilde{\mu}_k \right) / \operatorname{tg}^i \alpha$; коэффициенты ν_{is} могут зависеть только от n и m . Принимая во внимание (2.2.3), (2.2.17), (2.2.22), (2.2.23), (2.2.24), можно утверждать, что

$$\begin{aligned} |\varphi_i| &= \frac{\left| \nu_{i,0} (\tilde{\mu}_{00} + \tilde{\mu}_{01}) + \nu_{i,1} (\tilde{\mu}_{11} + \tilde{\mu}_{12}) + \sum_{k=2}^m \nu_{i,k} \tilde{\mu}_k \right|}{\operatorname{tg}^i \alpha} \lesssim_{n,m} \\ &\lesssim_{n,m} \frac{M|g|}{\operatorname{tg}^i \alpha} + \frac{Mh}{\operatorname{tg}^i \alpha} + \frac{Mb \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}^i \alpha} + \frac{Mb \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^i \alpha} + \frac{Mb \sin^3 \alpha}{\operatorname{tg}^i \alpha} \lesssim_{n,m} \\ &\lesssim_{n,m} \frac{M|g|}{\operatorname{tg}^i \alpha} + \frac{Mb}{\operatorname{tg}^{i-1} \alpha} \lesssim_{n,m} \frac{M(|g| + h)}{\operatorname{tg}^i \alpha}, \quad (2.2.26) \\ &i = 1, \dots, 2m. \end{aligned}$$

Рассмотрим более детально случай $i = 2m+1$:

$$\begin{aligned} \varphi_{2m+1} &= \frac{(-1)^{(m+2)+m(3m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \tilde{\mu}_0 \mathfrak{D}_{n-1}(m, \dots, 2m-1) - \\ &- \frac{(-1)^{(m+2)+m(3m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \tilde{\mu}_1 \begin{vmatrix} \binom{n}{m+1} & \binom{n}{m+2} & \cdots & \binom{n}{2m} \\ \binom{n-2}{m-1} & \binom{n-2}{m} & \cdots & \binom{n-2}{2m-2} \\ \binom{n-3}{m-2} & \binom{n-3}{m-1} & \cdots & \binom{n-3}{2m-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{n-m}{1} & \binom{n-m}{2} & \cdots & \binom{n-m}{m+1} \end{vmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \sum_{k=2}^m \nu_{2m+1,k} \tilde{\mu}_k = \\
& = \frac{\kappa(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \tilde{\mu}_{00} + \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \begin{vmatrix} \tilde{d}_1 & \tilde{d}_2 & \dots & \tilde{d}_m \\ \binom{n-2}{m-1} & \binom{n-2}{m} & \dots & \binom{n-2}{2m-2} \\ \binom{n-3}{m-2} & \binom{n-3}{m-1} & \dots & \binom{n-3}{2m-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n-m}{1} & \binom{n-m}{2} & \dots & \binom{n-m}{m+1} \end{vmatrix} + \\
& + \frac{\lambda(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \tilde{\mu}_{12} + \frac{1}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \sum_{k=2}^m \nu_{2m+1,k} \tilde{\mu}_k,
\end{aligned}$$

где $1 \underset{n,m}{\lesssim} \kappa, \lambda \underset{n,m}{\lesssim} 1$ в силу леммы 2.2.1;

$$\tilde{d}_s = \tilde{\mu}_{01} \binom{n-1}{m-1+s} - \tilde{\mu}_{11} \binom{n}{m+s} = \frac{M\delta_2 h}{n!} d_s$$

(величины d_s определены в (2.2.2)). Таким образом,

$$\begin{aligned}
\varphi_{2m+1} & = \frac{\kappa(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \frac{M\delta_1 g}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \frac{M\delta_2 h}{n!} D + \\
& + \frac{\lambda(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \tilde{\mu}_{12} + \frac{1}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \sum_{k=2}^m \nu_{2m+1,k} \tilde{\mu}_k. \tag{2.2.27}
\end{aligned}$$

Оценим слагаемые в правой части (2.2.27). В силу (2.2.4) и (2.2.5) имеют место оценки

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\kappa(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \frac{M\delta_1 g}{n!} \right| & \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{M|\delta_1||g|}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{M|\delta_1|a}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha}, \\
\left| \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \frac{M\delta_2 h}{n!} D \right| & \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{M|\delta_2|h}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha}.
\end{aligned}$$

Для оценки третьего слагаемого правой части (2.2.27) используем вид $\tilde{\mu}_{12}$:

$$\left| \frac{\lambda(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \tilde{\mu}_{12} \right| \underset{n,m}{\lesssim} \frac{Mb \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} + \frac{Mb \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \underset{n,m}{\lesssim} \frac{Mb \sin \alpha}{\sin \beta \operatorname{tg}^{2m} \alpha}.$$

Остается оценить четвертое слагаемое, используя (2.2.17) и (2.2.22):

$$\left| \frac{1}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} \sum_{k=2}^m \nu_{2m+1,k} \tilde{\mu}_k \right| \underset{n,m}{\lesssim} \frac{Mb}{\operatorname{tg}^{2m-2} \alpha} \underset{n,m}{\lesssim} \frac{Mb \sin \alpha}{\sin \beta \operatorname{tg}^{2m} \alpha}.$$

Данные оценки вместе с тем, что α является достаточно малой величиной, означают, что, выбрав δ_1 и δ_2 таким образом, чтобы первое и второе слагаемые правой части (2.2.27) имели одинаковые знаки, получим

$$\begin{aligned} |\varphi_{2m+1}| &\underset{n,m}{\gtrsim} \frac{M(|g|+h)}{\operatorname{tg}^{2m+1} \alpha} - \frac{Mb \sin \alpha}{\sin \beta \operatorname{tg}^{2m} \alpha} \underset{n,m}{\gtrsim} \\ &\underset{n,m}{\gtrsim} \frac{Mb(|g|+h)}{h \operatorname{tg}^{2m} \alpha} - \frac{Mb \sin \alpha}{\sin \beta \operatorname{tg}^{2m} \alpha} \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{Mb(|g|+h)}{h \operatorname{tg}^{2m} \alpha}. \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

Из (2.2.25) и (2.2.28) следует, что найдется $s_0 \geq 2m+1$ такое, что

$$\left| \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-s_0} \partial y^{s_0}} \right| = \left| \frac{\partial^n (f^*(a_1) - P_n(a_1))}{\partial x^{n-s_0} \partial y^{s_0}} \right| \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{Mb(|g|+h)}{h \operatorname{tg}^{s_0-1} \alpha}. \quad (2.2.29)$$

С учетом (2.2.4) получаем оценку

$$\left| \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-s_0} \partial y^{s_0}} \right| \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{MH}{\sin \beta \operatorname{tg}^{s_0-1} \alpha}. \quad (2.2.30)$$

Рассмотрим случай, когда $s_0 \geq 2$ (это выполнено всегда для $m \neq 0$). Напомним, что $e(x, y)$ является многочленом. Более того, в силу (2.2.14) и того, что $s_0 \geq 2$, на всем треугольнике Δ имеет место тождество

$$\frac{\partial^n e(x, y)}{\partial x^{n-s_0} \partial y^{s_0}} \equiv \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-s_0} \partial y^{s_0}}. \quad (2.2.31)$$

Рассмотрим $\partial^n e(x, y) / (\partial x^{n-s_0} \partial y^{s_0})$ на отрезке, соединяющем точки $(-a/2, h/2)$ и $(b/2, h/2)$. Согласно неравенству Маркова [11, §3.5], примененному $(n - s_0)$ раз, на этом отрезке найдутся точки $(\theta_k, h/2)$, $k = 0, \dots, n - s_0 - 1$, $-a/2 \leq \theta_k \leq b/2$, такие что

$$\left| \frac{\partial^{k+s_0} e(\theta_k, h/2)}{\partial x^k \partial y^{s_0}} \right| \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{MH^{n+1-(k+s_0)}}{\sin \beta \operatorname{tg}^{s_0-1} \alpha}, \quad k = 0, \dots, n - s_0 - 1.$$

Рассмотрим теперь $\partial^{k+s_0}e(x, y)/(\partial x^k \partial y^{s_0})$, $k = 0, \dots, n - s_0$, на отрезке, соединяющем $(\theta_k, 0)$ и $(\theta_k, h/2)$. Применим $(s_0 - 1)$ раз неравенство Маркова. Тогда на таком отрезке найдутся точки (θ_k, ϑ_j) , $j = 1, \dots, s_0$, $0 \leq \vartheta_j \leq h/2$, такие что

$$\left| \frac{\partial^{k+j}e(\theta_k, \vartheta_j)}{\partial x^k \partial y^j} \right| \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{MH^{n+1-(k+j)}}{\sin \beta \operatorname{tg}^{j-1} \alpha}, \quad j = 1, \dots, s_0 - 1, \quad k = 0, \dots, n - s_0. \quad (2.2.32)$$

Если $s_0 = 1$ (это означает, что $m = 0$), то достаточно рассмотреть (2.2.30) и применить $(n - 1)$ раз неравенство Маркова на отрезке, соединяющем точки a_2 и a_1 . Лемма 2.2.2 доказана. \square

Лемма 2.2.3. *Если $m \geq 1$ и выполнены условия (2.2.3), (2.2.4), (2.2.5), (2.2.8), то имеют место оценки (2.2.9), (2.2.10), (2.2.11).*

Доказательство. В ходе доказательства леммы 2.2.1 для некоторого $s_0 \geq 2m + 1$ были получены оценки (2.2.29). Принимая во внимание (2.2.31), мы можем утверждать, что оценка (2.2.29) имеет место во всех точках треугольника Δ , в том числе в точке a_2 . Пусть точная оценка для $|\partial^n e(a_2)/(\partial x^{n-s_0} \partial y^{s_0})|$ имеет вид

$$\left| \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_0} \partial y^{s_0}} \right| \geq \frac{Mb(|g| + h)K_{s_0}(\alpha, \beta)}{h \operatorname{tg}^{s_0-1} \alpha}, \quad (2.2.33)$$

где $K_{s_0}(\alpha, \beta) \underset{n,m}{\gtrsim} 1$ (в частности, допускается $K_{s_0}(\alpha, \beta) \rightarrow +\infty$ при $\alpha \rightarrow 0$). Пусть $\{m + 1, \dots, 2m\} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$, где $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \emptyset$, и множества \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 характеризуются тем, что

$$\left| \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} \right| \underset{n,m}{\lesssim} \frac{Mb(|g| + h)}{h \operatorname{tg}^{i-1} \alpha}, \quad i \in \mathcal{I}_1; \quad (2.2.34)$$

$$\left| \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} \right| \geq \frac{Mb(|g| + h)K_i(\alpha, \beta)}{h \operatorname{tg}^{i-1} \alpha}, \quad i \in \mathcal{I}_2, \quad (2.2.35)$$

где $K_i(\alpha, \beta) \rightarrow +\infty$ при $\alpha \rightarrow 0$ (при фиксированных n, m). Пусть все оценки в (2.2.35) являются точными. Если $\mathcal{I}_2 \neq \emptyset$, то будем считать, что

среди функций $K_i(\alpha, \beta)$ из правых частей неравенств (2.2.35) можно выбрать наиболее быстро растущую при $\alpha \rightarrow 0$, точнее, можно выбрать $i_0 \in \mathcal{I}_2$ такое, что

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0} \frac{K_i(\alpha, \beta)}{K_{i_0}(\alpha, \beta)} \underset{n,m}{\lesssim} 1 \text{ для всех } i \in \mathcal{I}_2 \quad (2.2.36)$$

(если (2.2.36) не выполнено при выбранном i_0 для всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$, то предел в (2.2.36) будем рассматривать как предел по некоторому множеству $X_{i_0} \subset (0, \alpha_0)$, на котором (2.2.36) выполняется; так как количество индексов $i_0 \in \mathcal{I}_2$ и соответствующих множеств X_{i_0} является конечным, причем объединение всех таких X_{i_0} равно $(0, \alpha_0)$, сможем провести дальнейшее доказательство для каждого из таких i_0 и X_{i_0} ; аналогично поступаем, если (2.2.34)–(2.2.35) выполнено не для всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$). Тогда в силу (2.2.25) найдется $s \in \{2m + 2, \dots, n\}$, для которого имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s} \partial y^s} \right| \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{Mb(|g| + h)K_{i_0}(\alpha, \beta) \operatorname{tg}^{i_0} \alpha}{h \operatorname{tg}^{i_0-1} \alpha \operatorname{tg}^s \alpha} = \frac{Mb(|g| + h)K_{i_0}(\alpha, \beta)}{h \operatorname{tg}^{s-1} \alpha}, \quad (2.2.37)$$

поскольку при условиях (2.2.35) оценки (2.2.26) приводят к неравенствам

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i_0} \partial y^{i_0}} - \varphi_{i_0} \right| \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{Mb(|g| + h)K_{i_0}(\alpha, \beta)}{h \operatorname{tg}^{i_0-1} \alpha} - \frac{M(|g| + h)}{\operatorname{tg}^{i_0} \alpha} = \\ & = \frac{Mb(|g| + h)K_{i_0}(\alpha, \beta)}{h \operatorname{tg}^{i_0-1} \alpha} - \frac{Mb(|g| + h)}{h \operatorname{tg}^{i_0-1} \alpha} \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{Mb(|g| + h)K_{i_0}(\alpha, \beta)}{h \operatorname{tg}^{i_0-1} \alpha}. \end{aligned}$$

Если (2.2.37) имеет место для некоторого $s \geq 3m + 2$, то лемма доказана, поскольку остается лишь нужное число раз применить неравенство Маркова, как это было сделано при доказательстве леммы 2.2.2.

Остается рассмотреть случай, когда для любого s , для которого выполнено (2.2.37), имеет место неравенство $s \leq 3m + 1$. В силу выбора i_0 и неравенств (2.2.33)–(2.2.35), (2.2.37) найдется s^* , $2m + 1 \leq s^* \leq 3m + 1$,

для которого

$$\left| \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} / \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_*} \partial y^{s_*}} \right|_{n,m} \lesssim (\operatorname{tg} \alpha)^{s_*-i}, \quad i = m+1, \dots, s_*-1 \quad (2.2.38)$$

и

$$\left| \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_*} \partial y^{s_*}} \right|_{n,m} \gtrsim \frac{Mb(|g|+h)}{h \operatorname{tg}^{s_*-1}} \gtrsim \frac{Mb(a+h)}{h \operatorname{tg}^{s_*-1}} \gtrsim \frac{MH}{\sin \beta (\operatorname{tg} \alpha)^{s_*-1}} \quad (2.2.39)$$

(если $\mathcal{I}_2 = \emptyset$, то $s_* = 2m+1$).

Положим

$$m_* = \begin{cases} m, & \text{если } s_* \leq 3m, \\ m-1, & \text{если } s_* = 3m+1 \end{cases}$$

(если $s_* = 3m+1$, оценки (2.2.9) достаточно доказать для m производных $\partial^n e(a_2) / (\partial x^{n-s_i} \partial y^{s_i})$, $s_i \geq s_*+1$, $i = 1, \dots, m$).

Составим систему линейных уравнений, аналогичную (2.2.21). Пусть для определенности нормаль n_{23} образует острый угол с осью Oy . Тогда $\tau_{23} = (\cos \beta, \sin \beta)$, $n_{23} = (-\sin \beta, \cos \beta)$. Рассмотрим сужения $\partial^j e(x, y) / (\partial n_{23}^j)$, $j = 0, \dots, m$, на отрезок $[a_2, a_3]$. Как и при доказательстве леммы 2.2.2, используя условие (2.2.1) и вид функции f^* , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial \tau_{23}^{n-j} \partial n_{23}^j} = \\ & = \frac{(-1)^j M a \cos^n \beta}{(n+1-j)!} \omega_{23, n+1-j}^{(n-j)}(0) (\delta_1 \operatorname{tg}^j \beta + \delta_2 (n+1-j) \operatorname{tg}^{j+1} \beta - \delta_2 j \operatorname{tg}^{j-1} \beta). \end{aligned}$$

Тогда для $k = 0, \dots, m$ имеют место равенства

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial \tau_{23}^{n-k} \partial y^k} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial \tau_{23}^{n-j} \partial n_{23}^j} \sin^{k-j} \beta \cos^j \beta = M a \mu_k \sin^k \beta \cos^n \beta, \quad (2.2.40)$$

где

$$\mu_k = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{(n+1-j)!} \binom{k}{j} \omega_{23, n+1-j}^{(n-j)}(0) \left(\delta_1 + \delta_2 (n+1-j) \operatorname{tg} \beta - \frac{\delta_2 j}{\operatorname{tg} \beta} \right).$$

Так как $\omega_{23,n+1-j}^{(n-j)}(0) = (-1)^{n-j}\omega_{32,n+1-j}^{(n-j)}(1)$, то с учетом (2.2.3) будет

$$|\mu_0| \underset{n,m}{\lesssim} 1 + \operatorname{tg} \beta; \quad |\mu_k| \underset{n,m}{\lesssim} \operatorname{tg} \beta + 1/\operatorname{tg} \beta, \quad k = 1, \dots, m.$$

Аналогично (2.2.18)–(2.2.20) получаем

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial \tau_{23}^{n-k} \partial y^k} = \frac{\cos^n \beta}{\sin^k \beta} \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k} \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} \operatorname{tg}^i \beta; \quad (2.2.41)$$

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^n} = \frac{M\delta_1}{(n+1)!} (a+b)\omega_{21,n+1}^{(n)}(0); \quad (2.2.42)$$

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-1} \partial y} = \frac{M\delta_2}{n!} (a+b)\omega_{21,n}^{(n-1)}(0); \quad (2.2.43)$$

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = 0, \quad i = 2, \dots, m. \quad (2.2.44)$$

Объединяя (2.2.40)–(2.2.44) и отбрасывая при необходимости одно уравнение, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=s_*+1}^n \binom{n-k}{i-k} \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} \operatorname{tg}^i \beta = - \sum_{i=m+1}^{s_*} \binom{n-k}{i-k} \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} \operatorname{tg}^i \beta + \tilde{\mu}_k, \quad (2.2.45)$$

$$k = 0, \dots, m_*,$$

где

$$|\tilde{\mu}_k| \underset{n,m}{\lesssim} M a \sin^{2k} \beta (\operatorname{tg} \beta + 1/\operatorname{tg} \beta) \lesssim MH, \quad k = 2, \dots, m_*; \quad (2.2.46)$$

$$|\tilde{\mu}_0| = \left| -\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^n} - n \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-1} \partial y} \operatorname{tg} \beta + M a \mu_0 \right| \underset{n,m}{\lesssim} MH(1 + \operatorname{tg} \beta); \quad (2.2.47)$$

$$|\tilde{\mu}_1| \lesssim \left| -\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-1} \partial y} \operatorname{tg} \beta \right| + \left| M a (\operatorname{tg} \beta + 1/\operatorname{tg} \beta) \sin^2 \beta \right| \underset{n,m}{\lesssim} MH \operatorname{tg} \beta. \quad (2.2.48)$$

Наличие системы (2.2.45) вместе с (2.2.38) и выписанными оценками для $\tilde{\mu}_k$, $k = 0, \dots, m_*$ означает, что найдутся натуральные числа s_1, \dots, s_{m_*} , $s_i \geq s_* + 1$ для $i = 1, \dots, m_*$ такие, что для них имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_i} \partial y^{s_i}} \right| \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{MH}{\sin \beta (\operatorname{tg} \beta)^{s_i-s_*} (\operatorname{tg} \alpha)^{s_*-1}}. \quad (2.2.49)$$

Докажем от противного.

Пусть (2.2.49) имеет место для s_1, \dots, s_k , $k < m_*$, $s_i \geq s_* + 1$ для $i = 1, \dots, k$, и других таких s_i нет. Выберем произвольным образом $s_{k+1}, \dots, s_{m_*} \in \{s_* + 1, \dots, n\} \setminus \{s_1, \dots, s_k\}$. Для простоты, не ограничивая общности, будем считать, что $s_1 < s_2 < \dots < s_{m_*}$. Обозначим $\mathcal{J} = \{s_1, \dots, s_{m_*}\}$, $\mathcal{S} = \{s_* + 1, \dots, n\} \setminus \mathcal{J}$. Разрешим систему (2.2.45) относительно $\partial^n e(a_2) / (\partial x^{n-i} \partial y^i)$, $i \in \mathcal{J}$, по формулам Крамера:

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = \frac{\mathfrak{D}_i}{\mathfrak{D}}, \quad i \in \mathcal{J}.$$

Основной определитель \mathfrak{D} этой системы — это $\mathfrak{D}_n(s_1, \dots, s_{m_*})$, у которого каждый столбец умножен на $\operatorname{tg}^{s_i} \beta$, где i — номер столбца; \mathfrak{D}_i — определитель, получающийся в результате замены i -го столбца \mathfrak{D} на столбец правых частей (2.2.45). Таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = \\ & = (\operatorname{tg} \beta)^{-i} \left(\sum_{s=m+1}^{s_*} \nu_{is} \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s} \partial y^s} \operatorname{tg}^s \beta + \sum_{s \in \mathcal{S}} \nu_{is} \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s} \partial y^s} \operatorname{tg}^s \beta + \sum_{k=0}^m \nu_{ik} \tilde{\mu}_k \right), \\ & \quad i \in \mathcal{J}, \end{aligned}$$

где коэффициенты ν_{is} могут зависеть только от n и m , причем

$$\nu_{is_*} = \pm \frac{\mathfrak{D}_n(s_*, s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_{m_*})}{\mathfrak{D}_n(s_1, \dots, s_{m_*})} \neq 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = R_i + (\operatorname{tg} \beta)^{-i} \sum_{s \in \mathcal{S}} \nu_{is} \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s} \partial y^s} \operatorname{tg}^s \beta, \quad i \in \mathcal{J}, \quad (2.2.50)$$

где

$$\begin{aligned} R_i &= \nu_{is_*} \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_*} \partial y^{s_*}} (\operatorname{tg} \beta)^{s_*-i} \times \\ & \times \left(1 + \sum_{s=m+1}^{s_*-1} \frac{\nu_{is}}{\nu_{is_*}} \left(\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s} \partial y^s} / \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_*} \partial y^{s_*}} \right) (\operatorname{tg} \beta)^{s-s_*} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=0}^m \left(\frac{\nu_{ik}}{\nu_{is_*}} \frac{\tilde{\mu}_k}{\operatorname{tg}^{s_*} \beta} / \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_*} \partial y^{s_*}} \right).$$

Применяя (2.2.38), (2.2.39), (2.2.46), (2.2.47), (2.2.48) и (2.2.8) придем к неравенству

$$\begin{aligned} |R_i| &\underset{n,m}{\gtrsim} \\ &\underset{n,m}{\gtrsim} \left| \frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_*} \partial y^{s_*}} \right| (\operatorname{tg} \beta)^{s_*-i} \left(1 - \sum_{s=m+1}^{s_*-1} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \right)^{s_*-s} - \frac{(1 + \operatorname{tg} \beta) \sin \beta \operatorname{tg}^{s_*-1} \alpha}{\operatorname{tg}^{s_*} \beta} \right) \underset{n,m}{\gtrsim} \\ &\underset{n,m}{\gtrsim} \frac{MH}{\sin \beta (\operatorname{tg} \beta)^{i-s_*} (\operatorname{tg} \alpha)^{s_*-1}} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} - \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \right)^{s_*-1} (\cos \beta + \sin \beta) \right) \underset{n,m}{\gtrsim} \\ &\underset{n,m}{\gtrsim} \frac{MH}{\sin \beta (\operatorname{tg} \beta)^{i-s_*} (\operatorname{tg} \alpha)^{s_*-1}}. \end{aligned} \quad (2.2.51)$$

Таким образом, (2.2.50) и (2.2.51) приводят к искомому противоречию: должно быть не менее m_* индексов s_1, \dots, s_{m_*} , для которых должно иметь место (2.2.49).

Для доказательства оценок (2.2.9)–(2.2.11) остается применить теорему Маркова, как это было сделано в лемме 2.2.2. Лемма 2.2.3 и теорема 2.2.1 доказаны. \square

Замечание 2.2.1. *Оценки (0.0.10) неулучшаемы при $s = 1, \dots, 2m + 1$, $k = s, \dots, s + 2m$. Более того, утверждение теоремы 2.2.1 означает, что оценки (0.0.10) и соответствующий им выбор условий интерполяции (0.0.5)–(0.0.6), (0.0.9) являются экстремальными (наилучшими из возможных), если речь идет о получении локального сплайна с гладкостью порядка m .*

Отметим, что ранее неулучшаемость оценок (0.0.10) для части производных была доказана в [34], а замечание 2.2.1 несколько расширяет множество производных, для которых имеет место неулучшаемость оценок.

Доказательство следует из (2.2.30) и (2.2.32). \square

Замечание 2.2.2. Оценки (2.2.6) неумлучшаемы при $n = 4t + 1$, $s = 1, \dots, 2t + 1$.

Доказательство следует из (0.0.10).

Замечание 2.2.3. Условие (2.2.3) означает, что выбор узлов интерполяции не должен зависеть от параметров a, h, b треугольника, т. е. величина $\left| \omega_{kl, n+1-j}^{(n-j)}(1) \right|$ не должна быстро возрастать при $\alpha \rightarrow 0$.

Замечание 2.2.4. Условие (2.2.4) не является слишком обременительным, как это может показаться, и выполнено почти всегда, когда выбор узлов интерполяции (а значит, любой соответствующий узлам интерполяции многочлен $\omega_{kl, n+1}$) не зависит от a, b . Обычно на всех сторонах всех треугольников триангуляции условия интерполяции задаются таким образом, что $\omega_{kl, n+1-j}(x)$ не зависит от k и l при любом $j = 0, \dots, t$, т. е.

$$\omega_{kl, n+1-j}(x) = \omega_{pq, n+1-j}(x) \quad (2.2.52)$$

для любых k, l, p, q и $j = 0, \dots, t$. Поскольку оценки, как правило, получают на множестве всех возможных триангуляций, то (2.2.52) для любых k и l влечет

$$\omega_{kl, n+1-j}(x) = (-1)^{n+1-j} \omega_{kl, n+1-j}(1-x).$$

В этом случае $\omega_{kl, n+1}^{(n)}(x) = (-1)^{n+1+n} \omega_{kl, n+1}^{(n)}(1-x)$, т. е.

$$\omega_{kl, n+1}^{(n)}(1) = -\omega_{kl, n+1}^{(n)}(0). \quad (2.2.53)$$

Так как по условию теоремы старший коэффициент многочлена $\omega_{kl, n+1}(x)$ равен единице, т. е. $\omega_{kl, n+1}^{(n)}(x)$ является линейной функцией с ненулевым угловым коэффициентом, то (2.2.53) означает, что $\omega_{kl, n+1}^{(n)}(1) \neq 0$, и тогда с учетом (2.2.52) получаем

$$g = b\omega_{31, n+1}^{(n)}(1) - (a+b)\omega_{21, n+1}^{(n)}(1) = -a\omega_{31, n+1}^{(n)}(1).$$

Например, условиям (0.0.5)–(0.0.6) соответствует

$$\omega_{kl,4m+2-j}(x) = x^{2m+1-j}(x-1)^{2m+1-j} \prod_{k=1}^j \left(x - \frac{k}{j+1} \right), \quad (2.2.54)$$

$$k, l \in \{1, 2, 3\}, \quad k \neq l; \quad j = 0, \dots, m,$$

что означает, что данные условия интерполяции удовлетворяют требованию (2.2.52) и, следовательно, (2.2.4).

Замечание 2.2.5. Условие (2.2.5) также не является обременительным. В частности, если известно, что угол β отделен от $\pi/2$ (тогда $a \gtrsim h$), то это условие может быть исключено из условий теоремы. Это можно увидеть, если доказательство теоремы 2.2.1 повторить при исключенном условии (2.2.5) и добавленном условии $a \gtrsim h$. При этом для простоты лучше в (2.2.14) положить $\delta_2 = 0$.

Если $\beta \rightarrow \pi/2$ при $\alpha \rightarrow 0$, то, например, при выполненном условии (2.2.52) второе слагаемое в (2.2.2) равно нулю, и тогда для того, чтобы имело место (2.2.5), достаточно в силу леммы 2.2.1 потребовать

$$\left| n \left(1 + \frac{a}{b} \right) \omega_{21,n}^{(n-1)}(1) - \omega_{31,n+1}^{(n)}(1) \right| \gtrsim_{n,m} 1.$$

В частности, для интерполяционных условий (0.0.5)–(0.0.6), удовлетворяющих (2.2.54) и приводящих к соответствующему виду функций $\omega_{kl,n+1-j}$, последняя оценка имеет место, если $|b - na| \gtrsim b$, а это условие выполняется в силу того, что $\beta \rightarrow \pi/2$ при $\alpha \rightarrow 0$ (n фиксировано по условию теоремы 2.2.1), т. е. $na/b \lesssim h/b \rightarrow 0$.

Замечание 2.2.6. Так как α — наименьший угол треугольника, то $\sin \alpha \lesssim \operatorname{tg} \alpha \lesssim \sin \alpha$, поэтому во всех оценках вместо $\sin \alpha$ можно писать $\operatorname{tg} \alpha$. В то же время $\operatorname{tg} \beta$ нельзя заменить на $\sin \beta$, так как если, например, треугольник Δ — равнобедренный при $\beta = \gamma$, то $\sin \alpha \lesssim \cos \beta \lesssim \sin \alpha$, т. е. $1/\operatorname{tg} \beta \rightarrow 0$, в то время как $1/\sin \beta \gtrsim 1$.

Замечание 2.2.7. *Оценки (2.2.7) (а также, возможно, часть оценок (2.2.6)) и (2.2.9)–(2.2.11) выписаны для производных одного и того же порядка, и выбирать можно ту, у которой правая часть больше для конкретного треугольника.*

§ 2.3. Оценки сверху для составного конечного элемента

Пусть Δ — треугольник с вершинами a_1, a_2, a_3 из триангуляции области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; $f \in W^4M(\Omega)$; b_1, b_2, b_3 — середины сторон a_2a_3, a_1a_3, a_1a_2 соответственно; α, β, γ — углы при вершинах a_1, a_2, a_3 ; $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$. Для определенности будем считать, что если нормаль n_{ij} приложена к середине стороны $a_i a_j$, то она направлена внутрь треугольника Δ (пересечение Δ и соответствующего направленного отрезка не пусто). Данное предположение не ограничивает общности результатов.

Пусть Δ является частным случаем треугольника Сие–Клафа–Точера, т. е. порождает составной конечный элемент, который строится следующим образом. Треугольник Δ разбивается на три треугольника Δ_i с вершинами a_0, a_{i+1}, a_{i+2} , $1 \leq i \leq 3$ (считаем, что $a_4 = a_1, a_5 = a_2$), где точка a_0 является точкой пересечения биссектрис внутренних углов треугольника Δ . В качестве аппроксиманта функции f на Δ используется гладкая (т. е. из класса $C^1(\Delta)$) кусочно полиномиальная функция S_3 , которая на каждом Δ_i , $1 \leq i \leq 3$, является многочленом третьей степени (по совокупности переменных) $P_{3,i}$, для задания которого требуется 10 параметров. Таким образом, для определения S_3 требуется 30 условий. Напомним, что требование $S_3 \in C^1(\Delta)$ дает 18 условий — это условия непрерывности функции S_3 и ее производных первого порядка по двум несовпадающим направлениям в точке a_0 (всего 6 условий) и в точках a_1, a_2, a_3 (9 условий), а также условие непрерывности нормальных производных при переходе через середины отрезков $a_0 a_i$ (3 условия). Кроме

того, мы требуем, чтобы функция S_3 интерполировала значения функции f и ее производных первого порядка по двум различным направлениям в точках a_1, a_2, a_3 (9 условий) и производные первого порядка по направлениям n_{23}, n_{13}, n_{12} в точках b_1, b_2, b_3 соответственно (3 условия). Доказательство существования такого конечного элемента приведено в [22]. Если все элементы из рассматриваемой триангуляции соответствуют приведенному описанию, то результирующая кусочно-полиномиальная функция принадлежит классу $C^1(\Omega)$.

Теорема 2.3.1. *Имеют место следующие оценки:*

$$\mathcal{E}_{3,s} = \mathcal{E}_{3,s}(\Delta, S_3) \lesssim \begin{cases} MH^4, & \text{если } s = 0, \\ MH^3 \sin^{-1} \beta, & \text{если } s = 1, \\ MH^{4-s} \sin^{-(s-1)} \beta \sin^{-1} \alpha, & \text{если } s = 2, 3. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Доказательство. Везде далее будем принимать во внимание следующие неравенства:

$$1 \lesssim \sin(\gamma/2) \lesssim 1, \quad (2.3.2)$$

$$\sin \beta \lesssim \sin(\beta/2) \lesssim \sin \beta, \quad (2.3.3)$$

$$\sin \alpha \lesssim \sin(\alpha/2) \lesssim \sin \alpha, \quad (2.3.4)$$

$$\sin \beta \lesssim \sin \gamma \lesssim \sin \beta, \quad (2.3.5)$$

$$\sin \gamma \lesssim \cos(\gamma/2) \lesssim \sin \gamma \quad (2.3.6)$$

(последнее соотношение выполняется в силу (2.3.2) и того, что $\cos(\gamma/2) = \sin \gamma / (2 \sin(\gamma/2))$).

Рассмотрим матрицу

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^3 \frac{\gamma}{2} & 3 \cos \frac{\gamma}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} & -\sin^3 \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \gamma & -\sin \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ \sin^3 \frac{\beta}{2} & 0 & 0 & -3 \cos \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} & -\sin^3 \frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \beta & \sin \beta \sin^2 \frac{\beta}{2} \\ 0 & -\sin \beta \sin \frac{\alpha}{2} & 0 & \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.3.1. *Имеет место соотношение*

$$\det A \gtrsim \sin \alpha \sin^7 \beta.$$

Доказательство. Рассмотрим $\det A$. Вынесем из первой и второй строк множители $\sin^2(\gamma/2)$, из третьей и четвертой — множители $\sin^2(\beta/2)$, из пятой — множитель $\sin \beta \sin(\alpha/2)$. Тогда

$$\det A = \sin^4 \frac{\gamma}{2} \sin^4 \frac{\beta}{2} \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \sin \frac{\gamma}{2} & 3 \cos \frac{\gamma}{2} & -\sin \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma + 4 \cos^2 \frac{\gamma}{2} & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \frac{\beta}{2} & 0 & 0 & -3 \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta + 4 \cos^2 \frac{\beta}{2} & \sin \beta \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Элементы первой строки получившегося определителя умножим на $2 \cos(\gamma/2)$, элементы третьей — на $2 \cos(\beta/2)$. Соответственно изменим множитель перед определителем, результатом чего будет равенство

$$\det A = \frac{\sin^4 \frac{\gamma}{2} \sin^4 \frac{\beta}{2} \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2}}{4 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\beta}{2}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \sin \gamma & 6 \cos^2 \frac{\gamma}{2} & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma + 4 \cos^2 \frac{\gamma}{2} & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & 0 & -6 \cos^2 \frac{\beta}{2} & -\sin \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta + 4 \cos^2 \frac{\beta}{2} & \sin \beta \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Из элементов первой строки вычтем соответствующие элементы второй строки, к элементам третьей строки прибавим элементы четвертой:

$$\det A = \frac{\sin^4 \frac{\gamma}{2} \sin^4 \frac{\beta}{2} \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2}}{4 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\beta}{2}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \sin \theta & 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \cos \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma + 4 \cos^2 \frac{\gamma}{2} & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & 0 & \cos \beta - 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta + 4 \cos^2 \frac{\beta}{2} & \sin \beta \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель последовательно разложим по пятому и третьему столбцам и учтем соотношения (2.3.2)–(2.3.6) и равенство $2 \cos^2(\gamma/2) - \cos \gamma = -(\cos \beta - 2 \cos^2(\beta/2)) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \det A &= -\frac{\sin^4 \frac{\gamma}{2} \sin^4 \frac{\beta}{2} \sin^2 \beta \sin \gamma \sin \frac{\alpha}{2}}{4 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\beta}{2}} \begin{vmatrix} \sin \gamma & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\sin^4 \frac{\gamma}{2} \sin^4 \frac{\beta}{2} \sin^2 \beta \sin \gamma \sin \frac{\alpha}{2}}{4 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\beta}{2}} (\sin \beta + \sin \gamma) \gtrsim \sin \alpha \sin^7 \beta. \end{aligned}$$

Лемма 2.3.1 доказана. \square

Обозначим через A_{ij} алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A .

Лемма 2.3.2. *Для любых $j = \overline{1, 5}$ имеют место соотношения*

$$|A_{ij}| \lesssim \begin{cases} \sin \alpha \sin^{7+\delta(j)} \beta, & \text{если } i = 1, \\ \sin \alpha \sin^{6+\delta(j)} \beta, & \text{если } i = 2, \\ \sin \alpha \sin^{4+\delta(j)} \beta, & \text{если } i = 3, 4, \\ \sin^{5+\delta(j)} \beta, & \text{если } i = 5, \end{cases} \quad (2.3.7)$$

где

$$\delta(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } j \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Доказательство. Запишем элемент a_{12} матрицы A в виде $(3/2) \sin(\gamma/2) \sin \gamma$. Рассмотрим для примера A_{23} и A_{45} .

Разложим минор, соответствующий A_{23} , по последней строке:

$$A_{23} = -\sin \alpha \sin \beta \begin{vmatrix} \sin^3 \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ \sin^3 \frac{\beta}{2} & -3 \cos \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} & -\sin^3 \beta \\ 0 & \sin^2 \beta + \cos \beta \sin^2 \beta & \sin \beta \sin^2 \frac{\beta}{2} \end{vmatrix} -$$

$$-\sin \alpha \sin \beta \begin{vmatrix} \sin^3 \frac{\gamma}{2} & \frac{3}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \gamma & 0 \\ \sin^3 \frac{\beta}{2} & 0 & \sin^3 \frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & \sin \beta \sin^2 \frac{\beta}{2} \end{vmatrix}.$$

Вычисляя и оценивая полученные определители, приходим к неравенству

$$|A_{23}| \lesssim \sin \alpha \sin^6 \beta + \sin \alpha \sin^8 \beta \lesssim \sin \alpha \sin^6 \beta.$$

Минор, соответствующий A_{45} , разложим по первому столбцу:

$$A_{45} = -\sin^3 \frac{\gamma}{2} \begin{vmatrix} \cos \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \gamma & -\sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & -3 \cos \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \\ -\sin \beta \sin \frac{\alpha}{2} & 0 & \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2} \end{vmatrix} -$$

$$-\sin^3 \frac{\beta}{2} \begin{vmatrix} \frac{3}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \gamma & -\sin^3 \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \cos \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \gamma & -\sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin \gamma & 0 \\ -\sin \beta \sin \frac{\alpha}{2} & 0 & \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2} \end{vmatrix}.$$

Вычисляя и оценивая определители, получаем неравенство

$$|A_{45}| \lesssim \sin \alpha \sin^4 \beta.$$

Для прочих i, j оценки (2.3.7) получаются аналогично. Лемма 2.3.2 доказана. \square

Рассмотрим многочлены $P_{3,i}$, $1 \leq i \leq 3$, являющиеся сужением S_3 на Δ_i . На каждом треугольнике Δ_i , $1 \leq i \leq 3$, введем прямоугольную систему координат $O_i x_i y_i$ таким образом, чтобы оси $O_1 x_1$, $O_2 x_2$, $O_3 x_3$, $O_1 y_1$, $O_2 y_2$, $O_3 y_3$, были сонаправлены с векторами $\tau_{32}, \tau_{13}, \tau_{21}$, n_{32}, n_{13}, n_{21} соответственно (см. рисунок 2.3.1). Положение точек O_i , $1 \leq i \leq 3$, не

имеет значения. Далее для удобства обозначений совместим O_1 и O_2 с a_3 , O_3 — с a_2 . Пусть

$$e_i(x_i, y_i) = f(x_i, y_i) - P_{3,i}(x_i, y_i).$$

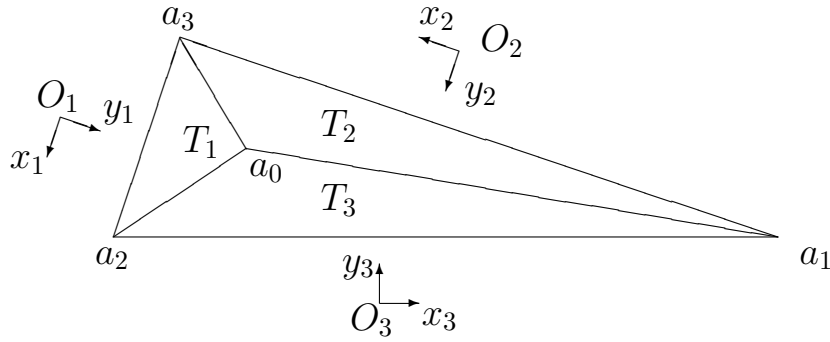


Рис. 2.3.1. Элемент Сие–Клафа–Точера

Далее нам потребуются координаты некоторых векторов τ_{jk} в системах координат $O_i x_i y_i$; эти данные см. в следующей таблице:

$O_1 x_1 y_1$	$O_2 x_2 y_2$	$O_3 x_3 y_3$
$\tau_{30} = \left(\cos \frac{\gamma}{2}, \sin \frac{\gamma}{2} \right)$	$\tau_{30} = \left(-\cos \frac{\gamma}{2}, \sin \frac{\gamma}{2} \right)$	$\tau_{20} = \left(\cos \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\beta}{2} \right)$
$\tau_{32} = (1, 0)$	$\tau_{32} = (-\cos \gamma, \sin \gamma)$	$\tau_{32} = (-\cos \beta, -\sin \beta)$
$\tau_{20} = \left(-\cos \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\beta}{2} \right)$	$\tau_{10} = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \right)$	$\tau_{10} = \left(-\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \right)$

Согласно определению рассматриваемого элемента Сие–Клафа–Точера каждый многочлен $P_{3,i}$, $1 \leq i \leq 3$, удовлетворяет следующим условиям интерполяции (напомним, что мы считаем $a_4 = a_1$, $a_5 = a_2$):

$$P_{3,i}(a_j) = f(a_j), \quad \frac{\partial P_{3,i}(a_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(a_j)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial P_{3,i}(a_j)}{\partial y_i} = \frac{\partial f(a_j)}{\partial y_i}, \quad (2.3.8)$$

$$j = i + 1, i + 2; \\ \frac{\partial P_{3,i}(b_i)}{\partial y_i} = \frac{\partial f(b_i)}{\partial y_i}. \quad (2.3.9)$$

Рассмотрим треугольник Δ_i и соответствующую систему координат $O_i x_i y_i$ ($1 \leq i \leq 3$). Поскольку для любого $\xi = (\cos \theta, \sin \theta)$, где θ — угол между вектором ξ и осью $O_i x_i$, имеет место $\partial/\partial \xi = (\partial/\partial x_i) \cos \theta + (\partial/\partial y_i) \sin \theta$, для доказательства (2.3.1) достаточно для каждого $e_i(x_i, y_i)$ получить оценки производных по переменным x_i, y_i .

Используя на каждом Δ_i для e_i формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши в системе координат $O_i x_i y_i$, получим разложение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n e_i(x_i, y_i)}{\partial x_i^{n-s} \partial y_i^s} &= \sum_{j=s}^{3-n+s} \frac{1}{(j-s)!} y_i^{j-s} \sum_{k=0}^{3-n+s-j} \frac{\partial^{n-s+j+k} e_i(0,0)}{\partial x_i^{n-s+k} \partial y_i^j} \frac{x_i^k}{k!} + \\ &+ \sum_{j=s}^{3-n+s} \frac{1}{(j-s)!} y_i^{j-s} \int_0^{x_i} \frac{(x_i-v)^{3-n+s-j}}{(3-n+s-j)!} \frac{\partial^4 f(v,0)}{\partial v^{4-j} \partial y_i^j} dv + \\ &+ \int_0^{y_i} \frac{(y_i-t)^{3-n}}{(3-n)!} \frac{\partial^4 f(x_i,t)}{\partial x_i^{n-s} \partial t^{4-n+s}} dt. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Чтобы доказать (2.3.1), достаточно оценить $\partial^{j+k} e_i(0,0)/\left(\partial x_i^j \partial y_i^k\right)$, $1 \leq i \leq 3$, $0 \leq j+k \leq 3$. Договоримся использовать обозначение

$$e_i^{(jk)} = \frac{\partial^{j+k} e_i(0,0)}{\partial x_i^j \partial y_i^k},$$

где при исследовании e_i под $(0,0)$ понимается точка O_i .

Лемма 2.3.3. *Для любых $j = \overline{0,2}$ и $1 \leq i \leq 3$ имеют место оценки*

$$\left| \frac{\partial^2 e_i(0,0)}{\partial x_i^{2-j} \partial y_i^j} \right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin^j \beta}. \quad (2.3.11)$$

Доказательство. При любом i и $j = 0, 1$ справедливость формулы (2.3.11) вытекает из условий интерполяции (2.3.8) и (2.3.9). Более того, из условий (2.3.8) и (2.3.9) получаем оценки

$$\left| e_i^{(jk)} \right| \lesssim M d_{(i+1)(i+2)}^{4-(j+k)}, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad k = 0, 1, \quad 0 \leq j+k \leq 3. \quad (2.3.12)$$

Остается доказать (2.3.11) для $j = 2$.

Условие $S_3 \in C^1(T)$ в сочетании с тем, что

$$\frac{\partial^2 e_1(a_2)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{20}} = \frac{\partial^2 e_1(a_3)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{20}} + \frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{20} \partial x_1} d_{23} + R_1,$$

где $|R_1| \lesssim M d_{23}^2$ (применяется формула Тейлора на отрезке $a_3 a_2$), приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_1(a_3)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{30}} &= \frac{\partial^2 e_2(a_3)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{30}}, \\ \frac{\partial^2 e_1(a_3)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{20}} + \frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{20} \partial x_1} d_{23} + R_1 &= \frac{\partial^2 e_3(a_2)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{20}}, \\ \frac{\partial^2 e_1(a_3)}{\partial \tau_{30}^2} &= \frac{\partial^2 e_2(a_3)}{\partial \tau_{30}^2}. \end{aligned}$$

Представляя производные функций e_i по направлениям τ_{jk} через производные по переменным x_i, y_i , получим систему уравнений относительно величин $e_i^{(02)}$:

$$\begin{aligned} &e_1^{(20)} \cos \frac{\gamma}{2} + e_1^{(11)} \sin \frac{\gamma}{2} = \\ &= e_2^{(20)} \cos \gamma \cos \frac{\gamma}{2} + e_2^{(11)} \left(-\cos \gamma \sin \frac{\gamma}{2} - \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} \right) + e_2^{(02)} \sin \gamma \sin \frac{\gamma}{2}, \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

$$\begin{aligned} &-e_1^{(20)} \cos \frac{\beta}{2} + e_1^{(11)} \sin \frac{\beta}{2} - e_1^{(30)} \cos \frac{\beta}{2} d_{23} + e_1^{(21)} \sin \frac{\beta}{2} d_{23} + R_1 = \\ &= -e_3^{(20)} \cos \beta \cos \frac{\beta}{2} + e_3^{(11)} \left(-\sin \beta \cos \frac{\beta}{2} - \cos \beta \sin \frac{\beta}{2} \right) - e_3^{(02)} \sin \beta \sin \frac{\beta}{2}, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

$$\begin{aligned} &e_1^{(20)} \cos^2 \frac{\gamma}{2} + 2e_1^{(11)} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + e_1^{(02)} \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \\ &= e_2^{(20)} \cos^2 \frac{\gamma}{2} - 2e_2^{(11)} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + e_2^{(02)} \sin^2 \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Из (2.3.13), (2.3.12), (2.3.2), (2.3.5) получаем оценку

$$\left| e_2^{(02)} \right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin \beta}, \quad (2.3.16)$$

из (2.3.14), (2.3.12), (2.3.3) — оценку

$$\left| e_3^{(02)} \right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin^2 \beta},$$

из (2.3.15), (2.3.12), (2.3.16), (2.3.2) — оценку

$$\left| e_1^{(02)} \right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin \beta}.$$

Лемма 2.3.3 доказана. \square

Лемма 2.3.4. Для любых $j = \overline{0, 3}$ и $1 \leq i \leq 3$ имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial^3 e_i(0, 0)}{\partial x_i^{3-j} \partial y_i^j} \right| \lesssim \begin{cases} MH, & \text{если } j = 0, 1, \\ \frac{MH}{\sin \alpha \sin^{j-1} \beta}, & \text{если } j = 2, 3. \end{cases} \quad (2.3.17)$$

Доказательство. Для $j = 0, 1$ оценки (2.3.17) уже были доказаны в (2.3.12).

Условие $S_3 \in C^1(T)$ и разложения по формуле Тейлора

$$\frac{\partial^2 e_1(a_2)}{\partial \tau_{20}^2} = \frac{\partial^2 e_1(a_3)}{\partial \tau_{20}^2} + \frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial \tau_{20}^2 \partial x_1} d_{23} + R_2,$$

$$\frac{\partial^3 e_1(a_2)}{\partial \tau_{20}^3} = \frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial \tau_{20}^3} + R_3,$$

$$\frac{\partial^3 e_1(a_2)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{20}^2} = \frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{20}^2} + R_4,$$

$$\frac{\partial^2 e_2(a_1)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{10}} = \frac{\partial^2 e_2(a_3)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{10}} - \frac{\partial^3 e_2(a_3)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{10} \partial x_2} d_{13} + R_5,$$

$$\frac{\partial^2 e_3(a_1)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{10}} = \frac{\partial^2 e_3(a_2)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{10}} + \frac{\partial^3 e_3(a_2)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{10} \partial x_3} d_{12} + R_6,$$

где $|R_2| \lesssim Md_{23}^2$, $|R_3| \lesssim Md_{23}$, $|R_4| \lesssim Md_{23}$, $|R_5| \lesssim Md_{13}^2$, $|R_6| \lesssim Md_{12}^2$,
дают совокупность следующих условий:

$$\frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial \tau_{30}^3} = \frac{\partial^3 e_2(a_3)}{\partial \tau_{30}^3},$$

$$\frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{30}^2} = \frac{\partial^3 e_2(a_3)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{30}^2},$$

$$\frac{\partial^2 e_1(a_3)}{\partial \tau_{20}^2} + \frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial \tau_{20}^2 \partial x_1} d_{23} + R_2 = \frac{\partial^2 e_3(a_2)}{\partial \tau_{20}^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial \tau_{20}^3} + R_3 &= \frac{\partial^3 e_3(a_2)}{\partial \tau_{20}^3}, \\ \frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{20}^2} + R_4 &= \frac{\partial^3 e_3(a_2)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{20}^2}, \\ \frac{\partial^2 e_2(a_3)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{10}} - \frac{\partial^3 e_2(a_3)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{10} \partial x_2} d_{13} + R_5 &= \frac{\partial^2 e_3(a_2)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{10}} + \frac{\partial^3 e_2(a_2)}{\partial \tau_{32} \partial \tau_{10} \partial x_3} d_{12} + R_6,\end{aligned}$$

Представляя производные функций e_i по направлениям τ_{jk} через производные по переменным x_i, y_i , получим систему уравнений относительно производных $e_i^{(pq)}$, $q = 2, 3$, $p = 3 - q$:

$$\begin{aligned}& e_1^{(30)} \cos^3 \frac{\gamma}{2} + 3e_1^{(21)} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + 3e_1^{(12)} \cos \frac{\gamma}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} + e_1^{(03)} \sin^3 \frac{\gamma}{2} \\ &= -e_2^{(30)} \cos^3 \frac{\gamma}{2} + 3e_2^{(21)} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - 3e_2^{(12)} \cos \frac{\gamma}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} + e_2^{(03)} \sin^3 \frac{\gamma}{2}, \quad (2.3.18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& e_1^{(30)} \cos^2 \frac{\gamma}{2} + 2e_1^{(21)} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + e_1^{(12)} \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \\ &= -e_2^{(30)} \cos \gamma \cos^2 \frac{\gamma}{2} + e_2^{(21)} \left(\sin \gamma \cos^2 \frac{\gamma}{2} + 2 \cos \gamma \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right) \\ &+ e_2^{(12)} \left(-\cos \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} - 2 \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right) + e_2^{(03)} \sin \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2}, \quad (2.3.19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& e_1^{(20)} \cos^2 \frac{\beta}{2} - 2e_1^{(11)} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} + e_1^{(02)} \sin^2 \frac{\beta}{2} + e_1^{(30)} \cos^2 \frac{\beta}{2} d_{23} - \\ & - 2e_1^{(21)} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} d_{23} + e_1^{(12)} \sin^2 \frac{\beta}{2} d_{23} + R_2 = \\ &= e_3^{(20)} \cos^2 \frac{\beta}{2} + 2e_3^{(11)} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} + e_3^{(02)} \sin^2 \frac{\beta}{2}, \quad (2.3.20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& -e_1^{(30)} \cos^3 \frac{\beta}{2} + 3e_1^{(21)} \cos^2 \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} - 3e_1^{(12)} \cos \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} + e_1^{(03)} \sin^3 \frac{\beta}{2} + R_3 = \\ &= e_3^{(30)} \cos^3 \frac{\beta}{2} + 3e_3^{(21)} \cos^2 \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} + 3e_3^{(12)} \cos \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} + e_3^{(03)} \sin^3 \frac{\beta}{2}, \quad (2.3.21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& e_1^{(30)} \cos^2 \frac{\beta}{2} - 2e_1^{(21)} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} + e_1^{(12)} \sin^2 \frac{\beta}{2} + R_4 = \\ &= -e_3^{(30)} \cos \beta \cos^2 \frac{\beta}{2} + e_3^{(21)} \left(-\sin \beta \cos^2 \frac{\beta}{2} - 2 \cos \beta \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) + \\ &+ e_3^{(12)} \left(-2 \sin \beta \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} - \cos \beta \sin^2 \frac{\beta}{2} \right) - e_3^{(03)} \sin \beta \sin^2 \frac{\beta}{2}, \quad (2.3.22)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e_2^{(20)} \cos \gamma \cos \frac{\alpha}{2} + e_2^{(11)} \left(-\cos \gamma \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \gamma \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \\
& \quad + e_2^{(02)} \sin \gamma \sin \frac{\alpha}{2} + e_2^{(30)} \cos \gamma \cos \frac{\alpha}{2} d_{13} + \\
& + e_2^{(21)} \left(\cos \gamma \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \gamma \cos \frac{\alpha}{2} \right) d_{13} - e_2^{(12)} \sin \gamma \sin \frac{\alpha}{2} d_{13} + R_5 = \\
& = e_3^{(20)} \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} + e_3^{(11)} \left(-\cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \beta \cos \frac{\alpha}{2} \right) - \\
& \quad - e_3^{(02)} \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2} + e_3^{(30)} \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} d_{12} + \\
& + e_3^{(21)} \left(-\cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \beta \cos \frac{\alpha}{2} \right) d_{12} - e_3^{(12)} \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2} d_{12} + R_6. \quad (2.3.23)
\end{aligned}$$

Из (2.3.20) получаем оценку

$$\begin{aligned}
\left| e_1^{(12)} \sin^2 \frac{\beta}{2} d_{23} \right| & \leq \left| e_3^{(20)} \cos^2 \frac{\beta}{2} \right| + 2 \left| e_3^{(11)} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right| + \left| e_3^{(02)} \sin^2 \frac{\beta}{2} \right| + \\
& + \left| e_1^{(20)} \cos^2 \frac{\beta}{2} \right| + 2 \left| e_1^{(11)} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right| + \left| e_1^{(02)} \sin^2 \frac{\beta}{2} \right| + \\
& + \left| e_1^{(30)} \cos^2 \frac{\beta}{2} d_{23} \right| + 2 \left| e_1^{(21)} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} d_{23} \right| + |R_2|, \quad (2.3.24)
\end{aligned}$$

Оценивая слагаемые правой части неравенства (2.3.24) с помощью (2.3.11), (2.3.12) (каждое слагаемое с точностью до знака \lesssim не превосходит величины MH^2) и принимая во внимание то, что

$$H^2 \left(\sin^2 \frac{\beta}{2} d_{23} \right)^{-1} \lesssim H^2 (\sin^2 \beta d_{23})^{-1} \lesssim H (\sin \alpha \sin \beta)^{-1},$$

получаем

$$\left| e_1^{(12)} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin \alpha \sin \beta}. \quad (2.3.25)$$

В уравнениях (2.3.18), (2.3.19), (2.3.21), (2.3.22), (2.3.23) остаются 5 величин, которые требуется оценить: $e_1^{(03)}$, $e_2^{(12)}$, $e_2^{(03)}$, $e_3^{(12)}$, $e_3^{(03)}$. Прочие слагаемые в данных уравнениях оцениваются с помощью (2.3.11), (2.3.12), (2.3.25). Таким образом, учитывая, что

$$H \lesssim d_{12} \lesssim H,$$

$$H \lesssim d_{13} \lesssim H,$$

а также применяя равенство $d_{13} \sin \gamma = d_{12} \sin \beta$ (теорема синусов) в (2.3.23), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} e_1^{(03)} \sin^3 \frac{\gamma}{2} + 3e_2^{(12)} \cos \frac{\gamma}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} - e_2^{(03)} \sin^3 \frac{\gamma}{2} &= E_1, \\ e_2^{(12)} \left(\cos \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 2 \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right) - e_2^{(03)} \sin \gamma \sin^2 \frac{\theta}{2} &= E_2, \\ e_1^{(03)} \sin^3 \frac{\beta}{2} - 3e_3^{(12)} \cos \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} - e_3^{(03)} \sin^3 \frac{\beta}{2} &= E_3, \\ e_3^{(12)} \left(2 \sin \beta \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \cos \beta \sin^2 \frac{\beta}{2} \right) + e_3^{(03)} \sin \beta \sin^2 \frac{\beta}{2} &= E_4, \\ -e_2^{(12)} \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2} + e_3^{(12)} \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2} &= E_5, \end{aligned}$$

где

$$|E_i| \lesssim \begin{cases} MH / \sin \alpha, & \text{если } i = 1, \\ MH / (\sin \alpha \sin \beta), & \text{если } i = 2, \\ MH \sin \beta / \sin \alpha, & \text{если } i = 3, 4, \\ MH, & \text{если } i = 5. \end{cases} \quad (2.3.26)$$

Основной матрицей этой системы является матрица A , для которой $\det A \gtrsim \sin \alpha \sin^7 \beta$ (см. лемму 2.3.1). Решая систему методом Крамера и оценивая полученные решения с учетом леммы 2.3.2 и (2.3.26), завершаем доказательство оценок (2.3.17). Лемма 2.3.3 доказана. \square

Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться разложением (2.3.10) с учетом условий (2.3.8), (2.3.9) и оценок (2.3.11) и (2.3.17). Теорема 2.3.1 доказана. \square

§ 2.4. Оценки снизу для составных конечных элементов

Пусть множество треугольников $\mathfrak{T} = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N\}$ — триангуляция области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, т. е. $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Delta_i$; Δ — треугольник с вершинами

a_1, a_2, a_3 из триангуляции $\{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N\}$. Пусть Δ является составным конечным элементом, т. е. в свою очередь триангулирован на k треугольников $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_k$; пусть $k \leq k_0$, где k_0 — некоторое заданное натуральное число. Будем рассматривать только разбиения треугольника Δ со следующим свойством: для каждой стороны $a_i a_j$ ($i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$) найдется треугольник \mathcal{T}_s ($1 \leq s \leq k$), у которого одна из сторон совпадает с $a_i a_j$. Пусть на каждом из треугольников \mathcal{T}_i задается свой многочлен $P_{n,i} = P_i$ степени не выше n по совокупности переменных. Таким образом, на Δ задана кусочно полиномиальная функция S_Δ . На S_Δ будем налагать следующие требования.

C1. Сплайн S_Δ интерполирует значения функции f и, возможно, ее производных по избранным направлениям в некоторых точках треугольника Δ , в том числе в вершинах и некоторых точках сторон, и полностью определяется интерполяционными условиями и условием принадлежности классу $C^m(\Delta)$ ($m \geq 1$), т. е. задается локально на Δ ;

C2. Совокупность всех S_{Δ_i} , $i = 1, \dots, N$, образует функцию из класса $C^m(\Omega)$ ($m \geq 1$), т. е. если $\tilde{S} = \sum_{\Delta \in \mathfrak{T}} \tilde{S}_\Delta$, где

$$\tilde{S}_\Delta(u) = \begin{cases} S_\Delta(u), & \text{если } u \in \Delta, \\ 0, & \text{если } u \in \Omega \setminus \Delta, \end{cases}$$

то $\tilde{S} \in C^m(\Omega)$.

Как и ранее, обозначаем через α, β, γ величины углов треугольника Δ при вершинах a_1, a_2, a_3 соответственно; $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$; τ_{ij} — единичные векторы, направленные от a_i к a_j ; n_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j$) — единичные нормали к сторонам $[a_i, a_j]$; d_{ij} — длина стороны $a_i a_j$.

Поместим Δ в прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы вершины Δ имели следующие координаты: $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (b + a, 0)$, $a_3 = (b, h)$, где $a, b, h > 0$ и $a \leq b$, $h \leq 2b$ (последние два неравенства следуют из договоренности о соотношениях между величинами углов

при вершинах a_1, a_2, a_3), $a + b = H$.

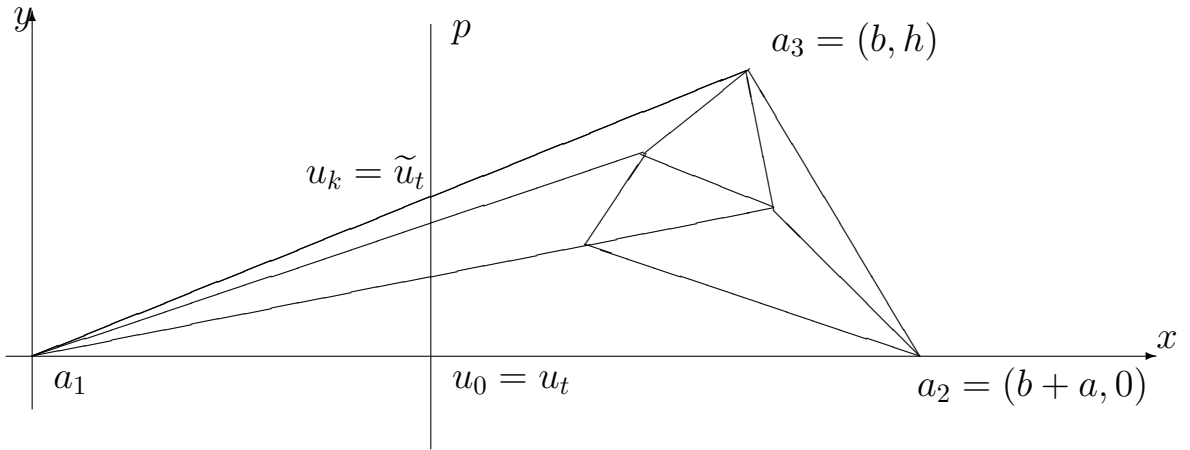


Рис 2.4.1. Составной элемент Δ

Пусть сужения сплайна $S_\Delta(u)$ и его производной $\partial S_\Delta(u)/\partial n_{ij}$ на любую сторону $a_i a_j$ треугольника однозначно определяются интерполяционными условиями, задаваемыми в точках стороны $a_i a_j$. Отметим, что в силу условий С1 и С2 тем же условиям должен удовлетворять сплайн $S_{\Delta^*}(u)$ на соседнем с Δ треугольнике Δ^* . Пусть, кроме того, интерполяционные условия в точках сторон треугольника Δ задаются таким образом, что для любой стороны $a_i a_j$ треугольника Δ имеет место равенство

$$\left. \frac{\partial^s (f(u) - S_\Delta(u))}{\partial n_{ij}^s} \right|_{u \in [a_i, a_j]} = \frac{1}{(n+1-s)!} \frac{\partial^{n+1} f(\vartheta_{ij}^s)}{\partial n_{ij}^s \partial \tau_{ij}^{n+1-s}} d_{ij}^{n+1-s} \omega_{ij, n+1-s}(t), \quad (2.4.1)$$

$$s = 0, \dots, m, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j,$$

где $\vartheta_{ij}^s \in [a_i, a_j]$; $\omega_{ij, n+1-s}(t)$ — многочлен степени $n+1-s$ со старшим коэффициентом, равным единице; $t = |u - a_i|/d_{ij} \in [0, 1]$.

Равенство (2.4.1) — это формула остаточного члена интерполяционной формулы для функции $\partial^s f / \partial n_{ij}^s$ и ее интерполяционного многочлена, задаваемого на отрезке $[a_i, a_j]$ и являющегося сужением сплайна S_Δ на

данный отрезок. Поскольку для доказательства результата данного параграфа нам достаточно принадлежности функции \tilde{S} классу $C^1(\Omega)$, можно без ограничений общности считать, что

$$m = 1.$$

Напомним, что в число условий построения сплайна S_Δ на треугольнике Δ входит требование обеспечения гладкости результирующего сплайна \tilde{S} на Ω при отсутствии информации о соседних с Δ конечных элементах. Обычно в этом случае на всех сторонах треугольника Δ задаются однотипные условия интерполяции, т. е. $\omega_{ij,n+1-s}(x)$ не зависит от i, j , что означает

$$\omega_{ij,n+1-s}(x) = \omega_{pq,n+1-s}(x)$$

для любых i, j, p, q и $s = 0, 1$ (или $s = 0, \dots, r$, если $r > 1$). Это означает, что

$$\omega_{ij,n+1-s}(x) = (-1)^{n+1-s} \omega_{ij,n+1-s}(1-x). \quad (2.4.2)$$

Тогда

$$\omega_{ij,n+1-s}^{(n-s)}(x) = -\omega_{ij,n+1-s}^{(n-s)}(1-x). \quad (2.4.3)$$

Поскольку $\omega_{ij,n+1-s}$ — многочлен степени $n+1-s$ с старшим коэффициентом, равным единице, то $\omega_{ij,n+1-s}^{(n-s)}(x)$ является линейной функцией, и из (2.4.3) следует, что

$$\frac{\omega_{ij,n+1-s}^{(n-s)}(x)}{(n+1-s)!} = x - \frac{1}{2} \quad (2.4.4)$$

для любых $s = 0, 1$ и $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$.

Теорема 2.4.1. Пусть Δ — составной конечный элемент, триангулированный на k треугольников $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_k$, $k \leq k_0$. Если S_Δ удовлетворяет условиям $C1$, $C2$ и для любой функции $f \in W^{n+1}M$ выполнены соотношения (2.4.1) и (2.4.4), то для любого $s = 2, \dots, n$ найдется

$\alpha_0 > 0$ такое, что для любого $\alpha < \alpha_0$ имеют место оценки

$$\mathcal{E}_{n,s} = \mathcal{E}_{n,s}(\Delta, S_\Delta) \geq \mathcal{K}(n, k_0) \frac{MH^{n+1-s}}{\sin \alpha}, \quad (2.4.5)$$

где $\mathcal{K}(n, k_0)$ — некоторая положительная величина, которая может зависеть только от n и k_0 .

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f^*(x, y) = \delta_1 M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \delta_2 M \frac{x^n y}{n!}, \quad (2.4.6)$$

где δ_1 и δ_2 выбираются таким образом, чтобы $f^* \in W^{n+1}M$, $\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0$. Пусть S_Δ — кусочно полиномиальная функция, интерполирующая f^* и удовлетворяющая условиям теоремы. Положим

$$e(x, y) = f^*(x, y) - S_\Delta(x, y),$$

$$e_i(x, y) = (f^*(x, y) - S_\Delta(x, y)) \Big|_{\mathcal{T}_i} = f^*(x, y) - P_{n,i}(x, y).$$

Пусть $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}$ — вершины треугольника \mathcal{T}_i ($i = 1, \dots, k$). Тогда существует непустое пересечение "вертикальной" полосы ширины $\tilde{H} \underset{k_0}{\gtrsim} H$ и треугольника Δ такое, что любая прямая, лежащая в данной полосе (и, следовательно, параллельная оси Oy), пересекается только с такими сторонами $a_r^{(i)} a_s^{(i)}$ ($1 \leq s, r \leq 3$, $s \neq r$) треугольников \mathcal{T}_i из множества $\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_k\}$, для которых имеет место неравенство $\left| a_s^{(i)} - a_r^{(i)} \right| \underset{k_0}{\gtrsim} H$. Точнее, на сторонах $a_1 a_2$ и $a_1 a_3$ составного элемента Δ можно выделить соответственно отрезки Q и \tilde{Q} со следующими свойствами:

1°. $|Q| = c(k_0)H$, где $|Q|$ — длина отрезка Q , $c(k_0)$ — положительное число, зависящее только от k_0 (т. е. $|Q| \underset{k_0}{\gtrsim} H$);

2°. пусть прямые p_1 и p_2 параллельны оси Oy и проходят через две различные точки $q_1, q_2 \in Q$. Пусть p_1 пересекает сторону $a_r^{(i)} a_s^{(i)}$ некоторого треугольника \mathcal{T}_i в некоторой точке u_1 . Тогда p_2 также пересекает $a_r^{(i)} a_s^{(i)}$ в некоторой точке u_2 ;

3°. любая прямая p , параллельная оси Oy и проходящая через любую точку $u \in Q$, пересекает отрезок \tilde{Q} в некоторой точке \tilde{u} и наоборот, любая прямая p , параллельная оси Oy и проходящая через любую точку $\tilde{u} \in \tilde{Q}$, пересекает отрезок Q в некоторой точке u ; в частности, это означает, что $\left| \tilde{Q} \right|_{k_0} \gtrsim H$.

Отрезки Q и \tilde{Q} могут быть представлены следующим образом:

$$Q = \{u = a_1 + t(a_2 - a_1) : t \in \sigma \subset [0, 1]\},$$

$$\tilde{Q} = \{\tilde{u} = a_1 + \tilde{t}(a_3 - a_1) : \tilde{t} \in \tilde{\sigma} \subset [0, 1]\},$$

где $|\sigma| \gtrsim 1$, $|\tilde{\sigma}| \gtrsim 1$.

Нам будет достаточно рассмотреть одну прямую из указанной полосы. Возьмем некоторое значение $t \in \sigma$ и соответствующую точку $u_t = a_1 + t(a_2 - a_1)$. Проведем через точку u_t прямую p , параллельную оси y . Эта прямая пересекает отрезок \tilde{Q} в некоторой точке $\tilde{u}_t = a_1 + \tilde{t}(a_3 - a_1)$ при соответствующем \tilde{t} . Таким образом, мы получаем точки u_t , \tilde{u}_t и функцию $\psi : \sigma \rightarrow \tilde{\sigma}$ такую, что $\tilde{t} = \psi(t)$.

Рассмотрим все треугольники составного конечного элемента Δ , имеющие общие точки с прямой p (без ограничений общности можем считать, что p имеет пустое пересечение с множеством всех вершин треугольников, составляющих триангуляцию элемента Δ ; также можем считать, что число таких треугольников равно k), и занумеруем их следующим образом: \mathcal{T}_1 – треугольник, у которого одна из сторон, пересекаемая прямой p , совпадает с $[a_1, a_2]$; \mathcal{T}_2 – треугольник, соседний с \mathcal{T}_1 ; ..., \mathcal{T}_k – треугольник, соседний с \mathcal{T}_{k-1} .

Обозначим стороны этих треугольников следующим образом: $[c_1^0, c_2^0]$ – сторона треугольника \mathcal{T}_1 , совпадающая с $[a_1, a_2]$; $[c_1^1, c_2^1]$ – общая сторона треугольников \mathcal{T}_1 и \mathcal{T}_2 ; ...; $[c_1^{k-1}, c_2^{k-1}]$ – общая сторона треугольников \mathcal{T}_{k-1} и \mathcal{T}_k ; $[c_1^k, c_2^k]$ – сторона треугольника \mathcal{T}_k , совпадающая с $[a_1, a_3]$. В

силу условий $1^\circ - 3^\circ$ можем утверждать, что для любого $j = 1, \dots, k$ имеет место неравенство

$$\left| c_2^j - c_1^j \right| \underset{k_0}{\gtrsim} H. \quad (2.4.7)$$

Пусть далее u_j – точки пересечения прямой p и отрезков $[c_1^j, c_2^j]$ ($j = 0, \dots, k$). В частности, $u_0 = u_t$, $u_k = \tilde{u}_t$.

Пусть точки c_i^j имеют координаты (x_i^j, y_i^j) , и для всех j выполняются неравенства $x_1^j < x_2^j$. Обозначим через τ_j единичные векторы, направленные от c_1^j к c_2^j . Очевидно, что $c_1^{j-1} = c_1^j$ или $c_2^{j-1} = c_2^j$ (в дальнейшем это не будет иметь значения), $\tau_0 = \tau_{12}$, $\tau_k = \tau_{13}$.

Через α_j ($j = 1, \dots, k$) обозначим углы между векторами τ_{j-1} и τ_j с учетом направления этих векторов: если в результате приведения к общему началу кратчайший поворот от вектора τ_{j-1} к вектору τ_j происходит против часовой стрелки, то $\alpha_j > 0$, иначе $\alpha_j < 0$. Отметим, что

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j = \alpha. \quad (2.4.8)$$

Рассмотрим функции $\omega_{ij, n+1-k}$ из (2.4.1).

Лемма 2.4.1. Пусть $\tilde{t} = \psi(t)$ и выполнено условие $a < b/(2n)$. Положим

$$W_2(t) = \frac{(n+1)d_{13} \omega_{13, n+1}^{(n)}(\tilde{t}) \cos \alpha}{(n+1)!} - \frac{nd_{12} \omega_{12, n}^{(n-1)}(t)}{n!} - \frac{|u_k - u_0|}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$|W_2(t)| \gtrsim H. \quad (2.4.9)$$

Доказательство. Так как прямая p , проходящая через точки u_0 и u_k , параллельна оси y , $|u_k - a_1| = d_{13}\tilde{t}$ и $|u_0 - a_1| = d_{12}t$, то

$$d_{13}\tilde{t} \cos \alpha = d_{12}t,$$

откуда следует, что

$$\tilde{t} = \frac{d_{12}}{d_{13}} \frac{t}{\cos \alpha} = \frac{b+a}{(b^2+h^2)^{1/2}} \frac{(b^2+h^2)^{1/2}}{b} t = \frac{b+a}{b} t.$$

Заметим, что

$$\frac{|u_k - u_0|}{\operatorname{tg} \alpha} = |u_0 - a_1| = (b+a)t.$$

Тогда с учетом формулы (2.4.4) и того, что $d_{12} = b+a$, $d_{13} \cos \alpha = (b^2+h^2)^{1/2} \cos \alpha = b$, получаем:

$$\begin{aligned} W_2(t) &= (n+1)b \left(\tilde{t} - \frac{1}{2} \right) - n(b+a) \left(t - \frac{1}{2} \right) - (b+a)t = \\ &= (n+1)b \left(\frac{b+a}{b} t - \frac{1}{2} \right) - n(b+a) \left(t - \frac{1}{2} \right) - (b+a)t = -\frac{b}{2} + \frac{na}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|W_2(t)| \geq \frac{b}{2} - \frac{nb}{4n} \geq \frac{b}{4} \gtrsim H.$$

Лемма 2.4.1 доказана. \square

Лемма 2.4.2. Пусть $\tilde{t} = \psi(t)$ и выполнено условие $a \geq b/(2n)$. Положим

$$W_1(t) = \frac{d_{13} \omega_{13,n+1}^{(n)}(\tilde{t}) \cos \alpha}{(n+1)!} - \frac{d_{12} \omega_{12,n+1}^{(n)}(t)}{(n+1)!}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$|W_1(t)| \underset{n}{\gtrsim} H. \quad (2.4.10)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.4.1:

$$W_1(t) = b \left(\tilde{t} - \frac{1}{2} \right) - (b+a) \left(t - \frac{1}{2} \right) = b \left(\frac{b+a}{b} t - \frac{1}{2} \right) - (b+a) \left(t - \frac{1}{2} \right) = \frac{a}{2},$$

откуда следует оценка $|W_1(t)| \geq b/(4n) \underset{n}{\gtrsim} H$. Лемма 2.4.2 доказана. \square

Лемма 2.4.3. Пусть $\tau = (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Тогда для любой дифференцируемой функции g имеет место равенство

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \tau} \frac{1}{\cos \varphi} - \frac{\partial g}{\partial y} \operatorname{tg} \varphi. \quad (2.4.11)$$

Доказательство следует из того, что $\partial g / \partial \tau = (\partial g / \partial x) \cos \varphi + (\partial g / \partial y) \sin \varphi$. Лемма 2.4.3 доказана. \square

Введем обозначение

$$\gamma_j = \sum_{s=1}^j \alpha_s, \quad (2.4.12)$$

где $j = 1, \dots, k$. Положим $\gamma_0 = 0$. Отметим, что γ_j является также углом между векторами $\tau_0 = \tau_{12}$ и τ_j (можно доказать индукцией по j). Тогда с учетом неравенства (2.4.7) можем утверждать, что $\cos \gamma_j \gtrsim 1$ для любого $j = 1, \dots, k$ (при достаточно малом α).

Лемма 2.4.4. *Имеет место равенство*

$$\sum_{s=0}^{k-1} \frac{\sin \alpha_{k-s}}{\cos \gamma_{k-s} \cos \gamma_{k-s-1}} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.4.13)$$

Доказательство. Рассмотрим сумму последних двух слагаемых

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \alpha_2}{\cos \gamma_2 \cos \gamma_1} + \frac{\sin \alpha_1}{\cos \gamma_1} = \frac{\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_1} = \\ & = \frac{\sin \alpha_2 + (-\sin \alpha_2 + \sin(2\alpha_1 + \alpha_2)) / 2}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_1} = \frac{\sin \alpha_2 + \sin(2\alpha_1 + \alpha_2)}{2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_1} = \\ & = \frac{2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_1}{2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_1} = \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Тогда, полагая $\alpha^* = \alpha_1 + \alpha_2$ и используя (2.4.14), можем сумму последних трех слагаемых представить в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \alpha_3}{\cos \gamma_3 \cos \gamma_2} + \frac{\sin \alpha_2}{\cos \gamma_2 \cos \gamma_1} + \frac{\sin \alpha_1}{\cos \gamma_1} = \\ & = \frac{\sin \alpha_3}{\cos \gamma_3 \cos \gamma_2} + \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_3}{\cos(\alpha^* + \alpha_3) \cos \alpha^*} + \frac{\sin \alpha^*}{\cos \alpha^*} = \\ & = \frac{\sin(\alpha^* + \alpha_3)}{\cos(\alpha^* + \alpha_3)} = \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}. \end{aligned}$$

Действуя далее по индукции, получаем (2.4.13). Лемма 2.4.4 доказана. \square

Лемма 2.4.5. Для любой функции g , определенной на треугольнике Δ , чисел $i = 1, \dots, k$ и $s = n - 1, n$ имеет место представление

$$\frac{\partial^s g}{\partial \tau_i^s} = \frac{\partial^s g}{\partial \tau_{i-1}^s} \frac{\cos^s \gamma_i}{\cos^s \gamma_{i-1}} + \frac{\partial^s g}{\partial \tau_{i-1}^{s-1} \partial y} \frac{s \cos^{s-1} \gamma_i \sin \alpha_i}{\cos^s \gamma_{i-1}} + \sum_{j=2}^s C_{i,j} \frac{\partial^s g}{\partial \tau_{i-1}^{s-j} \partial y^j} \sin^j \alpha_i, \quad (2.4.15)$$

где $|C_{i,j}| \underset{n}{\lesssim} 1$ (считаем, что все производные существуют).

Доказательство. Так как $\tau_i = (\cos \gamma_i, \sin \gamma_i)$ (см. (2.4.12)), то, принимая во внимание (2.4.11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^s g}{\partial \tau_i^s} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \gamma_i + \frac{\partial}{\partial y} \sin \gamma_i \right)^s g = \\ &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial \tau_{i-1}} \frac{1}{\cos \gamma_{i-1}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin \gamma_{i-1}}{\cos \gamma_{i-1}} \right) \cos \gamma_i + \frac{\partial}{\partial y} \sin \gamma_i \right)^s g = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \tau_{i-1}} \frac{\cos \gamma_i}{\cos \gamma_{i-1}} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin \gamma_i - \frac{\cos \gamma_i}{\cos \gamma_{i-1}} \sin \gamma_{i-1} \right) \right)^s g. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sin \gamma_i - \frac{\cos \gamma_i}{\cos \gamma_{i-1}} \sin \gamma_{i-1} &= \sin(\gamma_{i-1} + \alpha_i) - \frac{\cos(\gamma_{i-1} + \alpha_i)}{\cos \gamma_{i-1}} \sin \gamma_{i-1} = \\ &= \sin \gamma_{i-1} \cos \alpha_i + \cos \gamma_{i-1} \sin \alpha_i - \frac{\cos \gamma_{i-1} \cos \alpha_i}{\cos \gamma_{i-1}} \sin \gamma_{i-1} + \\ &\quad + \frac{\sin \gamma_{i-1} \sin \alpha_i}{\cos \gamma_{i-1}} \sin \gamma_{i-1} = \\ &= \cos \gamma_{i-1} \sin \alpha_i + \operatorname{tg} \gamma_{i-1} \sin \gamma_{i-1} \sin \alpha_i = \\ &= \sin \alpha_i \left(\cos \gamma_{i-1} + \frac{\sin^2 \gamma_{i-1}}{\cos \gamma_{i-1}} \right) = \frac{\sin \alpha_i}{\cos \gamma_{i-1}}, \end{aligned}$$

то

$$\frac{\partial^s g}{\partial \tau_i^s} = \left(\frac{\partial}{\partial \tau_{i-1}} \frac{\cos \gamma_i}{\cos \gamma_{i-1}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin \alpha_i}{\cos \gamma_{i-1}} \right)^s g.$$

Раскрывая скобки, получим (2.4.15). Лемма 2.4.5 доказана. \square

Пусть h_i – высота треугольника \mathcal{T}_i , опущенная на сторону $[c_1^s, c_2^s]$ ($s = i-1$ или $s = i$). Так как $\mu(\mathcal{T}_i) < \mu(\Delta)$ (где под μ подразумеваем площадь

соответствующего треугольника) и $|c_2^s - c_1^s| \underset{k_0}{\gtrsim} H$, можем утверждать, что $h_i \underset{k_0}{\lesssim} h$. В частности, это означает, что

$$|\sin \alpha_i| \underset{k_0}{\lesssim} \sin \alpha, \quad i = 1, \dots, k. \quad (2.4.16)$$

Лемма 2.4.6. *Имеет место разложение*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_k^n} &= \frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial x^n} \cos^n \alpha + \frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial x^{n-1} \partial y} n \cos^n \alpha \operatorname{tg} \alpha + \\ &+ \sum_{r=1}^k \sum_{j=2}^n D_{r,j} \frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial \tau_{r-1}^{n-j} \partial y^j} \sin^{j-1} \alpha_r \sin \alpha + \delta_2 M |u_k - u_0| \cos^n \alpha, \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

где величины $D_{r,j}$ удовлетворяют неравенству $|D_{r,j}| \underset{n}{\lesssim} 1$.

Доказательство. Полагая $g = e_k$, $i = k$, $s = n$ в (2.4.15), получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_k^n} &= \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_{k-1}^n} \frac{\cos^n \gamma_k}{\cos^n \gamma_{k-1}} + n \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_{k-1}^{n-1} \partial y} \frac{\cos^{n-1} \gamma_k \sin \alpha_k}{\cos^n \gamma_{k-1}} + \\ &+ \sum_{j=2}^n D_{k,j} \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_{k-1}^{n-j} \partial y^j} \sin^j \alpha_k. \end{aligned}$$

Разложим $\partial^n e_k(u_k)/\partial \tau_k^n$ и $\partial^n e_k(u_k)/(\partial \tau_{k-1}^{n-1} \partial y)$ по формуле конечных приращений Лагранжа в точке u_{k-1} (напомним, что прямая p , проходящая через точки u_k и u_{k-1} , параллельна оси y). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_k^n} &= \frac{\partial^n e_k(u_{k-1})}{\partial \tau_{k-1}^n} \frac{\cos^n \gamma_k}{\cos^n \gamma_{k-1}} + n \frac{\partial^n e_k(u_{k-1})}{\partial \tau_{k-1}^{n-1} \partial y} \frac{\cos^{n-1} \gamma_k \sin \alpha_k}{\cos^n \gamma_{k-1}} + \\ &+ \sum_{j=2}^n D_{k,j} \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_{k-1}^{n-j} \partial y^j} \sin^j \alpha_k + \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \tau_{k-1}^n \partial y} |u_k - u_{k-1}| \frac{\cos^n \gamma_k}{\cos^n \gamma_{k-1}} + \\ &+ n \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \tau_{k-1}^{n-1} \partial y^2} |u_k - u_{k-1}| \frac{\cos^{n-1} \gamma_k \sin \alpha_k}{\cos^n \gamma_{k-1}}. \end{aligned}$$

Так как f^* имеет вид (2.4.6), последнее слагаемое равно нулю. Кроме того, поскольку $\tau_{k-1} = (\cos \gamma_{k-1}, \sin \gamma_{k-1})$, из (2.4.6) следует равенство

$$\frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \tau_{k-1}^n \partial y} = \delta_2 M \cos^n \gamma_{k-1}.$$

Учитывая гладкость функции $e(x, y)$ на треугольнике Δ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_k^n} &= \frac{\partial^n e_{k-1}(u_{k-1})}{\partial \tau_{k-1}^n} \frac{\cos^n \gamma_k}{\cos^n \gamma_{k-1}} + n \frac{\partial^n e_{k-1}(u_{k-1})}{\partial \tau_{k-1}^{n-1} \partial y} \frac{\cos^{n-1} \gamma_k \sin \alpha_k}{\cos^n \gamma_{k-1}} + \\ &+ \sum_{j=2}^n D_{k,j} \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_{k-1}^{n-j} \partial y^j} \sin^j \alpha_k + \delta_2 M |u_k - u_{k-1}| \cos^n \gamma_k. \end{aligned}$$

Применим (2.4.15) к случаям $g = e_{k-1}$, $i = k-1$, $s = n$ и $g = \partial e_k / \partial y$, $i = k-1$, $s = n-1$, принимая во внимание (2.4.16):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_k^n} &= \frac{\partial^n e_{k-1}(u_{k-1})}{\partial \tau_{k-2}^n} \frac{\cos^n \gamma_k}{\cos^n \gamma_{k-2}} + \\ &+ \frac{\partial^n e_{k-1}(u_{k-1})}{\partial \tau_{k-2}^{n-1} \partial y} \frac{n \cos^n \gamma_k}{\cos^{n-1} \gamma_{k-2}} \left(\frac{\sin \alpha_{k-1}}{\cos \gamma_{k-1} \cos \gamma_{k-2}} + \frac{\sin \alpha_k}{\cos \gamma_k \cos \gamma_{k-1}} \right) + \\ &+ \sum_{r=k-1}^k \sum_{j=2}^n D_{r,j} \frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial \tau_{r-1}^{n-j} \partial y^j} \sin^{j-1} \alpha_r \sin \alpha + \delta_2 M |u_k - u_{k-1}| \cos^n \gamma_k. \end{aligned}$$

Как и ранее, разложим $\partial^n e_{k-1}(u_{k-1}) / \partial \tau_{k-2}^n$ и $\partial^n e_{k-1}(u_{k-1}) / (\partial \tau_{k-2}^{n-1} \partial y)$ по формуле конечных приращений Лагранжа в точке u_{k-2} и используем гладкость функции $e(x, y)$, а также то, что $\partial^{n+1} f^* / (\partial \tau_{k-2}^n \partial y) = \delta_2 M \cos^n \gamma_{k-2}$. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_k^n} &= \frac{\partial^n e_{k-2}(u_{k-2})}{\partial \tau_{k-2}^n} \frac{\cos^n \gamma_k}{\cos^n \gamma_{k-2}} + \\ &+ \frac{\partial^n e_{k-2}(u_{k-2})}{\partial \tau_{k-2}^{n-1} \partial y} \frac{n \cos^n \gamma_k}{\cos^{n-1} \gamma_{k-2}} \left(\frac{\sin \alpha_{k-1}}{\cos \gamma_{k-1} \cos \gamma_{k-2}} + \frac{\sin \alpha_k}{\cos \gamma_k \cos \gamma_{k-1}} \right) + \\ &+ \sum_{r=k-1}^k \sum_{j=2}^n D_{r,j} \frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial \tau_{r-1}^{n-j} \partial y^j} \sin^{j-1} \alpha_r \sin \alpha + \end{aligned}$$

$$+ \delta_2 M (|u_k - u_{k-1}| + |u_{k-1} - u_{k-2}|) \cos^n \gamma_k.$$

Продолжая этот процесс, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_k^n} &= \frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial \tau_0^n} \frac{\cos^n \gamma_k}{\cos^n \gamma_0} + \\ &+ \frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial \tau_0^{n-1} \partial y} \frac{n \cos^n \gamma_k}{\cos^{n-1} \gamma_0} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{\sin \alpha_{k-s}}{\cos \gamma_{k-s} \cos \gamma_{k-s-1}} + \\ &+ \sum_{r=1}^k \sum_{j=2}^n D_{r,j} \frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial \tau_{r-1}^{n-j} \partial y^j} \sin^{j-1} \alpha_r \sin \alpha + \delta_2 M \cos^n \gamma_k \sum_{i=1}^k |u_i - u_{i-1}|. \end{aligned}$$

Учитывая (2.4.13) и то, что $\sum_{i=1}^k |u_i - u_{i-1}| = |u_k - u_0|$, $\partial/\partial \tau_0 = \partial/\partial x$, $\gamma_k = \alpha$, $\gamma_0 = 0$, приходим к (2.4.17). Лемма 2.4.6 доказана. \square

Лемма 2.4.7. *Найдутся $r \in \{1, \dots, k\}$ и $j \in \{2, \dots, n\}$, такие что*

$$\left| \frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial \tau_{r-1}^{n-j} \partial y^j} \right| \underset{n}{\gtrsim} \frac{MH}{|\sin^{j-1} \alpha_r|}. \quad (2.4.18)$$

Доказательство. Принимая во внимание (2.4.1), вид функции f^* и то, что $\tau_k = \varsigma_{13} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, получим равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_k^n} &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \tau_k^{n+1}} d_{13} \omega_{13, n+1}^{(n)}(\tilde{t}) = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} (\delta_1 M \cos^{n+1} \alpha + \delta_2 (n+1) M \cos^n \alpha \sin \alpha) d_{13} \omega_{13, n+1}^{(n)}(\tilde{t}); \\ \frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial x^n} &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial x^{n+1}} d_{12} \omega_{12, n+1}^{(n)}(t) = \frac{1}{(n+1)!} \delta_1 M d_{12} \omega_{12, n+1}^{(n)}(t); \\ \frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial x^{n-1} \partial y} &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial x^n \partial y} d_{12} \omega_{12, n}^{(n-1)} = \frac{1}{n!} \delta_2 M d_{12} \omega_{12, n}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Тогда (2.4.17) можно преобразовать к виду

$$\sum_{r=1}^k \sum_{j=2}^n D_{r,j} \frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial \tau_{r-1}^{n-j} \partial y^j} \sin^{j-1} \alpha_r \sin \alpha =$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_1 M \cos^n \alpha \left(\frac{d_{13} \omega_{13,n+1}^{(n)}(\tilde{t}) \cos \alpha}{(n+1)!} - \frac{d_{12} \omega_{12,n+1}^{(n)}(t)}{(n+1)!} \right) + \\
&\quad + \delta_2 M \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha \left(\frac{(n+1)d_{13} \omega_{13,n+1}^{(n)}(\tilde{t}) \cos \alpha}{(n+1)!} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{nd_{12} \omega_{12,n}^{(n-1)}(t)}{n!} - \frac{|u_k - u_0|}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = \\
&= \delta_1 MW_1(t) \cos^n \alpha + \delta_2 MW_2(t) \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha, \tag{2.4.19}
\end{aligned}$$

где $W_1(t)$ и $W_2(t)$ определены в леммах 2.4.2 и 2.4.1 соответственно.

Выбирая величины δ_1 и δ_2 таким образом, чтобы оба слагаемых в правой части равенства (2.4.19) имели одинаковые знаки, и применяя (2.4.9) и (2.4.10) получим

$$\left| \sum_{r=1}^k \sum_{j=2}^n D_{r,j} \frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial \tau_{r-1}^{n-j} \partial y^j} \sin^{j-1} \alpha_r \sin \alpha \right| \underset{n}{\gtrsim} H \sin \alpha,$$

откуда следует (2.4.18). Лемма 2.4.7 доказана. \square

Завершим доказательство теоремы 2.4.1. Пусть r и j таковы, что выполняется (2.4.18). Рассмотрим треугольник \mathcal{T}_r . Пусть q_0 – центр масс треугольника \mathcal{T}_r . Так как $j \geq 2$, и f^* имеет вид (2.4.6), то величина в левой части (2.4.18) является постоянной на \mathcal{T}_r , и тогда

$$\left| \frac{\partial^n e_r(q_0)}{\partial \tau_{r-1}^{n-j} \partial y^j} \right| \underset{n}{\gtrsim} \frac{MH}{|\sin^{j-1} \alpha_r|}.$$

Отметим также, что функция $e_r = (f^* - S_T)|_{\mathcal{T}_r}$, рассматриваемая на \mathcal{T}_r , является многочленом.

Пусть прямая p_1 параллельна вектору τ_{r-1} и проходит через точку q_0 . Рассмотрим отрезок $Q_1 = p_1 \cap \mathcal{T}_r$. Так как p_1 параллельна стороне $[c_1^{r-1}, c_2^{r-1}]$ треугольника \mathcal{T}_r , проходит через центр масс этого треугольника, и имеет место (2.4.7), выполняется неравенство $|Q_1| \underset{k_0}{\gtrsim} H$. Применяя

$(n - j)$ раз неравенство Маркова [11, §3.5], на отрезке Q_1 , приходим к существованию точек $q_j, q_{j+1}, \dots, q_{n-1} \in Q_1$ для которых имеют место неравенства

$$\left| \frac{\partial^{n-s} e_r(q_{n-s})}{\partial \tau_{r-1}^{n-j-s} \partial y^j} \right| \underset{n, k_0}{\gtrsim} \frac{MH^{s+1}}{|\sin^{j-1} \alpha_r|}. \quad (2.4.20)$$

$$s = 1, \dots, n - j.$$

Рассмотрим (2.4.20) при $s = n - j$. Пусть прямая p_2 проходит через точку q_j параллельно оси y . Введем в рассмотрение отрезок $Q_2 = p_2 \cap \mathcal{T}_r$. Учитывая расположение точки q_j ($q_j \in Q_1$, где Q_1 – отрезок, проходящий через центр тяжести треугольника \mathcal{T}_r параллельно стороне $[c_1^{r-1}, c_2^{r-1}]$, для которой имеет место (2.4.7)), можем утверждать, что

$$|Q_2| \underset{k_0}{\gtrsim} h_r,$$

где h_r – наименьшая из высот треугольника \mathcal{T}_r (принимая во внимание определение знака \gtrsim и (2.4.7), можно считать, что h_r – высота, опущенная на $[c_1^{r-1}, c_2^{r-1}]$). Применяя $(j - 2)$ раз неравенство Маркова на отрезке Q_2 , приходим к существованию точек $q_2, q_3, \dots, q_{j-1} \in Q_2$ для которых имеют место неравенства

$$\left| \frac{\partial^s e_r(q_s)}{\partial y^s} \right| \underset{n, k_0}{\gtrsim} \frac{MH^{n+1-s}}{|\sin^{s-1} \alpha_r|}, \quad (2.4.21)$$

$$s = 2, \dots, j.$$

Объединяя (2.4.20), (2.4.21) и (2.4.16), получаем (2.4.5). Теорема 2.4.1 доказана. \square

Замечание 2.4.1. Условие (2.4.4) в формулировке теоремы можно заменить на более наглядное условие (2.4.2) или более общие условия (2.4.9) и (2.4.10).

Доказательство. Выше было показано, что (2.4.4) является следствием (2.4.2). С другой стороны, условие (2.4.4) использовалось только для доказательства (2.4.9) и (2.4.10). Замечание 2.4.1 доказано. \square

Глава 3. Об оценках погрешности аппроксимации производных в случае интерполяции Лагранжа на d -симплексах

Пусть $d \geq 2$, т. е. $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ — d -симплекс с вершинами a_1, \dots, a_{d+1} ; $n \in \mathbb{N}$; $f \in W^{n+1}M(\Delta)$. Напомним, что $H = H(\Delta)$ — диаметр Δ ; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_{d+1})$ — барицентрические координаты точки симплекса относительно вершин a_1, \dots, a_{d+1} ; τ_{ij} — единичные векторы, направленные от a_i к a_j ; Как и в главе 1, будем обозначать через I множество мультииндексов

$$I = \{i = (i_1, \dots, i_{d+1}) \mid i \in \mathbb{Z}_+^{d+1}, |i| = i_1 + i_2 + \dots + i_{d+1} = n\}$$

и через $P_n^d = P_n^d[f]$ — многочлен степени не выше n по совокупности переменных, интерполирующий функцию f в узлах равномерной сетки на Δ , т. е. в узлах с барицентрическими координатами

$$\left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}, \dots, \frac{i_{d+1}}{n} \right), \quad i = (i_1, \dots, i_{d+1}) \in I. \quad (3.0.1)$$

Множество узлов интерполяции (3.0.1) обозначим \mathcal{J} .

Пусть $U_d = \{e_s\}_{s=1}^d$ — множество единичных линейно независимых векторов; ξ — произвольный единичный вектор из \mathbb{R}^d ; $\mathcal{U}_N = \{e_s\}_{s=1}^N$ — множество единичных векторов, параллельных ребрам d -симплекса Δ . Пусть θ_s — угол между ξ и прямой с направляющим вектором e_s (т. е. $0 \leq \theta_s \leq \pi/2$). Напомним, что характеристика симплекса, введенная П.Жамэ [57], имеет вид

$$\theta = \theta(\Delta) = \min_{U_d \subset \mathcal{U}_N} \max_{\xi \in \mathbb{R}^d} \min_{e_s \in U_d} \{\theta_s\}. \quad (3.0.2)$$

При этом, согласно [57], имеет место оценка

$$\mathbf{E}_{n,s}^d = \mathbf{E}_{n,s}^d(\Delta) = \mathbf{E}_s(\Delta, P_n^d) \lesssim_{n,d} M \frac{H^{n+1-s}}{(\cos \theta)^s}, \quad s = 0, \dots, n. \quad (3.0.3)$$

Далее нам будет нужна также характеристика,

$$\theta_{\mathcal{R}} = \theta_{\mathcal{R}}(\Delta) = \max_{\xi \in \mathbb{R}^d} \min_{e_s \in \mathcal{U}_N} \{\theta_s\}, \quad (3.0.4)$$

введенная А.Рэндом [67]. Отметим, что

$$\theta_{\mathcal{R}} \leq \theta. \quad (3.0.5)$$

§ 3.1. Новая геометрическая характеристика симплекса и ее сравнение с характеристикой П. Жамэ

Пусть вершины симплекса Δ занумерованы произвольным образом. Возьмем a_{l+1} ($2 \leq l \leq d$) и рассмотрим углы $\beta_{l+1,s} = \beta_{l+1,s}(\Delta)$ между прямыми, параллельными ребрам $a_{l+1}a_s$ ($s = 1, \dots, l$) и $(l-1)$ -мерной плоскостью, натянутой на точки a_1, a_2, \dots, a_l . Обозначим

$$\sin \beta_{l+1} = \sin \beta_{l+1}(\Delta) = \max_{s=1, \dots, l} \sin \beta_{l+1,s}. \quad (3.1.1)$$

Положим

$$\sin \Theta = \sin \Theta(\Delta) = \min_{l=2, \dots, d} \sin \beta_{l+1}. \quad (3.1.2)$$

Рассмотрим произвольное ориентированное дерево T с вершинами a_1, \dots, a_r ($r \leq d+1$), образующими геометрически независимую систему точек в \mathbb{R}^d (т. е. множество векторов $\{\overrightarrow{a_1 a_s} : s = 1, \dots, r\}$ линейно независимо – см., например, § 2 гл. XIV в [1]). Договоримся через e_{ij} обозначать ориентированное ребро (дугу) дерева, т. е. ребро с началом в вершине a_i и концом в вершине a_j . Будем отождествлять дуги e_{ij} и векторы $\overrightarrow{a_i a_j}$, в связи с чем дуги e_{ij} будем также называть векторами. Также договоримся о следующих обозначениях: $V(T)$ — множество вершин дерева T ; $U(T)$ — множество дуг дерева T ; $h_s(T)$ — расстояние от точки a_s до $(r-2)$ -мерной плоскости, натянутой на точки $V(T) \setminus \{a_s\}$.

Для симплекса Δ с вершинами a_1, a_2, \dots, a_{d+1} построим последовательность ориентированных деревьев $\{T_k\}_{k=1}^{d+1} = \{T_k(\Delta)\}_{k=1}^{d+1}$ с корнем a_1

следующим образом. Будем считать, что T_1 — дерево из одной вершины a_1 ; T_2 — дерево с вершинами a_1, a_2 и дугой e_{12} . Для $l = 2, \dots, d$ действуем следующим образом. Пусть построено дерево T_l с вершинами a_1, a_2, \dots, a_l ($l \leq d$). Возьмем вершину a_{l+1} и рассмотрим определенные выше величины $\sin \beta_{l+1}$ и $\sin \beta_{l+1,s}$. Положим

$$p = \min \{s : \sin \beta_{l+1} = \sin \beta_{l+1,s}, \quad s = 1, \dots, l\}. \quad (3.1.3)$$

Тогда дерево T_{l+1} получаем, добавляя к T_l вершину a_{l+1} и дугу $e_{p,l+1}$. Договоримся использовать запись $a_p = F(a_{l+1})$, означающую, что a_p является отцом a_{l+1} .

Теорема 3.1.1. *Для любого d -симплекса Δ справедливо отношение*

$$\cos \theta \underset{d}{\lesssim} \sin \Theta \underset{d}{\lesssim} \sqrt[d]{\cos \theta}.$$

Доказательство. Докажем, что $\sin \Theta \underset{d}{\lesssim} \sqrt[d]{\cos \theta}$. Не ограничивая общности будем считать, что $\cos \theta \leq 1/\sqrt{d}$, так как в противном случае $\cos \theta \underset{d}{\gtrsim} 1$ и доказываемое неравенство очевидно справедливо. Рассмотрим дерево T_{d+1} и множество его дуг $U(T_{d+1})$. Положим

$$\beta = \max_{\xi \in \mathbb{R}^d, \|\xi\|=1} \min_{\tau \in U(T_{d+1})} \{\theta_\tau\}, \quad (3.1.4)$$

где θ_τ — угол между вектором ξ и прямой с направляющим вектором τ . В силу (3.0.2) имеет место неравенство $\theta \leq \beta$, т. е.

$$\cos \beta \leq \cos \theta.$$

Множество дуг дерева T_{d+1} имеет вид $U(T_{d+1}) = \{e_{s_{i+1}, i+1}\}_{i=1}^d$, где s_{i+1} — такие числа из множества $\{1, \dots, d\}$, что $s_{i+1} < i+1$. Нормируем систему векторов $\{e_{s_{i+1}, i+1}\}_{i=1}^d$, получим $\{b_i\}_{i=1}^d$, где $b_i = e_{s_{i+1}, i+1}/|e_{s_{i+1}, i+1}|$, $i = 1, \dots, d$. Применим к системе векторов $\{b_i\}_{i=1}^d$ процесс ортогонализации

Грама-Шмидта, нормируем полученные векторы и получим соответственно ортонормированную систему векторов c_1, \dots, c_d , т. е.

$$c_1 = b_1, \quad c_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} (b_i, c_j) c_j \right) / \left| b_i - \sum_{j=1}^{i-1} (b_i, c_j) c_j \right|, \quad i = 2, \dots, d,$$

где через (\cdot, \cdot) обозначено скалярное произведение.

Рассмотрим (3.1.2) и возьмем наименьшее $r \in \{2, \dots, d\}$ такое, что $\sin \Theta = \sin \beta_{r+1}$. Тогда для всех $i = 1, \dots, d$ выполняется

$$\sin \Theta = \sin \beta_{r+1} = \frac{h_{r+1}(T_{r+1})}{|e_{s_{r+1}, r+1}|} = \left| \cos \left(e_{s_{r+1}, r+1}, c_r \right) \right| = |(b_r, c_r)| \leq |(b_i, c_i)|. \quad (3.1.5)$$

Пусть $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ – единичный вектор, на котором реализуется максимум в (3.1.4). Тогда

$$|(b_i, \xi_0)| = \left| \cos \left(\widehat{b_i}, \xi_0 \right) \right| = \left| \cos \left(e_{s_{i+1}, i+1}, \xi_0 \right) \right| \leq \cos \beta \leq \cos \theta \quad (3.1.6)$$

для всех $i = 1, \dots, d$. Разложим вектор ξ_0 по ортонормированному базису $\{c_s\}_{s=1}^d$, получим

$$\xi_0 = \sum_{s=1}^d \alpha_s c_s.$$

Отметим, что $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_d^2 = 1$. Для произвольного κ возьмем скалярное произведение

$$(b_\kappa, \xi_0) = \left(b_\kappa, \sum_{s=1}^d \alpha_s c_s \right) = \left(b_\kappa, \sum_{s=1}^{\kappa} \alpha_s c_s \right). \quad (3.1.7)$$

Если $\kappa = 1$, то $(b_1, \xi_0) = \alpha_1 (b_1, c_1) = \alpha_1$, откуда с учетом (3.1.6) следует $|\alpha_1| = |(b_1, \xi_0)| \leq \cos \theta$.

При $\kappa = 2$ получаем

$$|(b_2, \xi_0)| = |\alpha_1 (b_2, c_1) + \alpha_2 (b_2, c_2)| \leq \cos \theta.$$

Если $|\alpha_2| \geq (\cos \theta)^{1-1/d} / \sqrt{d}$, то

$$|(b_2, c_2)| \leq \frac{\cos \theta + |\alpha_1 (b_2, c_1)|}{|\alpha_2|} \lesssim_d \frac{\cos \theta + |\alpha_1|}{(\cos \theta)^{1-1/d}} \lesssim_d \frac{\cos \theta}{(\cos \theta)^{1-1/d}} = (\cos \theta)^{1/d}.$$

Если $|\alpha_2| < (\cos \theta)^{1-1/d}/\sqrt{d}$, то продолжаем процесс.

Берем $\kappa = 3$ и из (3.1.7) получаем оценку

$$|(b_3, \xi_0)| = |\alpha_1(b_3, c_1) + \alpha_2(b_3, c_2) + \alpha_3(b_3, c_3)| \leq \cos \theta.$$

Если $|\alpha_3| \geq (\cos \theta)^{1-2/d}/\sqrt{d}$, то

$$\begin{aligned} |(b_3, c_3)| &\leq \frac{\cos \theta + |\alpha_1(b_3, c_1)| + |\alpha_2(b_3, c_2)|}{|\alpha_3|} \underset{d}{\lesssim} \frac{\cos \theta + |\alpha_1| + |\alpha_2|}{(\cos \theta)^{1-2/d}} \underset{d}{\lesssim} \\ &\underset{d}{\lesssim} \frac{(\cos \theta)^{1-1/d}}{(\cos \theta)^{1-2/d}} = (\cos \theta)^{1/d}. \end{aligned}$$

Если $|\alpha_3| < (\cos \theta)^{1-2/d}/\sqrt{d}$, то рассматриваем $\kappa = 4$. Продолжая таким образом процесс, найдем $\kappa \in \{1, \dots, d\}$ для которого выполняется

$$|(b_\kappa, c_\kappa)| \underset{d}{\lesssim} (\cos \theta)^{1/d}$$

(это следует из того, что в силу равенства $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_d^2 = 1$ найдется $\kappa \in \{1, \dots, d\}$ такое, что $|\alpha_\kappa| \geq 1/\sqrt{d} \geq (\cos \theta)^{1-(\kappa-1)/d}/\sqrt{d}$). Таким образом, для доказательства неравенства $\sin \Theta \underset{d}{\lesssim} \sqrt[d]{\cos \theta}$ остается применить (3.1.5).

Докажем неравенство $\cos \theta \underset{d}{\lesssim} \sin \Theta$. Рассмотрим дерево T_{d+1} . Пусть s_0 — такой индекс ($3 \leq s_0 \leq d+1$), что $\sin \beta_{s_0} = \sin \Theta \leq \sin \beta_i$ для всех $i = 3, \dots, d+1$. Пусть $a_{p_0} = F(a_{s_0})$ — отец a_{s_0} . Удалим из T_{d+1} дугу e_{p_0, s_0} , получим два ориентированных дерева: $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}(a_1)$ — дерево с корнем a_1 , $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}(a_{s_0})$ — дерево с корнем a_{s_0} . Обозначим $\tilde{\Pi}_0 = \tilde{\Pi}(a_{p_0}, U(\mathfrak{T}_0) \cup U(\mathfrak{T}_1))$, $\tilde{\Pi}_1 = \tilde{\Pi}(a_{s_0}, U(\mathfrak{T}_0) \cup U(\mathfrak{T}_1))$ гиперплоскости, натянутые на дуги деревьев \mathfrak{T}_0 и \mathfrak{T}_1 и точки a_{p_0} , a_{s_0} соответственно. Пусть h — расстояние между $\tilde{\Pi}_0$ и $\tilde{\Pi}_1$; ξ — нормаль к $\tilde{\Pi}_0$ и $\tilde{\Pi}_1$; h_{s_0} — расстояние от точки a_{s_0} до плоскости $\tilde{\Pi}(a_1, U(T_{s_0-1}))$, натянутой на точку a_1 и дуги дерева T_{s_0-1} (т. е. до плоскости размерности $s_0 - 2$, натянутой на точки $a_1, a_2, \dots, a_{s_0-1}$). Тогда $h_{s_0} \geq h$. Заметим, что с учетом (3.0.5)

будет

$$\cos \theta \leq \cos \theta_{\mathcal{R}} \leq \max_{i,j \in \{1, \dots, d+1\}, i \neq j} \left| \cos(\widehat{\tau_{ij}, \xi}) \right|.$$

Докажем, что для всех $i, j \in \{1, \dots, d+1\}$, $i \neq j$, имеет место неравенство

$$\left| \cos(\widehat{\tau_{ij}, \xi}) \right| \lesssim \sin \beta_{s_0} = \frac{h_{s_0}}{|a_{s_0} a_{p_0}|} = \sin \Theta. \quad (3.1.8)$$

Если $a_i, a_j \in \mathfrak{T}_0$ или $a_i, a_j \in \mathfrak{T}_1$, то $a_i, a_j \in \tilde{\Pi}_0$ или $a_i, a_j \in \tilde{\Pi}_1$, т. е. $\tau_{ij} \perp \xi$ и $\cos(\widehat{\tau_{ij}, \xi}) = 0$. Остается рассмотреть ситуацию, когда a_i и a_j принадлежат разным деревьям \mathfrak{T}_0 и \mathfrak{T}_1 . В этом случае

$$\left| \cos(\widehat{\tau_{ij}, \xi}) \right| = \frac{h}{|a_i a_j|} \leq \frac{h_{s_0}}{|a_i a_j|}.$$

Тогда для доказательства (3.1.8) надо установить справедливость неравенства

$$|a_i a_j| \underset{d}{\gtrsim} |a_{s_0} a_{p_0}| \quad (3.1.9)$$

для тех пар вершин a_i и a_j , которые принадлежат разным плоскостям $\tilde{\Pi}_0$ и $\tilde{\Pi}_1$.

Рассмотрим последовательность деревьев $T_{s_0}, T_{s_0+1}, \dots, T_{d+1}$. В дереве T_{s_0} вершина a_{s_0} принадлежит $\tilde{\Pi}_1$; вершины a_l , $l = 1, \dots, s_0 - 1$, принадлежат $\tilde{\Pi}_0$; при этом $|a_{s_0} a_{p_0}| \leq |a_{s_0} a_l|$ для любого $l = 1, \dots, s_0 - 1$, так как $a_{p_0} = F(a_{s_0})$ и дерево T_{s_0} построено в соответствии с (3.1.3).

Далее действуем по индукции. Пусть имеется дерево T_k , $k = s_0, \dots, d$ и выполнены соотношения

$$a_1, \dots, a_{s_0-1}, a_{p_1}, \dots, a_{p_r} \in \mathfrak{T}_0,$$

$$a_{s_0}, a_{s_1}, \dots, a_{s_t} \in \mathfrak{T}_1,$$

$$\{1, \dots, s_0 - 1, p_1, \dots, p_r, s_0, \dots, s_t\} = \{1, \dots, k\}.$$

Пусть для любых $i = 1, \dots, s_0 - 1, p_1, \dots, p_r$ и $j = s_0, \dots, s_t$ выполняется (3.1.9). Рассмотрим a_{k+1} и дерево T_{k+1} и докажем неравенство (3.1.9)

для тех пар вершин a_i и a_j , принадлежащих разным плоскостям $\tilde{\Pi}_0$ и $\tilde{\Pi}_1$, которые появились с добавлением вершины a_{k+1} . Для этого надо рассмотреть два случая.

Если $F(a_{k+1}) = a_\mu$, где $\mu \in \{1, \dots, s_0 - 1, p_1, \dots, p_r\}$, то $F(a_{k+1}) \in \mathfrak{T}_0$ и $a_{k+1} \in \mathfrak{T}_0$, и для доказательства (3.1.9) надо оценить величины $|a_{k+1}a_{s_i}|$ при $i = 0, \dots, t$. Так как $F(a_{k+1}) = a_\mu$ и, следовательно, $|a_{k+1}a_\mu| \leq |a_{k+1}a_{s_i}|$ для любого $i = 0, \dots, t$, то в треугольнике с вершинами a_{k+1}, a_{s_i}, a_μ сторона $a_{k+1}a_{s_i}$ является средней или наибольшей стороной треугольника. Тогда с учетом предположения индукции получаем оценку

$$|a_{k+1}a_{s_i}| \gtrsim |a_{s_i}a_\mu| \gtrsim_d |a_{s_0}a_{p_0}|.$$

Если $F(a_{k+1}) = a_{s_\nu}$, где $\nu \in \{0, \dots, t\}$, т. е. $F(a_{k+1}) \in \mathfrak{T}_1$ и $a_{k+1} \in \mathfrak{T}_1$, то для доказательства (3.1.9) надо оценить величины $|a_{k+1}a_l|$ при $l \in \{1, \dots, s_0 - 1, p_1, \dots, p_r\}$. Так как $F(a_{k+1}) = a_{s_\nu}$ и, следовательно, $|a_{k+1}a_{s_\nu}| \leq |a_{k+1}a_l|$ для любого $l \in \{1, \dots, s_0 - 1, p_1, \dots, p_r\}$, то в треугольнике с вершинами a_{k+1}, a_{s_ν}, a_l сторона $a_{k+1}a_l$ является средней или наибольшей стороной треугольника. Тогда с учетом предположения индукции получаем оценку

$$|a_{k+1}a_l| \gtrsim |a_l a_{s_\nu}| \gtrsim_d |a_{s_0}a_{p_0}|.$$

Теорема 3.1.1 доказана. □

Замечание 3.1.2. При $d = 3$ для величины ϑ , определенной в (2.1.33), также справедливо соотношение

$$\cos \theta \lesssim \sin \vartheta \lesssim \sqrt[3]{\cos \theta}.$$

Доказательство. Пусть Δ — тетраэдр с вершинами a_1, a_2, a_3, a_4 , которые занумерованы таким образом, что если T_i — грань тетраэдра напротив вершины a_i и $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — соответственно наименьший, средний и

наибольший углы грани T_i ($i = 1, 2, 3, 4$), то

$$\sin \beta_4 \geq \sin \beta_i$$

для всех $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда, поскольку $\sin \vartheta \leq \sin \vartheta_4 \lesssim \sin \beta_4$ и $\sin \Theta = \min\{\sin \beta_4, \sin \vartheta_4\}$, то, применяя теорему 3.1.1, получаем соотношения

$$\sin \vartheta \lesssim \sin \Theta \lesssim \sqrt[3]{\cos \theta}.$$

Выбирая $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ такое, что $\sin \vartheta = \sin \vartheta_i$, из определения (3.0.4) и свойства (3.0.5) получаем оценку

$$\cos \theta \leq \cos \theta_{\mathcal{R}} \leq \sin \vartheta_i = \sin \vartheta.$$

Замечание 3.1.2 доказано. □

§ 3.2. Оценки снизу погрешности аппроксимации производных

Пусть $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность d -симплексов с вершинами $a_1^{(i)}, \dots, a_{d+1}^{(i)}$, у которой $\cos \theta_i \rightarrow 0$ (или, что то же самое, $\sin \Theta_i \rightarrow 0$) при $i \rightarrow \infty$, где $\theta_i = \theta(\Delta_i)$, $\Theta_i = \Theta(\Delta_i)$. Пусть $a_1^{(i)}$ и $a_2^{(i)}$ выбраны таким образом, что $\left|a_1^{(i)} a_2^{(i)}\right| \underset{d}{\asymp} H_i = H(\Delta_i)$. Нумерацию остальных вершин считаем произвольной.

Для каждого симплекса Δ_i построим последовательность ориентированных деревьев $\{T_s^{(i)}\}_{s=1}^{d+1} = \{T_s(\Delta_i)\}_{s=1}^{d+1}$ с корнями $a_1^{(i)}$ в соответствии с алгоритмом, описанным в предыдущем параграфе. Кроме того, введем в рассмотрение деревья $\mathcal{T}_{s,1}^{(i)}$ и $\mathcal{T}_{s,2}^{(i)}$, полученные из $T_s^{(i)}$ удалением ребра, соединяющего вершины $a_1^{(i)}$ и $a_2^{(i)}$, с корнями $a_1^{(i)}$ и $a_2^{(i)}$ соответственно ($s = 2, \dots, d+1$).

Последовательность $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ состоит из конечного числа подпоследовательностей $\{\Delta_{i_s}\}_{s=1}^{\infty}$, каждая из которых такова, что для некоторого $k \in \{2, \dots, d\}$ имеют место соотношения

$$\sin \beta_l(\Delta_{i_s}) \underset{d}{\gtrsim} 1 \quad \text{при} \quad 3 \leq l \leq k, \quad (3.2.1)$$

$$\sin \beta_{k+1}(\Delta_{i_s}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty. \quad (3.2.2)$$

Если V — геометрически независимая система $(r + 1)$ точек в \mathbb{R}^d ($r \leq d$), \mathcal{T} — ориентированное дерево со множеством вершин V , то через $\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(\mathcal{T})$ будем обозначать плоскость размерности r , натянутую на эти точки. Через $\rho(v_1, v_2)$ обозначим расстояние между v_1 и v_2 , где под v_i ($i = 1, 2$) можем понимать точку, прямую или плоскость некоторой размерности; через $\alpha(v_1, v_2)$ — угол между v_1 и v_2 , где v_i ($i = 1, 2$) может быть вектором, прямой или плоскостью некоторой размерности (v_1 или v_2 также могут быть точками, в этом случае по определению полагаем $\alpha(v_1, v_2) = \pi/2$).

Теорема 3.2.1. Пусть в последовательности $\{\Delta_i\}_{i=1}^\infty$ имеется подпоследовательность $\{\Delta_{i_s}\}_{s=1}^\infty$ такая, что для некоторого k выполняются соотношения (3.2.1)–(3.2.2); l_{i_s} — прямая, проходящая через вершины $a_{k+1}^{(i_s)}$ и $F(a_{k+1}^{(i_s)})$; пусть число $j \in \{1, 2\}$ таково, что $a_{k+1}^{(i_s)} \in \mathcal{T}_{k+1, j}^{(i_s)}$. Если

$$\frac{\rho\left(a_{k+1}^{(i_s)}, F(a_{k+1}^{(i_s)})\right)}{H_{i_s}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty \quad (3.2.3)$$

и

$$\frac{\sin \beta_{k+1}(\Delta_{i_s})}{\sin \alpha\left(l_{i_s}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k, j}^{(i_s)})\right)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty, \quad (3.2.4)$$

то найдется последовательность положительных вещественных чисел $\{w_{i_s}\}_{s=1}^\infty$ такая, что $w_{i_s} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, и для каждого $\nu = 1, \dots, n$ и каждого i_s имеют место оценки

$$\mathbf{E}_{d, n}^d(\Delta_{i_s}) \gtrsim M \frac{H_{i_s}^{n+1-\nu}}{w_{i_s}}. \quad (3.2.5)$$

Доказательство. Для доказательства оценок (3.2.5) построим последовательность функций f_{i_s} такую, что при каждом $\nu = 1, \dots, n$ для некоторых векторов $\xi_1^{(i_s)}, \dots, \xi_\nu^{(i_s)}$ будут иметь место неравенства

$$\left\| D_{\xi_1^{(i_s)} \dots \xi_\nu^{(i_s)}}^\nu (f_{i_s} - P_n^d[f_{i_s}]) \right\|_{\Delta_{i_s}} \gtrsim M \frac{H_{i_s}^{n+1-\nu}}{w_{i_s}}.$$

Чтобы упростить обозначения, будем считать, что подпоследовательность $\{\Delta_{i_s}\}_{s=1}^{\infty}$ совпадает с исходной последовательностью $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$, т. е. $i_s = s$ для всех $s \in \mathbb{N}$.

При $d = 2$ для равнобедренного тупоугольного треугольника теорема доказана в [18], для произвольного треугольника — в § 2.1 (в этом случае $k = 2$; $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,j}^{(i_s)})$ является точкой и $\alpha(l_{i_s}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,j}^{(i_s)})) = \pi/2$), поэтому далее считаем, что $d \geq 3$ и $k \geq 3$. Для удобства обозначений договоримся не писать индексы i и считать, что $\Delta = \Delta_i$. Также, если обсуждается некоторая геометрическая характеристика $\chi^{(i)} = \chi(\Delta_i)$ или $\phi_i = \phi(\Delta_i)$ симплекса Δ_i , то индекс i писать не будем. При этом под записью $\chi \rightarrow A$ при $\cos \theta \rightarrow 0$ или $\phi \rightarrow A$ при $\cos \theta \rightarrow 0$ (где $A \in \mathbb{R}$ или $A = \infty$) будем понимать, что некоторая последовательность величин $\{\chi^{(i)}\}_{i=1}^{\infty} = \{\chi(\Delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ или $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\phi(\Delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ обладает свойством $\chi^{(i)} \rightarrow A$ или $\phi_i \rightarrow A$ при $i \rightarrow \infty$, если последовательность $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что $\cos \theta_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Если $\chi/\phi \rightarrow 0$ при $\cos \theta \rightarrow 0$, то будем писать $\chi \ll \phi$.

Через $\Delta[j] = \Delta_i[j]$ обозначим $(j - 1)$ -симплексы с вершинами $a_1 = a_1^{(i)}, \dots, a_j = a_j^{(i)}$ ($2 \leq j \leq d+1$). Так как для любой непрерывной функции g , определенной на Δ , справедливо неравенство

$$\max_{u \in \Delta} |g(u)| \geq \max_{u \in \Delta[k+1]} |g(u)|,$$

для доказательства оценки (3.2.5) достаточно рассмотреть функцию f , заданную на $\Delta[k+1]$ и многочлен $P_n^k = P_n^k[f]$ степени не выше n по совокупности переменных, определенный на $\Delta[k+1]$ и интерполирующий f в тех узлах (3.0.1), которые принадлежат $\Delta[k+1]$, и оценить снизу величину $\|D_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu (f - P_n^k[f])\|_{\Delta[k+1]}$. Действительно, если функцию $f = f(u)$, где $u \in \Delta[k+1]$, рассматривать как функцию f , определенную на Δ , то разность $f - P_n^d$, где P_n^d — многочлен степени n , определенный на Δ и интерполирующий функцию f в узлах (3.0.1), на симплексе $\Delta[k+1]$ совпадает с $f - P_n^k$. Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением

k -симплекса $\Delta[k+1] \subset \mathbb{R}^k$. Обозначим

$$\mathbf{e}(u) = \mathbf{e}[f](u) = f(u) - P_n^k[f](u),$$

где $u \in \Delta[k+1]$.

Пусть G_k — гиперплоскость в \mathbb{R}^k , натянутая на точки a_1, \dots, a_k ; ζ_k — единичная нормаль к G_k . Положим $h_k = \rho(a_{k+1}, G_k)$. Пусть \mathbf{c} — проекция точки a_{k+1} на G_k ; τ_{cj} — единичные векторы, направленные от \mathbf{c} к a_j , $j = 1, \dots, k$.

Не ограничивая общности, для определенности можем считать, что $a_{k+1} \in \mathcal{T}_{k+1,2}$. Так как дерево T_{k+1} строится с учетом условия (3.1.3), то в этом случае $|a_1 a_{k+1}| \gtrsim H/(2^{k-1})$, т. е. $|a_1 a_{k+1}| \asymp |a_1 \mathbf{c}| \asymp H$ (действительно, $|a_1 \mathbf{c}| \asymp |a_1 a_{k+1}|$, так как из того, что $\sin \beta_{k+1}(\Delta) \rightarrow 0$ следует $\sin \alpha(\overrightarrow{a_1 a_{k+1}}, G_k) \rightarrow 0$).

Лемма 3.2.1. Пусть f — многочлен степени $n+1$ такой, что $\partial f / \partial \zeta_k \equiv 0$ и $P_n^k[f](u) = 0$ при всех $u \in \Delta[k]$. Тогда имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{\nu} C_{\nu}^j \frac{\partial^{\nu} \mathbf{e}(a_1)}{\partial \tau_{c1}^{\nu-j} \partial \zeta_k^j} \cos^{\nu-j} \beta_{k+1,1} \sin^j \beta_{k+1,1} = \mu[f], \quad (3.2.6)$$

где

$$\mu[f] = \cos^{\nu} \beta_{k+1,1} \left(\frac{\cos^{n+1-\nu} \beta_{k+1,1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} \omega_{n+1}^{(\nu)}(|a_1 a_{k+1}|) - \frac{\partial^{\nu} \mathbf{e}(a_1)}{\partial \tau_{c1}^{\nu}} \right)$$

$$u \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n \left(x - \frac{i}{n} |a_1 a_{k+1}| \right).$$

Доказательство. Отметим, что поскольку $P_n^k[f](u) = 0$ при всех $u \in \Delta[k]$, то $\mathbf{e}[f](u) = f(u)$ при всех $u \in \Delta[k]$.

Так как f — многочлен степени $n+1$ и сужение P_n^k на прямую, проходящую через точки a_1 и a_{k+1} , является многочленом одной переменной,

интерполирующим сужение функции f на эту прямую в равномерных узлах отрезка $a_1 a_{k+1}$, то

$$\frac{\partial^\nu \mathbf{e}(a_1)}{\partial \tau_{k+1,1}^\nu} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial \tau_{k+1,1}^{n+1}} \omega_{n+1}^{(\nu)}(|a_1 a_{k+1}|).$$

С другой стороны, если $\beta_{k+1,1}$ — угол между векторами $\tau_{k+1,1}$ и τ_{c1} (или, что то же самое, $\beta_{k+1,1}$ — угол между прямой, параллельной вектору $\tau_{k+1,1}$, и гиперплоскостью G_k), то

$$\frac{\partial^\nu \mathbf{e}(a_1)}{\partial \tau_{k+1,1}^\nu} = \frac{\partial^\nu \mathbf{e}(a_1)}{\partial \tau_{c1}^\nu} \cos^\nu \beta_{k+1,1} + \sum_{j=1}^{\nu} C_\nu^j \frac{\partial^\nu \mathbf{e}(a_1)}{\partial \tau_{c1}^{\nu-j} \partial \zeta_k^j} \cos^{\nu-j} \beta_{k+1,1} \sin^j \beta_{k+1,1}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{\nu} C_\nu^j \frac{\partial^\nu \mathbf{e}(a_1)}{\partial \tau_{c1}^{\nu-j} \partial \zeta_k^j} \cos^{\nu-j} \beta_{k+1,1} \sin^j \beta_{k+1,1} = \mu[f],$$

где

$$\mu[f] = \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial \tau_{k+1,1}^{n+1}} \omega_{n+1}^{(\nu)}(|a_1 a_{k+1}|) - \frac{\partial^\nu \mathbf{e}(a_1)}{\partial \tau_{c1}^\nu} \cos^\nu \beta_{k+1,1}.$$

Так как $\partial f / \partial \zeta_k \equiv 0$, то

$$\begin{aligned} \mu[f] &= \frac{\omega_{n+1}^{(\nu)}(|a_1 a_{k+1}|)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} \cos^{n+1} \beta_{k+1,1} - \frac{\partial^\nu \mathbf{e}(a_1)}{\partial \tau_{c1}^\nu} \cos^\nu \beta_{k+1,1} = \\ &= \cos^\nu \beta_{k+1,1} \left(\frac{\cos^{n+1-\nu} \beta_{k+1,1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} \omega_{n+1}^{(\nu)}(|a_1 a_{k+1}|) - \frac{\partial^\nu \mathbf{e}(a_1)}{\partial \tau_{c1}^\nu} \right). \end{aligned}$$

Лемма 3.2.1 доказана. \square

Возьмем точки из множества (3.0.1), принадлежащие ребру $a_1 a_2$, и обозначим их

$$u_j = \frac{j}{n} a_1 + \frac{n-j}{n} a_2, \quad j = 0, \dots, n.$$

Построим гиперплоскости Π_j , каждая из которых натянута на векторы $U(\mathcal{T}_{k,1}) \cup U(\mathcal{T}_{k,2}) \cup \{\zeta_k\}$ и соответственно точку u_j , $j = 0, \dots, n$. Пусть $l_j = 0$, $j = 0, \dots, n$, — такие уравнения гиперплоскостей Π_j в некоторой

системе координат, что $|\nabla l_j| = 1$ (символом ∇ обозначаем градиент). Положим

$$f^* = \delta M \prod_{j=0}^n l_j, \quad (3.2.7)$$

где δ – константа, такая, что $|\delta| \underset{n}{\gtrsim} 1$ и выполняется условие $f^* \in W^{n+1}M(\Delta)$. Обозначим через L_0 и L_n плоскости размерности $k-2$, натянутые на векторы $U(\mathcal{T}_{k,1}) \cup U(\mathcal{T}_{k,2})$ и точки $a_1 = u_0$ и $a_2 = u_n$ соответственно. Пусть

$$\mathbf{e}^* = \mathbf{e}[f^*].$$

Лемма 3.2.2. *Если $b \in \mathcal{J} \cap \Delta[k]$, то $f^*(b) = 0$.*

Доказательство. Так как $b \in \mathcal{J} \cap \Delta[k]$, то

$$b = \frac{j_1}{n} a_1 + \frac{j_2}{n} a_2 + \cdots + \frac{j_k}{n} a_k,$$

где $j_s \geq 0$, $j_1 + j_2 + \cdots + j_k = n$. Определим два множества индексов I_1 и I_2 следующим образом:

$$I_1 = \{s : a_s \in \mathcal{T}_{k,1}\}, \quad I_2 = \{s : a_s \in \mathcal{T}_{k,2}\}.$$

Положим $r_1 = \sum_{s \in I_1} j_s$, $r_2 = \sum_{s \in I_2} j_s$. Отметим, что $r_1 + r_2 = n$. Тогда

$$b = \sum_{s \in I_1} \frac{j_s a_s}{n} + \sum_{s \in I_2} \frac{j_s a_s}{n} = \frac{r_1}{n} \sum_{s \in I_1} \frac{j_s a_s}{r_1} + \frac{r_2}{n} \sum_{s \in I_2} \frac{j_s a_s}{r_2} = \frac{r_1}{n} t_1 + \frac{r_2}{n} t_2,$$

где $t_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,1}) \subset \Pi_0$, $t_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}) \subset \Pi_n$. Таким образом, $b \in \Pi_{r_2}$, т. е. $l_{r_2}(b) = 0$ и, следовательно, $f^*(b) = 0$. Лемма 3.2.2 доказана. \square

Отметим, что из леммы 3.2.2 следует, что $P_n^k[f^*](u) = 0$ и $\mathbf{e}^*(u) = f^*(u)$ при всех $u \in \Delta[k]$.

Лемма 3.2.3. *Справедливо соотношение $\rho(\Pi_0, \Pi_n) = \rho(L_0, L_n) \underset{d}{\asymp} H$.*

Доказательство. Так как $\rho(\Pi_0, \Pi_n) = \rho(L_0, L_n) = \rho(a_2, L_0)$, то достаточно оценить $\rho(a_2, L_0)$. Так как H — диаметр Δ и $|a_1 a_2| \underset{d}{\asymp} H$, то $\rho(a_2, L_0) \underset{d}{\lesssim} H$. Покажем, что $\rho(a_2, L_0) \underset{d}{\gtrsim} H$.

Пусть \mathfrak{L}_s — объем симплекса $\Delta[s+1]$ с вершинами a_1, \dots, a_{s+1} в \mathbb{R}^s , $s = 1, \dots, k-1$. Используем следующую формулу для вычисления объема симплекса [3, п.9.12.4.4]:

$$\mathfrak{L}_s = \frac{1}{s} \rho(a_{s+1}, G_s) \mathfrak{L}_{s-1},$$

где G_s — гиперплоскость в \mathbb{R}^s , натянутая на вершины a_1, \dots, a_s .

Так как $\sin \beta_l \underset{d}{\gtrsim} 1$ при всех $l = 3, \dots, k$, то

$$\mathfrak{L}_{k-1} \underset{d}{\gtrsim} \prod_{e_{ij} \in U(T_k)} |e_{ij}|.$$

С другой стороны, если $\tilde{\mathfrak{L}}_{k-1}$ — объем $(k-1)$ -симплекса в \mathbb{R}^{k-1} , образованного векторами из $U(T_k)$, приведенными к общему началу, то $\tilde{\mathfrak{L}}_{k-1} = \mathfrak{L}_{k-1}$. Пусть $\mathfrak{U} = U(T_k) \setminus \{e_{12}\}$. Тогда

$$\mathfrak{L}_{k-1} = \tilde{\mathfrak{L}}_{k-1} \underset{d}{\lesssim} \rho(a_2, L_0) \prod_{e_{ij} \in \mathfrak{U}} |e_{ij}|,$$

откуда следует, что

$$\rho(a_2, L_0) \underset{d}{\gtrsim} \left(\prod_{e_{ij} \in U(T_k)} |e_{ij}| \right) \left(\prod_{e_{ij} \in \mathfrak{U}} |e_{ij}| \right)^{-1} \underset{d}{\asymp} |a_1 a_2| \underset{d}{\asymp} H.$$

Лемма 3.2.3 доказана. \square

Отметим, что так как $a_{k+1} \in \mathcal{T}_{k+1,2}$, то условие (3.2.3) означает справедливость неравенств

$$\rho(\mathbf{c}, \Pi_0) \underset{d}{\gtrsim} H, \tag{3.2.8}$$

$$l_0(\mathbf{c}) l_0(a_2) > 0 \tag{3.2.9}$$

(последнее неравенство означает, что точки \mathbf{c} и a_2 лежат в одном из двух полупространств, на которые \mathbb{R}^k делится гиперплоскостью Π_0).

Лемма 3.2.4. Вектор τ_{c1} не коллинеарен гиперплоскости Π_0 .

Доказательство. Так как $\rho(\mathbf{c}, \Pi_0) = \rho(\mathbf{c}, L_0) \underset{d}{\asymp} H$ и $a_1 \in \Pi_0$, то действительно вектор τ_{c1} не коллинеарен гиперплоскости Π_0 . Лемма 3.2.4 доказана. \square

Обозначим через l_{1c} прямую, проходящую через точки a_1 и \mathbf{c} ; под \mathbf{r}_{1q} договоримся понимать расстояние от a_1 до точки \mathbf{q} пересечения прямой l_{1c} с гиперплоскостью Π_n (также точку \mathbf{q} можем рассматривать как точку пересечения прямой l_{1c} с плоскостью L_n размерности $k - 2$). Будем считать, что \mathbf{q} не является одной из вершин дерева $\mathcal{T}_{k,2}$. Действительно, мы имеем такую возможность, так как если $\mathbf{q} \in V(\mathcal{T}_{k,2})$, то мы можем рассмотреть треугольник с вершинами a_1, a_{k+1}, \mathbf{q} . Обозначим через β^* угол этого треугольника при вершине \mathbf{q} . Тогда $\sin \beta^* \leq \sin \beta_k$, так как \mathbf{c} лежит на отрезке с концами a_1 и \mathbf{q} . Таким образом, для доказательства теоремы мы можем перейти к рассмотрению данного треугольника, а случай $d = 2$ рассмотрен в § 2.1.

Лемма 3.2.5. Если $\mathcal{T}_{k,1}$ состоит из одной вершины, то теорема 3.2.1 справедлива.

Доказательство. Отметим, что так как мы считаем $a_{k+1} \in \mathcal{T}_{k+1,2}$, то условие леммы означает также, что и $\mathcal{T}_{k+1,1}$ состоит из одной вершины. Используем лемму 3.2.1. Так как $P_n^k[f^*]|_{\Delta[k]} \equiv 0$ и f^* имеет вид (3.2.7), то $\mathbf{e}^*|_{l_{1c}}$ является остатком одномерной интерполяционной формулы Лагранжа с равномерными узлами, расстояние между которыми равно \mathbf{r}_{1q}/n . Таким образом, если точка u лежит на отрезке с концами a_1 и \mathbf{q} , то

$$\mathbf{e}^*(u) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \tau_{c0}^{n+1}} \tilde{\omega}_{n+1}(\xi),$$

где ξ — расстояние от u до \mathbf{q} (вектор τ_{c1} направлен от \mathbf{q} к a_1 в силу (3.2.9)) и

$$\tilde{\omega}_{n+1}(\xi) = \prod_{j=0}^n \left(\xi - \frac{j}{n} \mathbf{r}_{1q} \right),$$

откуда получаем

$$\frac{\partial^\nu \mathbf{e}^*(a_1)}{\partial \tau_{c1}^\nu} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} \tilde{\omega}_{n+1}^{(\nu)}(\mathbf{r}_{1q}),$$

и тогда величина μ из (3.2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \mu[f^*] &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} \cos^\nu \beta_{k+1,1} \times \\ &\times \left(\omega_{n+1}^{(\nu)}(|a_1 a_{k+1}|) \cos^{n+1-\nu} \beta_{k+1,1} - \tilde{\omega}_{n+1}^{(\nu)}(\mathbf{r}_{1q}) \right) = \\ &= \frac{\nu!}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} \cos^\nu \beta_{k+1,1} \times \\ &\times \sum_{\substack{j_1, \dots, j_{n+1-\nu} \in \{1, \dots, n\} \\ j_l \neq j_m \Leftrightarrow l \neq m}} \frac{j_1 \dots j_{n+1-\nu}}{n^{n+1-\nu}} \left(|a_1 a_{k+1}|^{n+1-\nu} \cos^{n+1-\nu} \beta_{k+1,1} - \mathbf{r}_{1q}^{n+1-\nu} \right) \underset{d,n}{\approx} \\ &\underset{d,n}{\approx} \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} \left(|a_1 \mathbf{c}|^{n+1-\nu} - \mathbf{r}_{1q}^{n+1-\nu} \right) \cos^\nu \beta_{k+1,1}. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

По условию теоремы $\cos \theta \rightarrow 0$ (или, что то же самое, $\sin \Theta \rightarrow 0$), поэтому $\cos^\nu \beta_{k+1,1} \gtrsim 1$. Учитывая, что

$$|a_1 \mathbf{c}|^{n+1-\nu} - \mathbf{r}_{1q}^{n+1-\nu} = (|a_1 \mathbf{c}| - \mathbf{r}_{1q}) \sum_{j=0}^{n-\nu} |a_1 \mathbf{c}|^{\nu-j} \mathbf{r}_{1q}^j,$$

получаем

$$|\mu[f^*]| \underset{d,n}{\gtrsim} \left| \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} \right| \left| |a_1 \mathbf{c}|^{n+1-\nu} - \mathbf{r}_{1q}^{n+1-\nu} \right| \underset{d,n}{\gtrsim} \left| \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} \right| \sigma_{cq} H^{n-\nu}, \quad (3.2.11)$$

где σ_{cq} — расстояние от \mathbf{c} до \mathbf{q} и $\sigma_{cq} = ||a_1 \mathbf{c}| - \mathbf{r}_{1q}|$ в силу (3.2.9).

Пусть ζ — единичный нормальный вектор к гиперплоскостям Π_i в \mathbb{R}^k , $i = 0, \dots, n$; γ — угол между τ_{c1} и ζ . Заметим, что (3.2.8) дает оценку

$$|\cos \gamma| = \frac{\rho(\mathbf{c}, \Pi_0)}{\rho(\mathbf{c}, a_1)} \underset{d}{\gtrsim} 1; \quad (3.2.12)$$

функция f^* имеет вид (3.2.7) и $|\nabla l_i| = 1$ для всех $i = 0, \dots, n$. Следовательно,

$$\left| \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} \right| = \left| \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \zeta^{n+1}} \cos^{n+1} \gamma \right| \underset{d,n}{\gtrsim} \left| \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \zeta^{n+1}} \right| \underset{n}{\gtrsim} M. \quad (3.2.13)$$

Положим

$$\mathbf{r} = \rho(a_{k+1}, F(a_{k+1})).$$

Так как $\mathcal{T}_{k,1}$ состоит из одной вершины, то $L_n = \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})$, и с учетом (3.2.4) будет

$$\frac{\rho(a_{k+1}, \mathbf{c})}{\rho(a_{k+1}, L_n)} = \frac{\rho(a_{k+1}, \mathbf{c})}{\rho(a_{k+1}, F(a_{k+1}))} \cdot \frac{\rho(a_{k+1}, F(a_{k+1}))}{\rho(a_{k+1}, L_n)} = \frac{\sin \beta_{k+1}(\Delta)}{\sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}))} \rightarrow 0$$

при $\cos \theta \rightarrow 0$. Ввиду того, что $\sin \beta_{k+1}(\Delta) \rightarrow 0$, т. е.

$$\begin{aligned} (\rho(\mathbf{c}, L_n))^2 &= (\rho(a_{k+1}, L_n))^2 - (\rho(a_{k+1}, \mathbf{c}))^2 = \\ &= (\rho(a_{k+1}, L_n))^2 \left(1 - \frac{(\rho(a_{k+1}, \mathbf{c}))^2}{(\rho(a_{k+1}, L_n))^2} \right) \asymp (\rho(a_{k+1}, L_n))^2, \end{aligned}$$

получаем соотношение

$$\begin{aligned} \sigma_{c\mathbf{q}} = \rho(\mathbf{c}, \mathbf{q}) &\geq \rho(\mathbf{c}, L_n) \asymp \rho(a_{k+1}, L_n) \asymp \rho(a_{k+1}, F(a_{k+1})) \sin \alpha(l, L_n) = \\ &= \mathbf{r} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})), \end{aligned}$$

и для f^* из (3.2.7) при некотором $s \in \{1, \dots, \nu\}$ с учетом (3.2.6), (3.2.11), (3.2.13) мы получаем оценку

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^\nu \mathbf{e}^*(a_1)}{\partial \tau_{c_1}^{\nu-s} \partial \zeta_k^s} \right| &\underset{d,n}{\gtrsim} M \frac{\mathbf{r} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})) H^{n-\nu}}{\sin^s \beta_{k+1,1}} = M \mathbf{r} H^{n-\nu} \frac{H^s}{h_k^s} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})) \underset{d,n}{\gtrsim} \\ &\underset{d,n}{\gtrsim} M H^{n+1-\nu} \frac{\sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}))}{\sin \beta_{k+1}(\Delta) \sin^{s-1} \beta_{k+1,1}}, \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

т. е. получаем (3.2.5) при

$$w_{i_s} = \frac{\sin \beta_{k+1}(\Delta_{i_s})}{\sin \alpha(l_{i_s}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}^{(i_s)}))}. \quad (3.2.15)$$

Лемма 3.2.5 доказана. \square

Перейдем к рассмотрению ситуации, когда в дереве $\mathcal{T}_{k,1}$ содержится более одной вершины.

Лемма 3.2.6. Если в дереве $\mathcal{T}_{k,1}$ содержится более одной вершины и $\sigma_{cq} \underset{d}{\gtrsim} \mathbf{r} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}))$, то теорема 3.2.1 справедлива.

Доказательство. В рассматриваемом случае, как и в лемме 3.2.5, остается справедливой оценка (3.2.11), и тогда из (3.2.6) следует, что найдется $s \in \{1, \dots, \nu\}$ такое, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^n \mathbf{e}^*(a_1)}{\partial \tau_{c1}^{n-s} \partial \nu_k^s} \right| &\underset{d,n}{\gtrsim} M \frac{\mathbf{r} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})) H^{n-\nu}}{\sin^s \beta_{k+1,1}} \underset{d,n}{\gtrsim} \\ &\underset{d,n}{\gtrsim} M H^{n+1-\nu} \frac{\sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}))}{\sin \beta_{k+1}(\Delta) \sin^{s-1} \beta_{k+1,1}}, \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

т. е. имеет место (3.2.5) при w_{i_s} вида (3.2.15). Лемма 3.2.6 доказана. \square

Остается рассмотреть случай, когда

$$\frac{\sigma_{cq}}{\mathbf{r} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}))} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \cos \theta \rightarrow 0. \quad (3.2.17)$$

Рассмотрим множество векторов $\{b_1, \dots, b_{k-1}\} = U(T_k)$. Будем считать, что нумерация этих векторов такова, что для некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$ выполнены соотношения $U(\mathcal{T}_{k,2}) = \{b_1, \dots, b_{j_0}\}$, $U(\mathcal{T}_{k,1}) = \{b_{j_0+1}, \dots, b_{k-2}\}$, $b_{k-1} = e_{12}$. Применим к $\{b_1, \dots, b_{k-1}\}$ процесс ортогонализации Грама-Шмидта, нормируем полученные векторы и получим ортонормированный базис $\{\eta_1, \dots, \eta_{k-1}\}$ в \mathbb{R}^{k-1} ; добавив вектор $\eta_k = \zeta_k$, получим ортонормированный базис в \mathbb{R}^k . Обозначим через $\alpha_j[\tau]$, $j = 1, \dots, k$, координаты произвольного вектора τ в введенном базисе, т. е.

$$\tau = \sum_{j=1}^k \alpha_j[\tau] \eta_j.$$

Положим $a = F(a_{k+1})$. Рассмотрим вектор $\vec{a}\mathbf{q} = \vec{a}\mathbf{c} + \vec{c}\mathbf{q}$. В силу (3.2.17) имеет место соотношение

$$|\mathbf{c}\mathbf{q}| = \sigma_{cq} \asymp \mathbf{r} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})) o(1),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $\cos \theta \rightarrow 0$. Отсюда, в частности, следует, что $|\vec{a\mathbf{q}}| \asymp |\vec{a\mathbf{c}}| = \mathbf{r} \cos \beta_{k+1}(\Delta) \asymp \mathbf{r}$. Пусть c_0 — проекция точки \mathbf{c} на $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{c}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})) &= \rho(\mathbf{c}, c_0) \geq \rho(a_{k+1}, c_0) - \rho(a_{k+1}, \mathbf{c}) \gtrsim \\ &\gtrsim \rho(a_{k+1}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})) - \mathbf{r} \sin \beta_{k+1}[\Delta] = \\ &= \mathbf{r} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})) - \mathbf{r} \sin \beta_{k+1}(\Delta) \gtrsim \mathbf{r} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})), \end{aligned}$$

что с учетом свойства $a \in \mathcal{T}_{k,2}$ и того, что $\{\eta_1, \dots, \eta_{j_0}\}$ получено в результате ортогонализации множества векторов $\{b_1, \dots, b_{j_0}\} = U(\mathcal{T}_{k,2})$, означает

$$\sum_{j=j_0+1}^k (\alpha_j[\vec{a\mathbf{c}}])^2 \gtrsim (\mathbf{r} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})))^2.$$

Так как $a \in G_k$ и $\mathbf{c} \in G_k$, то $\alpha_k[\vec{a\mathbf{c}}] = 0$. Так как $a \in \mathcal{T}_{k,2} \subset L_n$ и $\rho(\mathbf{c}, L_n) \leq \sigma_{cq} \asymp \mathbf{r} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}))o(1)$, то $\alpha_{k-1}[\vec{a\mathbf{c}}] \asymp \mathbf{r} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}))o(1)$. Таким образом, найдется $j_* \in \{j_0 + 1, \dots, k - 2\}$ такое, что $\alpha_{j_*}[\vec{a\mathbf{c}}] \underset{d}{\asymp} \mathbf{r} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}))$, откуда следует

$$\alpha_{j_*}[\vec{a\mathbf{q}}] \underset{d}{\asymp} \mathbf{r} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})). \quad (3.2.18)$$

Пусть положительное действительное число χ таково, что

$$\chi \asymp \mathbf{r}. \quad (3.2.19)$$

Введем в рассмотрение вектор

$$w = \vec{a\mathbf{q}} + \chi \tau_{1q},$$

где τ_{1q} — единичный вектор, направленный от a_1 к \mathbf{q} ($\tau_{1q} = -\tau_{c1}$). Построим гиперплоскость Π_n^* в \mathbb{R}^k , натянутую на множество векторов $U^* = \{\eta_1, \dots, \eta_{k-2}, w, \zeta_k\} \setminus \{\eta_{j_*}\}$ и точку a_2 . Далее для удобства обозначений и без ограничений общности будем считать, что $j^* = j_{k-2}$ и

$U^* = \{\eta_1, \dots, \eta_{k-3}, w, \zeta_k\}$. Пусть $l_n^* = 0$ — такое уравнение гиперплоскости Π_n^* , что $|\nabla l_n^*| = 1$. Положим

$$f^{**} = \delta M \left(\prod_{j=0}^{n-1} l_j \right) l_n^*, \quad (3.2.20)$$

где l_j , $j = 0, \dots, n-1$, — те же функции, что и в (3.2.7); δ — константа, такая, что $|\delta| \underset{n}{\gtrsim} 1$ и выполняется условие $f^{**} \in W^{n+1}M(\Delta)$. Пусть

$$\mathbf{e}^{**} = \mathbf{e}[f^{**}].$$

Лемма 3.2.7. *Если $b \in \mathcal{J} \cap \Delta[k]$, то $f^{**}(b) = 0$.*

Доказательство. Из доказательства леммы 3.2.2 следует, что точка b может быть представлена в виде

$$b = \sum_{s \in I_1} \frac{j_s a_s}{n} + \sum_{s \in I_2} \frac{j_s a_s}{n} = \frac{r_1}{n} \sum_{s \in I_1} \frac{j_s a_s}{r_1} + \frac{r_2}{n} \sum_{s \in I_2} \frac{j_s a_s}{r_2} = \frac{r_1}{n} t_1 + \frac{r_2}{n} t_2,$$

где $r_1, r_2 \in \{0, \dots, n\}$, $r_1 + r_2 = n$, $t_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,1})$, $t_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})$. Таким образом, если $r_2 \neq n$, то $b \in \Pi_{r_2}$, т. е. $l_{r_2}(b) = 0$ и, следовательно, $f^*(b) = 0$. Если $r_2 = n$, то $b \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})$, и тогда, поскольку Π_n^* натянута на множество векторов U^* , и $\eta_1, \dots, \eta_{j_0} \in U^*$, то $b \in \Pi_n^*$, откуда следует $l_n^*(b) = 0$ и $f^{**}(b) = 0$. Лемма 3.2.7 доказана. \square

Отметим, что из леммы 3.2.7 следует, что $P_n^k[f^{**}](u) = 0$ и $\mathbf{e}^{**}(u) = f^{**}(u)$ при всех $u \in \Delta[k]$.

Лемма 3.2.8. *Имеет место неравенство $\left| \frac{\partial l_n^*}{\partial \tau_{c1}} \right| \underset{d}{\gtrsim} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}))$.*

Доказательство. Пусть

$$v = w \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{k-3} \wedge \zeta_k,$$

т. е. v — векторное произведение векторов $w, \eta_1, \dots, \eta_{k-3}, \zeta_k$ в \mathbb{R}^k (см., например, [3, п. 8.11.8]). Тогда v является нормальным вектором для Π_n^* и

$$\pm \frac{\partial l_n^*}{\partial \tau_{c1}} = \pm (\nabla l_n^*, \tau_{c1}) = \frac{(v, \tau_{c1})}{|v|} = \frac{(w \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{k-3} \wedge \zeta_k, \tau_{c1})}{|v|} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|v|} (\vec{a\mathbf{q}} \wedge \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_{k-3} \wedge \zeta_k, \tau_{c1}) + \frac{\chi}{|v|} (\tau_{1q} \wedge \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_{k-3} \wedge \zeta_k, \tau_{c1}) = \\
&= \frac{1}{|v|} (\vec{a\mathbf{q}} \wedge \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_{k-3} \wedge \zeta_k, \tau_{c1}).
\end{aligned}$$

Положим

$$v_0 = \vec{a\mathbf{q}} \wedge \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_{k-3} \wedge \zeta_k. \quad (3.2.21)$$

Тогда

$$\pm \frac{\partial l_n^*}{\partial \tau_{c1}} = \pm \frac{(v_0, \tau_{c1})}{|v|} = \frac{|v_0| \cdot |\tau_{c1}| \cdot \cos \alpha(v_0, \tau_{c1})}{|v|} = \frac{|v_0| \cdot \cos \alpha(v_0, \tau_{c1})}{|v|}.$$

Так как v_0 определяется равенством (3.2.21), то v_0 является нормалью к гиперплоскости Π_n в \mathbb{R}^k (так как $\alpha_{j_*}[\vec{a\mathbf{q}}] = \alpha_{k-2}[\vec{a\mathbf{q}}] \neq 0$ в силу (3.2.18)). В соответствии с (3.2.8) имеет место неравенство $\rho(\mathbf{c}, \Pi_0) \underset{d}{\gtrsim} H$, откуда следует оценка

$$|\cos \alpha(v_0, \tau_{c1})| = |\sin \alpha(\tau_{c1}, \Pi_n)| = |\sin \alpha(\tau_{c1}, \Pi_0)| = \frac{\rho(\mathbf{c}, \Pi_0)}{|a_0 \mathbf{c}|} \underset{d}{\gtrsim} 1,$$

и тогда

$$\left| \frac{\partial l_n^*}{\partial \tau_{c1}} \right| \underset{d}{\gtrsim} \frac{|v_0|}{|v|}.$$

Пользуясь сведениями из [3, п. 8.11.8, п. 8.11.5] и тем, что $a \in L_n$ и $\mathbf{q} \in L_n$, т. е. $\zeta_k \perp \vec{a\mathbf{q}}$, оценим $|v_0|$ следующим образом:

$$|v_0|^2 = \begin{vmatrix} |\vec{a\mathbf{q}}|^2 & (\vec{a\mathbf{q}}, \eta_1) & (\vec{a\mathbf{q}}, \eta_2) & \cdots & (\vec{a\mathbf{q}}, \eta_{k-3}) & (\vec{a\mathbf{q}}, \zeta_k) \\ (\eta_1, \vec{a\mathbf{q}}) & (\eta_1, \eta_1) & (\eta_1, \eta_2) & \cdots & (\eta_1, \eta_{k-3}) & (\eta_1, \zeta_k) \\ (\eta_2, \vec{a\mathbf{q}}) & (\eta_2, \eta_1) & (\eta_2, \eta_2) & \cdots & (\eta_2, \eta_{k-3}) & (\eta_2, \zeta_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\eta_{k-3}, \vec{a\mathbf{q}}) & (\eta_{k-3}, \eta_1) & (\eta_{k-3}, \eta_2) & \cdots & (\eta_{k-3}, \eta_{k-3}) & (\eta_{k-3}, \zeta_k) \\ (\zeta_k, \vec{a\mathbf{q}}) & (\zeta_k, \eta_1) & (\zeta_k, \eta_2) & \cdots & (\zeta_k, \eta_{k-3}) & (\zeta_k, \zeta_k) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} |\vec{a}_{\mathbf{q}}|^2 & \alpha_1[\vec{a}_{\mathbf{q}}] & \alpha_2[\vec{a}_{\mathbf{q}}] & \dots & \alpha_{k-3}[\vec{a}_{\mathbf{q}}] & 0 \\ \alpha_1[\vec{a}_{\mathbf{q}}] & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_2[\vec{a}_{\mathbf{q}}] & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{k-3}[\vec{a}_{\mathbf{q}}] & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая полученный определитель по первой строке и принимая во внимание то, что $\alpha_{k-1}[\vec{a}_{\mathbf{q}}] = \alpha_k[\vec{a}_{\mathbf{q}}] = 0$, получим

$$|v_0|^2 = |\vec{a}_{\mathbf{q}}|^2 - \sum_{j=1}^{k-3} (\alpha_j[\vec{a}_{\mathbf{q}}])^2 = (\alpha_{k-2}[\vec{a}_{\mathbf{q}}])^2 = (\alpha_{j^*}[\vec{a}_{\mathbf{q}}])^2 \underset{d}{\gtrsim} (\mathbf{r} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})))^2.$$

Аналогично получаем

$$|v|^2 = |\vec{a}_{\mathbf{q}} + \chi\tau_{1q}|^2 - \sum_{j=1}^{k-3} (\vec{a}_{\mathbf{q}} + \chi\tau_{1q}, \eta_j)^2 \leq |\vec{a}_{\mathbf{q}} + \chi\tau_{1q}|^2,$$

откуда следует

$$|v| \leq |\vec{a}_{\mathbf{q}}| + |\chi| \lesssim \mathbf{r}.$$

Таким образом,

$$\left| \frac{\partial l_n^*}{\partial \tau_{c1}} \right| \underset{d}{\gtrsim} \frac{\mathbf{r} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}))}{\mathbf{r}} = \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})).$$

Лемма 3.2.8 доказана. \square

Лемма 3.2.9. Если в дереве $\mathcal{T}_{k,1}$ содержится более одной вершины и выполнено соотношение (3.2.17), то теорема 3.2.1 справедлива.

Доказательство. Пусть $p^* = \prod_{j=0}^{n-1} l_j$. Тогда $f^{**} = \delta M p^* l_n^*$ и

$$\frac{\partial^{n+1} f^{**}}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} = \delta M(n+1) \frac{\partial^n p^*}{\partial \tau_{c1}^n} \frac{\partial l_n^*}{\partial \tau_{c1}}.$$

Аналогично (3.2.13) будет

$$\left| \frac{\partial^n p^*}{\partial \tau_{c1}^n} \right| \underset{d,n}{\gtrsim} \left| \frac{\partial^n p^*}{\partial \zeta^n} \right| \underset{d,n}{\gtrsim} 1,$$

и в результате мы получаем оценку

$$\left| \frac{\partial^{n+1} f^{**}}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} \right| \underset{d,n}{\gtrsim} M \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})). \quad (3.2.22)$$

Так как $P_n^k[f^{**}]|_{\Delta[k]} \equiv 0$ и f^{**} имеет вид (3.2.20), то $\mathbf{e}^{**}|_{l_{1c}}$ является остатком одномерной интерполяционной формулы Лагранжа с узлами $\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_n$, определяемыми следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{n-j} &= a_1 + \frac{j}{n} \mathbf{r}_{1q} \tau_{1q}, \quad j = 0, \dots, n-1, \\ \bar{u}_0 &= a_1 + (\mathbf{r}_{1q} + \chi) \tau_{1q} \end{aligned}$$

(напомним, что $\mathbf{r}_{1q} = \rho(a_1, \mathbf{q})$). Действительно, узел \bar{u}_0 является точкой пересечения прямой l_{1c} и гиперплоскости Π_n^* : так как точка a_2 и дуги $U(\mathcal{T}_{k,2})$ лежат в Π_n^* , то $a \in \Pi_n^*$, и, прикладывая вектор $w = \overrightarrow{a\mathbf{q}} + \chi \tau_{1q}$ к точке a , мы оказываемся в точке прямой l_{1c} , оставаясь в Π_n^* .

Функция f^{**} удовлетворяет условиям леммы 3.2.1, и поэтому для нее имеет место (3.2.6). При этом

$$\frac{\partial^\nu \mathbf{e}^{**}(a_1)}{\partial \tau_{c1}^\nu} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f^{**}}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} \bar{\omega}_{n+1}^{(\nu)}(\mathbf{r}_{1q} + \chi),$$

где $\bar{\omega}_{n+1}(x) = x \prod_{j=1}^n \left(x - \frac{j}{n} \mathbf{r}_{1q} - \chi \right)$. Сравнивая $\mu[f^{**}]$ с $\mu[f^*]$ из (3.2.10), отметим, что

$$\begin{aligned} &\omega_{n+1}^{(\nu)}(|a_1 a_{k+1}|) \cos^{n+1-\nu} \beta_{k+1,1} - \bar{\omega}_{n+1}^{(\nu)}(\mathbf{r}_{1q} + \chi) = \\ &= \omega_{n+1}^{(\nu)}(|a_1 a_{k+1}|) \cos^{n+1-\nu} \beta_{k+1,1} - \tilde{\omega}_{n+1}^{(\nu)}(\mathbf{r}_{1q}) - C_1 \chi \mathbf{r}_{1q}^{n-\nu}, \end{aligned}$$

где C_1 — некоторое положительное число. Тогда при некоторых положительных C_2, C_3 аналогично (3.2.10)–(3.2.11) получаем оценку следующего вида:

$$\begin{aligned}
|\mu[f^{**}]| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f^{**}}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} \cos^\nu \beta_{k+1,1} \left(\omega_{n+1}^{(\nu)} (|a_1 a_{k+1}|) \cos^{n+1-\nu} \beta_{k+1,1} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \bar{\omega}_{n+1}^{(\nu)} (\mathbf{r}_{1q} + \chi) \right) \right| \underset{d,n}{\gtrsim} \\
&\underset{d,n}{\gtrsim} \left| \frac{\partial^{n+1} f^{**}}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} \right| \left(C_1 \chi \mathbf{r}_{1q}^{n-\nu} - \left| \omega_{n+1}^{(\nu)} (|a_1 a_{k+1}|) \cos^{n+1-\nu} \beta_{k+1,1} - \bar{\omega}_{n+1}^{(\nu)} (\mathbf{r}_{1q}) \right| \right) \underset{d,n}{\gtrsim} \\
&\underset{d,n}{\gtrsim} \left| \frac{\partial^{n+1} f^{**}}{\partial \tau_{c1}^{n+1}} \right| \left(C_2 \chi H^{n-\nu} - C_3 \sigma_{cq} H^{n-\nu} \right) \underset{d,n}{\gtrsim} \\
&\underset{d,n}{\gtrsim} M \left(C_2 \chi H^{n-\nu} - C_3 \sigma_{cq} H^{n-\nu} \right) \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношение (3.2.17) и подбирая величину χ таким образом, чтобы выполнялись (3.2.19) и неравенство $C_2 \chi - C_3 \sigma_{cq} \gtrsim \mathbf{r}$, приходим к неравенству

$$|\mu[f^{**}]| \underset{d,n}{\gtrsim} M \mathbf{r} H^{n-\nu} \sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})).$$

Таким образом, для f^{**} при некотором $s \in \{1, \dots, \nu\}$ с учетом (3.2.6) аналогично (3.2.14) мы получаем оценку

$$\left| \frac{\partial^\nu \mathbf{e}^{**}(a_1)}{\partial \tau_{c1}^{\nu-s} \partial \zeta_k^s} \right| \underset{d,n}{\gtrsim} M H^{n+1-\nu} \frac{\sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}))}{\sin \beta_{k+1}(\Delta) \sin^{s-1} \beta_{k+1,1}},$$

т. е. получаем (3.2.5) при w_{i_s} вида (3.2.15). Лемма 3.2.9 доказана. \square

Полученные леммы 3.2.5, 3.2.6, 3.2.9 означают, что теорема 3.2.1 доказана. \square

Сформулируем и докажем несколько утверждений в обозначениях, введенных выше. А именно, пусть Δ — d -симплекс с вершинами a_1, \dots, a_{d+1} , занумерованных таким образом, что $|a_1 a_2| \asymp_d H$, и пусть $\cos \theta \rightarrow 0$. Пусть для некоторого $k \in \{2, \dots, d\}$ выполняются соотношения

$$\sin \beta_l(\Delta) \underset{d}{\gtrsim} 1 \quad \text{при} \quad 3 \leq l \leq k, \quad (3.2.23)$$

$$\sin \beta_{k+1}(\Delta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \cos \theta \rightarrow 0. \quad (3.2.24)$$

В соответствии с алгоритмами, изложенными в параграфах 3.1 и 3.2, построим деревья T_1, \dots, T_{d+1} , и $\mathcal{T}_{s,1}, \mathcal{T}_{s,2}$ для $s = 2, \dots, d+1$. Как и ранее, через \mathbf{c} будем обозначать проекцию точки a_{k+1} на $\mathcal{P}(T_k)$. Без ограничений общности везде ниже считаем, что $F(a_{k+1}) \in \mathcal{T}_{k,2}$.

Замечание 3.2.3. Если при $F(a_{k+1}) \in \mathcal{T}_{k,2}$ условие (3.2.3) не выполнено, но имеют место соотношения (3.2.8) и (3.2.9), и выполнено (3.2.4), то имеет место оценка (3.2.5) теоремы 3.2.1.

Доказательство. На самом деле при доказательстве теоремы мы пользовались не условием (3.2.3), а соотношениями (3.2.8) и (3.2.9), которые являются следствием (3.2.3). Замечание 3.2.3 доказано. \square

Замечание 3.2.4. Если при $F(a_{k+1}) \in \mathcal{T}_{k,2}$ условие (3.2.3) не выполнено, но имеют место соотношения

$$\rho(\mathbf{c}, \Pi_n) = \rho(\mathbf{c}, L_n) \underset{d}{\asymp} H, \quad (3.2.25)$$

$$l_n(\mathbf{c})l_n(a_1) > 0$$

и существует вершина $a_{s^*} \in \mathcal{T}_{k,1}$ такая, что

$$\frac{\sin \beta_{k+1}(\Delta)}{\sin \alpha(l^*, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,1}))} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \cos \theta \rightarrow 0, \quad (3.2.26)$$

где l^* — прямая, проходящая через a_{k+1} и a_{s^*} , то справедлива оценка (3.2.5) теоремы 3.2.1.

Доказательство. Отметим, что (3.2.25) выполнено в том случае, если $\rho(a_{k+1}, F(a_{k+1})) \underset{d}{\asymp} H$. Удалим ребро, соединяющее a_{k+1} и $F(a_{k+1})$ из $\mathcal{T}_{k,2}$ и положим $F(a_{k+1}) = a_{s^*}$, добавив ребро $e_{s^*,k+1}$ и вершину a_{k+1} к T_k . Получим новые деревья $T_{k+1}, \mathcal{T}_{k,1}, \mathcal{T}_{k,2}$. Далее поменяем ролями вершины a_1 и a_2 , деревья $\mathcal{T}_{k,1}$ и $\mathcal{T}_{k,2}$ и повторим доказательство теоремы 3.2.1. Замечание 3.2.4 доказано. \square

Следствие 3.2.1. Пусть вершины d -симплекса Δ занумерованы таким образом, что если $|a_{s_1}a_j| \underset{d}{\asymp} H$ для любого $j = 1, \dots, s_1 - 1$ и $|a_{s_2}a_j| \ll H$ для некоторого $j \in \{1, \dots, s_2 - 1\}$, то $s_1 < s_2$; k — такое, что выполнены (3.2.23) и (3.2.24). Пусть выполнено одно из следующих условий:

$$1) \rho(a_{k+1}, F(a_{k+1})) \underset{d}{\asymp} H;$$

$$2) \rho(a_{k+1}, F(a_{k+1})) \ll H \text{ и } \frac{\sin \beta_{k+1}(\Delta)}{\sin \alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}))} \rightarrow 0 \text{ при } \cos \theta \rightarrow 0, \text{ где } l \text{ — прямая, проходящая через } a_{k+1} \text{ и } F(a_{k+1}).$$

Тогда найдется положительная функция $w(\cos \theta)$ такая, что $w(\cos \theta) \rightarrow 0$ при $\cos \theta \rightarrow 0$, и

$$\mathbf{E}_{n,\nu}^d(\Delta) \underset{d,n}{\gtrsim} M \frac{H^{n+1-\nu}}{w(\cos \theta)}, \quad \nu = 1, \dots, n. \quad (3.2.27)$$

Доказательство. Если выполнено условие 2), то (3.2.27) справедливо в силу теоремы 3.2.1. Таким образом, нам надо рассмотреть только случай, когда выполнено условие 1).

С учетом выбранного способа нумерации вершин выполнение условия 1) означает, что для любого $s = 3, \dots, k+1$ и любого $j = 1, \dots, s-1$ имеет место соотношение $|a_s a_j| \underset{d}{\asymp} |a_s a_1| \underset{d}{\asymp} H$. Построим дерево T_{k+1} способом, отличным от алгоритма, описанного в параграфе 3.1, а именно, следующим образом: для любого $j = 2, \dots, k$ полагаем $F(a_j) = a_1$, т. е. дерево T_k состоит из вершин a_1, \dots, a_k и ориентированных ребер e_{1j} , $j = 1, \dots, k$. При этом для любого $s = 3, \dots, k$ будет $\sin \beta_{s1} \asymp \sin \beta_s$. Таким образом, дерево $\mathcal{T}_{k,2}$ состоит из одной вершины, а дерево $\mathcal{T}_{k,1}$ имеет $k-1$ вершин.

Случай 1. Если $\sin \alpha(\tau_{1,k+1}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,1})) \underset{d}{\gtrsim} 1$, то, так как $\sin \beta_{k+1}(\Delta) \rightarrow 0$ при $\cos \theta \rightarrow 0$ и

$$\begin{aligned} \sin \beta_{k+1} \underset{d}{\asymp} \sin \beta_{k+1,1} &= \frac{\rho(a_{k+1}, \mathcal{P}(T_k))}{\rho(a_{k+1}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,1}))} \cdot \frac{\rho(a_{k+1}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,1}))}{|a_1 a_{k+1}|} = \\ &= \frac{\rho(a_{k+1}, \mathcal{P}(T_k))}{\rho(a_{k+1}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,1}))} \cdot \sin \alpha(\tau_{1,k+1}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,1})) \underset{d}{\gtrsim} \frac{\rho(a_{k+1}, \mathcal{P}(T_k))}{\rho(a_{k+1}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,1}))}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{c}, L_0) &= \rho(\mathbf{c}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,1})) \underset{d}{\asymp} \rho(a_{k+1}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,1})) = \\ &= |a_1 a_{k+1}| \sin \alpha(\tau_{1,k+1}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,1})) \underset{d}{\gtrsim} |a_1 a_{k+1}| \underset{d}{\asymp} H. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено условие (3.2.8). Если также выполнено (3.2.9), положим $F(a_{k+1}) = a_2$. Так как $\mathcal{T}_{k,2}$ состоит из одной вершины, то $\alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2})) = \pi/2$ (l — прямая, проходящая через a_{k+1} и a_2) и выполнено (3.2.4). На основании замечания 3.2.1 можем утверждать, что в данном случае (3.2.27) доказано.

Если (3.2.9) не выполнено, то $l_n(\mathbf{c})l_n(a_1) > 0$ и, следовательно, справедливо также (3.2.25). Тогда положим $F(a_{k+1}) = a_1$. Так как $\sin \alpha(\tau_{1,k+1}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,1})) \underset{d}{\gtrsim} 1$, то имеет место (3.2.26) при $s^* = 0$. Таким образом, (3.2.27) справедливо на основании замечания 3.2.2.

Случай 2. Если $\sin \alpha(\tau_{1,k+1}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,1})) \rightarrow 0$ при $\cos \theta \rightarrow 0$, то переходим к рассмотрению симплекса с вершинами $a_1, a_3, a_4, \dots, a_{k+1}$. Далее действуем по индукции, переходя к рассмотрению симплексов меньших размерностей, пока не окажемся в условиях случая 1.

Также исходная последовательность симплексов $\{\Delta_i\}$ может состоять из подпоследовательностей, удовлетворяющих условиям случаев 1 или 2. Тогда каждую такую подпоследовательность рассматриваем отдельно. Следствие 3.2.1 доказано. \square

Для произвольного симплекса $\check{\Delta}$ через $\text{diam}(\check{\Delta})$ обозначим диаметр этого симплекса.

Следствие 3.2.2. *Если для любого m -симплекса $\check{\Delta}$ ($m < d$) с вершинами $b_1, \dots, b_{m+1} \in \{a_1, \dots, a_{d+1}\}$, удовлетворяющего условию $\text{diam}(\check{\Delta})/H \rightarrow 0$ при $\cos \theta \rightarrow 0$, выполнено условие*

$$\sin \Theta(\check{\Delta}) \underset{d}{\gtrsim} 1$$

то найдется положительная функция $w(\cos \theta)$ такая, что $w(\cos \theta) \rightarrow 0$ при $\cos \theta \rightarrow 0$, и для всех $\nu = 1, \dots, n$ справедливы оценки (3.2.27).

Доказательство. Пусть вершины симплекса Δ занумерованы так, как это описано в формулировке следствия 3.2.1, и k — такое, что выполнены (3.2.23) и (3.2.24). Если $\rho(a_{k+1}, F(a_{k+1})) \underset{d}{\asymp} H$, то (3.2.27) справедливо согласно следствию 3.2.1. Пусть $\rho(a_{k+1}, F(a_{k+1})) \ll H$. Рассмотрим k -симплекс $\Delta[k+1]$ с вершинами a_1, \dots, a_{k+1} . Выделим симплекс $\check{\Delta}$ с наибольшим количеством вершин такой, что $a_{k+1} \in \check{\Delta}$ и $\text{diam}(\check{\Delta}) \ll H$. Перенумеруем следующим образом вершины симплекса $\Delta[k+1]$, обозначив их a_1^*, \dots, a_{k+1}^* . В $\Delta[k+1]$ выберем такие две вершины a_{j_1} и a_{j_2} , что $a_{j_2} \in \check{\Delta}$, $j_2 \neq k+1$, $|a_{j_1} a_{j_2}| \underset{d}{\asymp} H$. Положим $a_1^* = a_{j_1}$, $a_2^* = a_{j_2}$, $a_{k+1}^* = a_{k+1}$. Оставшиеся снова нумеруем таким образом, что если $|a_{s_1}^* a_j^*| \underset{d}{\asymp} H$ для любого $j = 1, \dots, s_1 - 1$ и $|a_{s_2}^* a_j^*| \ll H$ для некоторого $j \in \{1, \dots, s_2 - 1\}$, то $s_1 < s_2$. Симплекс $\Delta[k+1]$, у которого вершины перенумерованы указанным способом, обозначим $\Delta^*[k+1]$. Построим ориентированное дерево T_{k+1} с вершинами a_1^*, \dots, a_{k+1}^* по прежним правилам. Заменяем в T_{k+1} все дуги e_{ij} такие, что $|e_{ij}| \asymp H$, на дуги e_{1j} . Полученное ориентированное дерево обозначим T_{k+1}^* .

Если для $\Delta^*[k+1]$ выполнены соотношения

$$\sin \beta_l(\Delta^*[k+1]) \underset{d}{\gtrsim} 1 \quad \text{при} \quad 3 \leq l \leq k,$$

$$\sin \beta_{k+1}(\Delta^*[k+1]) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \cos \theta \rightarrow 0,$$

то выполнено условие 2) следствия 3.2.1 и (3.2.27) доказано.

Если существует $i < k$ такое, что

$$\sin \beta_l(\Delta^*[k+1]) \underset{d}{\gtrsim} 1 \quad \text{при} \quad 3 \leq l \leq i,$$

$$\sin \beta_{i+1}(\Delta^*[k+1]) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \cos \theta \rightarrow 0,$$

то переходим к рассмотрению i -симплекса $\Delta^*[i+1]$ с вершинами a_1^*, \dots, a_{i+1}^* и по индукции проводим то же доказательство для $\Delta^*[i+1]$. Следствие 3.2.2 доказано. \square

Следствие 3.2.3. *Если $d = 3$, и Δ содержит не менее 4 ребер, длины которых \mathbf{r}_j , $1 \leq j \leq k$ ($k \geq 4$), удовлетворяют соотношениям $\mathbf{r}_j \asymp H$, то существует положительная функция $w(\cos \theta)$ такая, что $w(\cos \theta) \rightarrow 0$ при $\cos \theta \rightarrow 0$, и*

$$\mathbf{E}_{n,\nu}^3 \underset{n}{\gtrsim} M \frac{H^{n+1-\nu}}{w(\cos \theta)}, \quad \nu = 1, \dots, n. \quad (3.2.28)$$

Доказательство. Занумеруем вершины таким образом, что $|a_1 a_2| \asymp H$. Если Δ содержит не менее 5 ребер, длины которых \mathbf{r}_j удовлетворяют соотношениям $\mathbf{r}_j \asymp H$, то в качестве a_3 выберем такую вершину, что $\rho(a_3, F(a_3)) \asymp H$. Иначе вершины, отличные от a_1 и a_2 , нумеруем произвольно. Без ограничений общности можем считать, что $F(a_4) = a_2$.

Пусть $|a_2 a_4| \ll H$. Тогда выполнено условие (3.2.3). Если $F(a_3) = a_1$, то $\mathcal{T}_{3,2}$ является точкой, т. е. $\alpha(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{3,2})) = \pi/2$, где l — прямая, проходящая через a_2 и a_4 , и выполнено условие (3.2.4). Таким образом, в силу теоремы 3.2.1 имеет место (3.2.28). Если $F(a_3) = a_2$, то $|a_3 a_2| \asymp H$, так как Δ содержит не менее 4 ребер, длины которых \mathbf{r}_j удовлетворяют соотношениям $\mathbf{r}_j \asymp H$. Если при этом выполнено условие (3.2.4), то снова достаточно применить теорему 3.2.1. Если условие (3.2.4) не выполнено, то переходим к рассмотрению треугольника с вершинами a_2, a_3, a_4 . В этом треугольнике $|a_3 a_2| \asymp H$ и $\sin \alpha(\tau_{23}, \tau_{24}) \rightarrow 0$ при $\cos \theta \rightarrow 0$. Как уже говорилось выше, такой случай является доказанным (см. § 2.1).

Если $|a_2 a_4| \asymp H$, то $|a_j a_l| \asymp H$ для всех $j, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \neq l$, и выполнено условие 1) следствия 3.2.1. Таким образом, следствие 3.2.3 доказано. \square

§ 3.3. Линейная интерполяция на тетраэдре

Сведения данного параграфа вряд ли могут быть названы полностью оригинальными. Близкие оценки можно получить, например, детально прочитав и доработав главу 2 из [31]. Результаты параграфа приводятся как пример, показывающий, что в некоторых случаях оценки (3.0.3) из [57] могут быть уточнены.

Пусть далее $d = 3$ и Δ — тетраэдр с вершинами a_1, a_2, a_3, a_4 ; H — диаметр Δ . Мы будем рассматривать тетраэдр, имеющий ровно три ребра, длины которых существенно меньше диаметра тетраэдра (в противном случае у нас имеются оценки снизу из следствия 3.2.3 теоремы 3.2.1, показывающие, что в определенном смысле оценки П.Жамэ являются неулучшаемыми). Обозначим через T_j , $j = 1, 2, 3, 4$, треугольники, являющиеся гранями тетраэдра напротив вершин a_j ; через γ_j — наибольшие углы треугольников T_j , через β_j — средние углы треугольников T_j , через r_j — диаметры треугольников T_j ($j = 1, 2, 3, 4$). Напомним, что для любого j имеет место соотношение $\sin \beta_j \asymp \sin \gamma_j$. Пусть ϑ_{ij} — величина угла между ребром $a_i a_j$ и гранью T_i ; ϑ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) и ϑ — такие величины, что

$$\sin \vartheta_i = \max_{\substack{1 \leq j \leq 4 \\ j \neq i}} \sin \vartheta_{ij};$$

$$\sin \vartheta = \min_{1 \leq i \leq 4} \sin \vartheta_i$$

(напомним, что эти величины введены в п. 2.2.3).

Без ограничений общности можем считать, что $r_2 \asymp r_3 \asymp r_4 \asymp H$ (поскольку как минимум три грани тетраэдра имеют диаметр порядка H) и $\sin \gamma_4 \gtrsim \max\{\sin \gamma_2, \sin \gamma_3\}$ (из трех граней можем выбрать грань с наибольшим синусом наибольшего угла соответствующего треугольника). Тогда $\sin \vartheta \lesssim \sin \vartheta_4 \lesssim \sin \gamma_4$ (последнее неравенство верно вследствие того, что любое ребро $a_4 a_i$ тетраэдра является ребром одного из треугольников T_2 или T_3 , и тогда $\sin \vartheta_4 \lesssim \sin \gamma_2 \lesssim \sin \gamma_4$ или $\sin \vartheta_4 \lesssim \sin \gamma_3 \lesssim \sin \gamma_4$).

В соответствии с нашим интересом будем считать, что $\mathbf{r}_1/H \rightarrow 0$ при $\sin \vartheta \rightarrow 0$, т. е. $\mathbf{r}_1 \ll H$.

Пусть $f \in W^2M(\Delta)$; $P_1^3[f]$ — линейная функция, определенная на Δ и такая, что

$$P_1^3[f](a_j) = f(a_j), \quad j = 1, 2, 3, 4;$$

$$\mathbf{e} = f - P_1^3[f].$$

Введем прямоугольный базис b_1, b_2, b_3 следующим образом. Пусть, например, $\sin \vartheta_4 = \sin \vartheta_{42}$ (так как $\mathbf{r}_1 \ll H$, то либо $\sin \vartheta_4 = \sin \vartheta_{42}$, либо $\sin \vartheta_4 = \sin \vartheta_{43}$, т. е. указанный выбор не влияет на общность результатов). В соответствии с нашим условием $|a_2a_3| \lesssim r_1$. Тогда пусть вектор b_1 коллинеарен отрезку a_2a_3 , вектор b_2 лежит в плоскости треугольника T_4 и ортогонален вектору b_1 , вектор b_3 ортогонален плоскости треугольника T_4 . Соответственно через (x_1, x_2, x_3) будем обозначать координаты произвольной точки $u \in \Delta$ в некоторой системе координат с выбранным базисом. Как и ранее, через τ_{ij} , будем обозначать единичные векторы, направленные от a_i к a_j ; через $\alpha(v_1, v_2)$ — угол между v_1 и v_2 , где v_i ($i = 1, 2$) может быть вектором, прямой или плоскостью. Пусть φ_{14} — двугранный угол между плоскостями граней T_1 и T_4 .

Лемма 3.3.1. *Имеют место следующие неравенства:*

$$\left| \frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial x_1} \right| \lesssim M|a_2a_3| \lesssim M\mathbf{r}_1, \quad (3.3.1)$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial x_2} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin \gamma_4}. \quad (3.3.2)$$

Доказательство. Оценки (3.3.1) следуют из оценок для одномерной интерполяции (достаточно рассмотреть отрезок a_2a_3). Применение оценок одномерной интерполяции к ребру a_2a_1 дает неравенство

$$\left| \frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial \tau_{21}} \right| \lesssim MH. \quad (3.3.3)$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial \tau_{21}} = \pm \frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial x_1} \cos \alpha(\tau_{21}, \tau_{23}) \pm \frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial x_2} \sin \alpha(\tau_{21}, \tau_{23}). \quad (3.3.4)$$

Объединяя (3.3.3) и (3.3.4) и принимая во внимание отношение $\sin \alpha(\tau_{21}, \tau_{23}) \asymp \sin \gamma_4$, получаем (3.3.2). Лемма 3.3.1 доказана. \square

Лемма 3.3.2. *Справедливо неравенство*

$$\left| \frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial x_3} \right| \lesssim \frac{M}{\sin \varphi_{14}} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\sin \gamma_1} + \frac{H}{\sin \gamma_4} \right). \quad (3.3.5)$$

Доказательство. Рассматривая сужение \mathbf{e} на отрезок $a_2 a_4$, получим оценку

$$\left| \frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial \tau_{24}} \right| \lesssim M |a_2 a_4|. \quad (3.3.6)$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial \tau_{24}} = \pm \frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial \tilde{\tau}_{24}} \cos \vartheta_4 \pm \frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial x_3} \sin \vartheta_4,$$

где $\tilde{\tau}_{24}$ — единичный вектор, коллинеарный проекции вектора τ_{24} на плоскость грани T_4 . Пусть β' — угол между $\tilde{\tau}_{24}$ и τ_{23} . Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial \tau_{24}} = \pm \frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial x_1} \cos \vartheta_4 \cos \beta' \pm \frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial x_2} \cos \vartheta_4 \sin \beta' \pm \frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial x_3} \sin \vartheta_4.$$

Полученное равенство вместе с (3.3.1), (3.3.2), (3.3.6) дает оценку

$$\left| \frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial x_3} \right| \lesssim M \frac{|a_2 a_4|}{\sin \vartheta_4} + M \frac{|a_2 a_3| \cos \vartheta_4 \cos \beta'}{\sin \vartheta_4} + M \frac{H \cos \vartheta_4 \sin \beta'}{\sin \gamma_4 \sin \vartheta_4}.$$

Примем во внимание соотношения $\sin \vartheta_4 \asymp \sin \gamma_1 \sin \varphi_{14}$ и $\sin \beta' / \sin \gamma_1 \lesssim 1$, получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{e}(a_2)}{\partial x_3} \right| &\lesssim \frac{M}{\sin \varphi_{14}} \left(\frac{|a_2 a_4|}{\sin \beta_1} + \frac{|a_2 a_3| \cos \vartheta_4 \cos \beta'}{\sin \gamma_1} + \frac{H \cos \vartheta_4 \sin \beta'}{\sin \gamma_1 \sin \gamma_4} \right) \lesssim \\ &\lesssim \frac{M}{\sin \varphi_{14}} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\sin \gamma_1} + \frac{H}{\sin \gamma_4} \right). \end{aligned}$$

Лемма 3.3.2 доказана. \square

Теорема 3.3.1. *Справедлива следующая оценка сверху:*

$$\mathbf{E}_{1,1}^2 = \mathbf{E}_{1,1}^2(\Delta) \lesssim \frac{M}{\sin \varphi_{14}} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\sin \gamma_1} + \frac{H}{\sin \gamma_4} \right). \quad (3.3.7)$$

Доказательство. Используем одномерную формулу Тейлора для функции $\partial \mathbf{e} / \partial \xi$ на отрезке, соединяющем точки u и a_2 . Если $\xi = b_i$, $i = 1, 2, 3$, то, так как $|a_2 u| \lesssim H$ и $f \in W^2 M(\Delta)$, для доказательства (3.3.7) остается применить одну из оценок (3.3.1), (3.3.2), (3.3.5). Так как для произвольного ξ справедливо свойство $|\partial \mathbf{e} / \partial \xi| \leq |\nabla \mathbf{e}|$, то теорема 3.3.1 доказана. \square

Замечание 3.3.5. *Если $\sin \beta_4 \gtrsim 1$ и $\sin \varphi_{14} \gtrsim 1$, то имеет место оценка*

$$\mathbf{E}_{1,1}^2(\Delta) \lesssim M \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\sin \gamma_1} + H \right) = MH \left(\frac{\mathbf{r}_1}{H} \frac{1}{\sin \gamma_1} + 1 \right).$$

Таким образом, если $\sin \gamma_1 \rightarrow 0$, то $\sin \vartheta_4 \rightarrow 0$ и соответственно $\cos \theta \rightarrow 0$, т. е. величина в знаменателе правой части оценки (3.0.3) стремится к нулю. Если при этом $\mathbf{r}_1 / H \asymp \sin \gamma_1$, то

$$\mathbf{E}_{1,1}^2(\Delta) \lesssim MH,$$

т. е. оценка (3.3.7) является более точной, чем (3.0.3).

Заключение

В диссертационной работе получены следующие основные результаты.

Для интерполяционного процесса Лагранжа исходной функции по равномерным узлам d -симплекса многочленами степени не выше n по совокупности переменных найден точный порядок роста констант Лебега L_n^d по n при фиксированном d . Получена поточечная оценка снизу для верхнего предела последовательности функций Лебега для указанного интерполяционного процесса.

Предложен ряд способов интерполяции функции $f \in W^{n+1}M(\Delta)$ при $d = 2, 3$, позволяющих получать непрерывные или гладкие сплайны на триангулированной области. Для построенных таким образом простых (не составных) конечных элементов получены оценки аппроксимации величин $E_{n,s}^d$, являющиеся более точными, чем оценки в случаях известных ранее способов интерполяции. Аналогичная задача оценки величины $\mathcal{E}_{n,s}^d$ решена для составного элемента типа Сие-Клафа-Точера при $d = 2$ с выбором дополнительной точки в центре вписанной окружности треугольника.

Показано, что требование гладкости результирующей кусочно-полиномиальной функции на триангулированной области не позволяет полностью исключить "условие наименьшего угла" треугольников из требований к триангуляции, если необходимо аппроксимировать производные порядка два и выше на множестве функций $W^{n+1}M$. Рассмотрены простые и составные конечные элементы.

Введена новая характеристика d -симплекса, позволяющая контролировать качество триангуляции и являющаяся более простой для вычисления и использования на практике, чем классическая характеристика П. Жамэ. С помощью этой характеристики доказано, что в случае интерполяции Лагранжа по равномерным узлам d -симплекса оценки П.Жамэ являются близкими к оптимальным и должны приниматься во внимание при исследовании

довании и использовании величины $\mathbf{E}_{n,s}^d$.

Полученные результаты могут использоваться при решении краевых задач методом конечных элементов, позволяя, в частности, накладывать меньшие ограничения на триангуляцию исходной области.

Список литературы

- [1] **Александров П. С.** Лекции по аналитической геометрии, дополненные необходимыми сведениями из алгебры с приложением собрания задач, снабженных решениями, составленного А.С. Пархоменко. М.: Наука, 1968. 912 с.
- [2] **Березин И. С., Жидков Н. П.** Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. 464 с.
- [3] **Берже М.** Геометрия. М.: Мир, 1984. Т.1. 560 с.
- [4] **Даугавет И. К.** Введение в теорию приближения функций. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1977. 184 с.
- [5] **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 352 с.
- [6] **Килижеков Ю. А.** Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами первой степени на n -симплексах // Матем. заметки. 1996. Т.60, №4. С. 504–510.
- [7] **Клячин В. А.** О многомерном аналоге примера Шварца // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, №4. С. 41–48.
- [8] **Клячин В. А.** Модифицированное условие пустой сферы Делоне в задаче аппроксимации градиента // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. Т. 80, №3. С. 95–102.
- [9] **Клячин В. А., Пабат Е. А.** C^1 -аппроксимация поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках // Сиб. журн. индустр. матем. 2010. Т. 13, №2. С. 69–78.

- [10] **Клячин В. А., Широкий А. А.** Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства // Известия вузов. Математика. 2012. № 1. С. 31–39.
- [11] **Корнейчук Н. П.** Точные константы в теории приближения. М.: Наука. 1987. 424 с.
- [12] **Куприянова Ю. В.** Об одной теореме из теории сплайнов // Журн. вычисл. математика и мат. физики. 2008. Т.48, № 2. С. 206-211.
- [13] **Латыпова Н. В.** Оценки погрешности аппроксимации многочленами степени $4k + 3$ на треугольнике // Труды Института математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 8, № 1. С.203–226.
- [14] **Латыпова Н. В.** Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Математика. 2003, с. 3–10.
- [15] **Матвеева Ю. В.** Об эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т.7, вып.1. С. 23–27.
- [16] **Натансон И. П.** Конструктивная теория функций. М.–Л., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 684 с.
- [17] **Субботин Ю. Н.** Многомерная кусочно полиномиальная интерполяция // Методы аппроксимации и интерполяции (под ред. А.Ю.Кузнецова). Новосибирск: ВЦН. 1981. С. 148-153.
- [18] **Субботин Ю. Н.** Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Труды МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 117–137.

- [19] **Субботин Ю. Н.** Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами малых степеней на n -симплексах // Мат. заметки, 1990, т. 48. вып. 4, с. 88–100.
- [20] **Субботин Ю. Н.** Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника // Труды Института математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С.110–119.
- [21] **Субботин Ю. Н.** Новый кубический элемент в МКЭ // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 120–130.
- [22] **Сьярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
- [23] **Турецкий А. Х.** Ограничение полиномов, заданных в равноотстоящих точках // Тр. Витебск. пед. ин-та. 1940. Т. 3. С. 117–127.
- [24] **Турецкий А. Х.** Теория интерполирования в задачах. Минск: Вышэйшая школа, 1968. 320 с.
- [25] **Фаддеев Д. К., Соминский И. С.** Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука. 1977. 288 с.
- [26] **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М., Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1949. 783 с.
- [27] **Acosta G., Apel T., Duran R. G., Lombardi A. L.** Error estimates for Raviart-Thomas interpolation of any order on anisotropic tetrahedra // Mathematics of computation. 2011. V.80, No. 273. P.141–163.

- [28] **Acosta G., Duran R. G.** The maximum angle condition for mixed and non conforming elements: Application for the Stokes equations // SIAM J. Numer. Anal. 2000. V. 37, No. 1. P. 18–36.
- [29] **Agouzal A., Lipnikov K.N., Vassilevski Yu.V.** Hessian-free metric-based mesh adaptation via geometry of interpolation error // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 1. P. 131–145.
- [30] **Agouzal A., Vassilevski Yu.V.** Minimization of gradient errors of piecewise linear interpolation on simplicial meshes // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2010. V. 199, No. 33-36. P. 2195-2203.
- [31] **Apel T.** Anisotropic finite elements: local estimates and applications / Series "Advances in Numerical Mathematics". Stuttgart: Teubner. 1999. 261 p.
- [32] **Argyris J. H., Fried I., Scharpf D. W.** The TUBA Family of plate elements for the matrix displacement method // The Aeronautical journal of the Royal aeronautical society. 1968. V. 72, No. 692. P. 701–709.
- [33] **Babuška I., Aziz A. K.** On the angle condition in the finite element method // SIAM J. Numer. Anal. 1976. V. 13, No. 2. P. 214–226.
- [34] **Baidakova N. V.** On some interpolation process by polynomials of degree $4m + 1$ on the triangle // Russian Journal of numerical analysis and mathematical modelling. 1999. V. 14, No. 2. P. 87–107.
- [35] **Bloom T.** The Lebesgue constant for Lagrange interpolation in the simplex // J. Approx. Theory. 1988. V. 54, No. 3. P. 338–353.
- [36] **Bos L. P.** Bounding the Lebesgue function for Lagrange interpolation in a simplex // J. Approx. Theory. 1983. V. 38, No. 1. P. 43–59.

- [37] **Bramble J. H., Zlamal M.** Triangular elements in the finite element method // *Math. Comp.* 1970. V. 24, No. 112. P. 809–820.
- [38] **Brandts J., Korotov S., Křížek M.** On the equivalence of regularity criteria for triangular and tetrahedral finite element partitions // *Computers and Mathematics with Applications*. 2008. V. 55, No. 10. P. 2227–2233.
- [39] **Brandts J., Korotov S., Křížek M.** Generalization of the Zlamal condition for simplicial finite elements in \mathbb{R}^n // *Applications of mathematics*. 2011. V. 56, No. 4. P. 417–424.
- [40] **Brandts J., Hannukainen A., Korotov S., Křížek M.** On angle conditions in the finite element method // *SeMA J.* 2011. No. 56. P. 81–95.
- [41] **Cea J.** Approximation variationnelle les problèmes aux limites // *Annales de l'institut Fourier*. 1964. T. 14, No. 2. P. 345–444.
- [42] **Ciarlet P. G.** Sur l'élément de Clough et Tocher // *Revue Française d'automatique informatique recherche operationelle*. 1974. V. 8, No. R2. P. 19–27.
- [43] **Ciarlet P. G., Raviart P. A.** General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1972. V. 46, No. 3. P. 177–199.
- [44] **Clough R.W., Tocher J. L.** Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending // *Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*. Ohio: Wright Patterson Air Force Base. 1965.

- [45] **D’Azevedo E. F.** Optimal triangular mesh generation by coordinate transformation // SIAM Journal on scientific and ststistical computing. 1991. V. 12, No. 4. P. 755–786.
- [46] **D’Azevedo E. F., Simpson R. B.** On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error // Numerishe Mathematik. 1991. V. 59, No. 1. P. 321–348.
- [47] **Dyn N., Levin D., Rippa S.** Data dependent triangulations for piecewise linear interpolation // IMA Journal of Numerical Analysis. 1990. V. 10, No. 1. P. 137–154.
- [48] **Dyn N., Rippa S.** Data-dependent triangulations for scattered datf interpolation and finite element approximation // Applied Numerical Mathematics. 1993. V. 12, No. 1–3. P. 89–105.
- [49] **Eisinberg A., Fedele G., Franzè G.** Lebesgue constant for Lagrange interpolation on equidistant nodes // Analysis in Theory and Applications. 2004. V. 20, No. 4. P. 323–331.
- [50] **Feng K.** Diference schemes based on variotional principle (in Chinese) // J. Appl. Comput. Math. 1965. V. 2. P. 238–262.
- [51] **Feng K.** Diference schemes based on variotional principle // Collected Works of Feng Kang. Beijing, Defence Industry Press. 1994. V. 1. P. 180–209.
- [52] **Gregory J. A.** Error bounds for linear interpolation in triangles // Whiteman J. R. (ed.). The mathematics of finite elements and applications II. London: Academic Press. 1975. P. 163–170.
- [53] **Handscomb D.** Errors of linear interpolation on triangle. Manuscript. Oxford University Computing Laboratory 1995. 17 p.

- [54] **Hannukainen A., Korotov S., Křížek M.** The maximum angle condition is not necessary for convergence of finite element method // Numerische mathematik. 2012. T.120, No. 1–6. P. 79–88.
- [55] **Hannukainen A., Korotov S., Křížek M.** On Synge-type angle condition for d -simplices // Applications of Mathematics. 2017. V.62, No. 1. P.1–13.
- [56] **Hetmaniuk U., Knupp P.** Local anisotropic interpolation error estimates based on directional derivatives along edges // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2008. V. 47, No. 1. P. 575–595.
- [57] **Jamet P.** Estimation d’erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés // RAIRO Anal. Numer. 1976. T. 10, No. 1. P. 43–60.
- [58] **Křížek M.** On semiregular families of triangulations and linear interpolation// Applications of Mathematics. 1991. V/ 36, No. 3. P. 223–232.
- [59] **Křížek M.** On the maximum angle condition for linear tetrahedral elements // SIAM J. Numer. Anal. 1992. V/ 29, No. 2. P. 513–520.
- [60] **Kučera V.** Several notes on the circumradius condition// Applications of Mathematics. 2016. V/ 61, No. 3. P. 287–298.
- [61] **Kučera V.** On necessary and sufficient conditions for finite element convergence// arXiv:1601.02942 (2016).
- [62] **Lai M. J., Schumaker L. L.** Spline functions on triangulations. Cambridge, UK: Cambridge University Press. 2007. 609 p.
- [63] **Mills T. M., Smith S. J.** The Lebesgue constant for Lagrange interpolation on equidistant nodes // Numerische Mathematik. 1992. V. 61, No. 1. P. 111–115.

- [64] **Nadler E. J.** Piecewise linear approximation on triangulations of a planar region, PhD. Thesis. Division of Applied Mathematics, Brown University, Providence, RI. 1985.
- [65] **Nicolaidis R. A.** On the class of finite elements generated by Lagrange interpolation // SIAM J. Numer. Anal. 1972. V. 9. No. 3. P. 435–445.
- [66] **Oswald P.** Divergence of fem: Babuska-Aziz triangulations revisited // Applications of Mathematics. 2015. V. 60. No. 5. P. 473–484.
- [67] **Rand A.** Average interpolation under the maximum angle condition // SIAM J. Numer. Anal. 2012. V. 50, No. 5. P. 2538–2559.
- [68] **Rippa S.** Long and thin triangles can be good for linear interpolation // SIAM J. Numer. Anal. 1992. V. 29, No. 1. P. 257–270.
- [69] **Schönhage A.** Fehlerfortpflanzung bei Interpolation // Numer. Math. 1961. V. 3, No. 1. P. 62–71.
- [70] **Shewchuk J. R.** What is a good linear finite element? Interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures. Preprint. Berkeley: Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley, 2002. 66 p.
- [71] **Stämpfle M.** Optimal estimates for the linear interpolation error on simplices // J. Approx. Theory. 2000. V. 103, No. 1. P. 78–90.
- [72] **Synge J. L.** The hypercircle in mathematical physics. Cambridge University Press, 1957.
- [73] **Trefethen L. N., Weideman J. A. C.** Two results on polynomial interpolation in equally spaced points // J. Approx. Theory. 1991. V. 65, No. 3. P. 247–260.

- [74] **Waldron S.** The error in linear interpolation at the vertices of a simplex // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1998. V. 35, No. 3. P. 1191–1200.
- [75] **Ženišek A.** A general theorem on triangular finite $C^{(m)}$ -elements // Rev. Francaise Automat. Informat. Recherche Operationelle Ser. Rouge Anal. Numer. 1974. R-2. P. 119–127.
- [76] **Ženišek A., Hoderova-Zlamalova J.** Semiregular Hermite tetrahedral finite elements // Appl. of Math. 2001, No. 4. P. 295–315.
- [77] **Ženišek A.** Interpolation polynomials on the triangle // Numer. Math., 1970, V. 15. P. 283–296.
- [78] **Ženišek A.** Maximum-angle condition and triangular finite elements of Hermite type // Math. Comp. 1995. Vol. 64, No. 211. P. 929–941.
- [79] **Ženišek A.** Polynomial approximation on tetrahedrons in the finite element method // J. Approximation Theory. 1973. Vol. 7, No. 4. P. 334–351.
- [80] **Zlamal M.** On finite element method // Numerische Mathematik. 1968. V. 12, No. 2. P. 394–409.
- [81] **Zlamal M., Ženišek A.** Mathematical aspect of the finite element method // Technical, physical and mathematical principles of the finite element method (V.Kolar et al., eds.). Praha: Acad. VED. 1971. P. 15–39.
- [82] **Ženišek A.** The convergence of finite element method for boundary value problems of a system of elliptic equations (in Czech) // Apl. Mat. 1969. V. 14. P. 355–377.
- [83] **Байдакова Н. В.** Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике // Труды ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 47–52

- [84] **Байдакова Н. В.** О порядке констант Лебега интерполяционного процесса алгебраическими многочленами по равномерным узлам симплекса // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 6. С. 814–831. (Перевод на англ.: **Baidakova N. V.** On the order of the Lebesgue constants for interpolation by algebraic polynomials from values at uniform nodes of a simplex // Mathematical Notes. 2005 V. 77, Iss. 5-6. P. 751–766.)
- [85] **Байдакова Н. В.** О некоторых интерполяционных многочленах третьей степени на трехмерном симплексе // Труды ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 43–57. (Перевод на англ.: **Baidakova N. V.** On some interpolation third-degree polynomials on a three-dimensional simplex // Proc. Steklov Inst. Math. V. 264, Suppl. 1. 2009. P. S44–S59.)
- [86] **Байдакова Н. В.** Влияние гладкости на погрешность аппроксимации производных при локальной интерполяции на триангуляциях // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, №3. С. 83–97. (Перевод на англ.: **Baidakova N. V.** Influence of smoothness on the error of approximation of derivatives under local interpolation on triangulations // Proc. Steklov Inst. Math. V. 277, Suppl. 1. 2012. P. S33–S47.)
- [87] **Байдакова Н. В.** Оценка снизу функции Лебега интерполяционного процесса алгебраическими многочленами по равномерным узлам симплекса // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 1. С. 19–26. (Перевод на англ.: **Baidakova N. V.** Lower bound for the Lebesgue function of an interpolation process with algebraic polynomials on equidistant nodes of a simplex // Mathematical Notes. 2012. V. 92, Iss. 1-2. P. 16–22.)
- [88] **Байдакова Н. В.** Оценки сверху величины погрешности аппроксимации производных в конечном элементе Сие-Клафа-Точера // Труды ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 80–89.

- [89] **Байдакова Н. В.** Новые оценки величин погрешности аппроксимации производных при интерполяции функции многочленами третьей степени на треугольнике // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, № 1(2). С. 15–19.
- [90] **Байдакова Н. В.** Оценки снизу погрешности аппроксимации производных для составных конечных элементов со свойством гладкости // Труды ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 32–42. (Перевод на англ.: **Baidakova N. V.** Lower estimates for the error of approximation of derivatives for composite finite elements with smoothness property // Proc. Steklov Inst. Math. V. 288, Suppl. 1. 2015. P. S29–S39.)
- [91] **Байдакова Н. В.** Треугольный конечный элемент с новыми аппроксимативными свойствами // Труды ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 67–77. (Перевод на англ.: **Baidakova N. V.** A triangular finite element with new approximation properties // Proc. Steklov Inst. Math. V. 296, Suppl. 1. 2017. P. S74–S84.)
- [92] **Байдакова Н. В.** Алгоритм построения эрмитовых конечных элементов третьей степени // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 799–814.
- [93] **Байдакова Н. В.** Об оценках П. Жамэ для конечных элементов с интерполяцией в равномерных узлах симплекса // Математические труды. 2017. Т. 20, № 1. С. 43–74.