УДК 519.688

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ОСНОВАННОЙ НА РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

SOFTWARE DEVELOPMENT OF COMPUTATIONAL FLUID DYNAMIC FOR AN EULER EQUATION

Ледков Денис Евгеньевич, магистрант каф. «Турбины и Двигатели», Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19. E-mail: ledkov.d@gmail.com, Тел.: +7(922)023-00-03
Седунин Вячеслав Алексеевич, канд. техн. наук, доцент каф. «Турбины и Двигатели»,», Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19. E-mail: lerr@bk.ru. Тел.: +7(902)254-28-97

Ledkov Denis Evgenyevich, Master student, Department «Turbines and engines», Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin, 620002, Mira street, 19, Ekaterinburg, Russia. E-mail: ledkov.d@gmail.com, Ph.: +7(922)023-00-03
Sedunin Vycheslav Alekseevich, PhD., Department « Turbines and engines», Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin,620002, Mira str., 19, Ekaterinburg, Russia. E-mail: lerr@bk.ru. Ph.: +7(902)254-28-97

Аннотация: В данной работе было описано написание программного кода для решения уравнения Эйлера. Целью данной работы являлось получение навыков прикладного использования уравнения механики жидкости и газов, изучение математических моделей решений задач с истечением невязких сжимаемых жидкостей. Были определены влияния искусственной вязкости на соответствие физической картине истечения данных жидкостей. Также был проведен анализ влияния числа Куранта на сходимость расчета.
Abstract: In this paperwork, writing an Euler equation’s solver was described. The main purpose of this work is an investigation of mathematical models to solve inviscid and compressible fluid flow in two-dimensional tasks. During this research, I explored how to influence number of CFL and artificial viscosity on an accuracy and a stability of a solution.
Ключевые слова: вычислительная гидрогазодинамика; искусственная вязкость; метод конечных объемов; дискретизация.
Key words: computational fluid dynamic; artificial viscosity; finite volume method; discretization.

ВВЕДЕНИЕ

Вычислительная гидродинамика является разделом механики сплошных сред, включающей в себя совокупность математических и численных методов решения течений жидкостей. На сегодняшний день вычислительная газодинамика широко используется в таких сферах как разработка и проектирование авиационных и стационарных газотурбинных двигателей, автомобилей. Более того CFD также используется в метеорологии, биологии и т.д. Основной задачей моделирования физических процессов является предсказание параметров установки на этапе проектирования, что позволяет снизить стоимость разработки в целом. Из выше сказанного следует важность использования методов вычислительной газодинамики, как инженерного инструмента для повышения эффективности различных энергоустановок. Однако, вычислительная газодинамика не является точным решением инженерных задач, так как для решения основных уравнений используются их приближенные численные модели. Это создает необходимость анализа математических моделей для определения точности и стабильности решения. Задачей моей работы было создание программного кода для решения задач невязкого истечения в двухмерной постановке.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для решения задачи истечения жидкости необходимо выполнить решение системы основных уравнений механики жидкости и газа.

- Уравнение неразрывности. Физический смысл - закон сохранения массы.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla * (\rho * V) = 0 \quad (1)$$

- Уравнение второй закон Ньютона. Физический смысл – закон сохранения импульса

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla * (\rho\, u\, V) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla * (\rho\, v\, V) = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (3)$$

- Уравнение энергии. Физический смысл – закон сохранения энергии.

$$\frac{\partial(\rho h0)}{\partial t} + \nabla * (\rho\, h0\, V) = 0 \quad (4)$$

СТРУКТУРА ПРОГРАММЫ

На Рисунке 1- Блок-схема приведен порядок расчета в программе. В целом можно выделить три основных этапа. Первый этап- подготовка расчета- включает в себя создание сетки, задание начальных условий. На второй этапе производится основной итерационный расчет. Основывается на методах дискретизации и конечных объемов. Заключительный этап - обработка данных.

Рис. 1. Блок-схема

СОЗДАНИЕ СЕТКИ

Вся исследуемая область покрывается сеткой (Рисунок 1- Сетка). В моей работе использовалась четырехугольная сетка. Разбиение происходило на основе деления домена на N одинаковых отрезков по координате x,y. Общее количество элементов равно 10000. Также в этом разделе производился расчет таких величин как: площадь конечных элементов и проекции граней элементов на координатные оси. После построения сетки важно проверить, что в геометрии отсутствуют элементы с отрицательной либо нулевой площадью и сумма векторов в элементе равно 0.

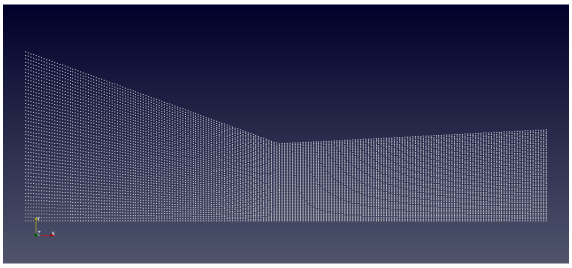

Рис. 2. Конечно-разностная сетка

ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

1) Дискретизация.

Наиболее распространённым конечно-разностным представлением производной является разложение в ряды Тейлора. Рассмотрим разложение в ряд Тейлора функции , ρ_n точка в момент времени t_0, ρ_{n+1}- в момент времени $t_0+\Delta t$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\rho_{n+1}-\rho_n}{\Delta t} + \text{Ч. В. П.} \quad (5)$$

На данном этапе стоит отметить тот факт, что расчет является шаговым по времени. Шаг по времени появляется вследствие дискретизации уравнения. Другими словами, значение n+1 является значением параметра спустя время Δt, являясь также искомым решением. Данная схема является явной и обладает первым порядком точности. Более подробно о методах разложения функции в ряд Тейлора можно в книге Джона Андерсона. [1]

2) Метод конечных объемов.

Рассмотрим интегральную формулировку законов сохранения, где вектор обозначает консервативные переменные и состоит из компонентов: ρ, ρV, ρE. Вектор учитывает конвективное движение жидкости. Вектор определяет дополнительные члены уравнения. Для законов сохранения энергии и массы он будет равен 0. Для уравнения движения выражает влияние давления на движение жидкости.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \vec{W}\, d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \vec{F_c}\, dS = \int_{\Omega} \vec{Q}\, d\Omega \quad (6)$$

Дискретизация данного уравнения производится с помощью рядов Тейлора для нестационарного члена уравнения и выражения суммы для конвективного и дополнительного членов уравнения. Дискретная формулировка данного уравнения следующая:

$$A\frac{\Delta W}{\Delta t} = \sum_{CV} F + Q \quad (7)$$

Рассмотрим более подробно метод дискретизации на примере уравнения неразрывности.

$$A\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = \sum_{CV} Flux \quad (8)$$

В данном случае A- является площадь конечного элемента, так как рассматривается двухмерная постановка задачи. Термин flux означает поток на входе или выходе. Рассмотрим Рисунок 1- Конечный элемент. Для уравнения неразрывности поток для левой грани будет выглядеть

$\rho u L_x + \rho v L_y$ аналогично будет и для всех остальных граней.

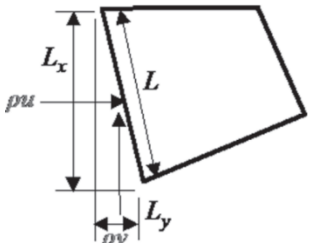

Рис. 3. Конечный элемент

В свою очередь сумма потоков для элемента на рисунке 1 $\sum_{CV} Flux = Flux(\text{лев. грань}) - Flux(\text{прав. грань}) + Flux(\text{лев. грань}) - Flux(\text{прав. грань})$. Данный процесс и называется методом конечных объемов. Вывод остальных уравнений аналогичен, более подробно можно ознакомиться в книге Пола Такера[2].

3) Искусственная вязкость

Представленных выше методов недостаточно для получения конечного результата ввиду нестабильности расчетной схемы. Для того чтобы получить более стабильное решение применяют схемы с искусственной вязкостью. Вязкость называется искусственной ввиду того, что влияние, оказываемое на расчет, схоже с вязкостью, но при этом не имеет физического смысла. Самый простой способ применения сглаживания можно достигнуть, используя среднее значение окружающих узлов.

$$W_{i,j} = (1 - SF) * W_{i,j} + SF * (W_{i,j})_{avg} \qquad (9)$$

Стоит отметить, данный способ оказывает негативное влияние на результат, но во многих случаях позволяет получить достаточно качественное решение.

РАСЧЕТ НА ПРИМЕРЕ ИСТЕЧЕНИЯ ИЗ СОПЛА

На рисунках 4 и 5 представлены распределение чисел Маха и полного давления. Расчет производился с полным давлением на входе 100 КПа и статическим на выходе 85 КПа. Коэффициенты CFL и SF равны 0,5 и количество выполненных итераций до сходимости 10^{-4} равно 6550. На рисунке 5 следует обратить внимание на изменение полного давления в расширяющейся части канала, в то время как уравнение Эйлера описывает невязкие течения и изменение полного давления не должно присутствовать. Данное явление вызвано применением искусственной вязкости. Колебание давлений составляет 15%.

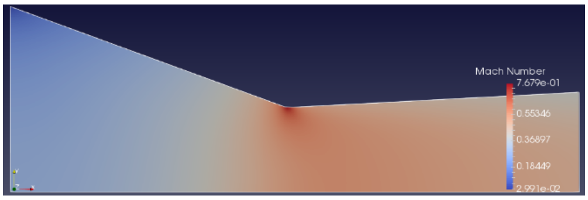

Рис. 4. Распределение чисел Маха

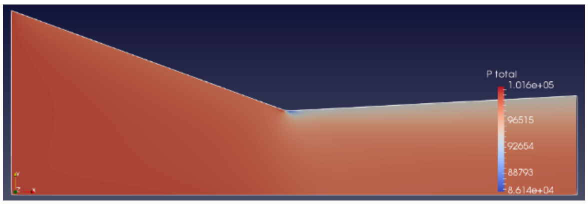

Рис. 5. Распределение полного давления

На рисунке 6 представлен расчет с увеличенным CFL до 0,9, при этом мы не получаем ухудшения или улучшения качества расчета. Ошибка по давлению остается в пределах 15%. Однако, наблюдается снижение числа итераций в виду того, что Δt находится в прямой зависимости от числа CFL. Как было упомянуто раннее Δt является временным шагом расчета, следовательно увиличивая шаг расчета мы снижаем количество итераций.

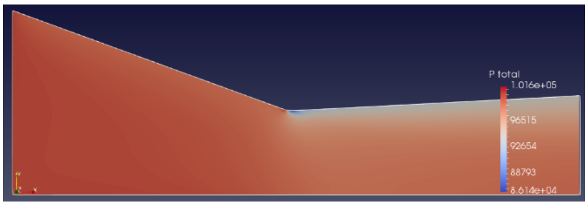

Рис. 6. Распределение полного давления при CFL=0.5

На рисунке 7 продемонстрирован расчет со сниженным значением искусственной вязкости равной 0,2 и коэффициентом CFL=0.5. Из данного расчета было получено, что ошибка в колбаниях давлений снижается до 13,5%. Стоит также отметить, что снижение CFL дает нам получение сходимости при расчете со сниженным SF, то есть при более не стабильном расчете.

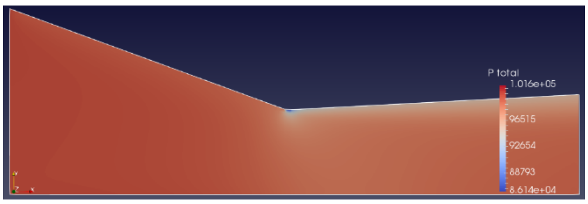

Рис. 7. Распределение полного давления при SF=0.15 и CFL=0.4

ВЫВОД

Исследованы численные методы, позволяющие получать решения невязких течений. В ходе анализа было получено влияние искусственной вязкости на точность решения, а также числа CFL на сходимость и энергоемкость расчета. Достаточно большое влияние искусственной вязкости указывает на недостаток полученной математической модели. В дальнейшем планируется улучшение математической модели для получения более физически правильных результатов. Для этого необходимо снижать влияние искусственной вязкости, путем снижения ее величины в течении расчета ввиду его стабилизации. Также использование схемы Рунге-Кутта позволит снизить значение искусственной вязкости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Anderson, John David Computational Fluid Dynamic. The basics with applications / John D. Anderson-first published-: McGraw-Hill series in mechanical engineering-McGraw-Hill series in aeronautical and aerospace engineering, 1995-547 pages
2. Tucker, Paul G. Advanced computational fluid and aerodynamics / Paul G. Tucker.-First published-Cambridge University Press, 2016-567 pages
3. J.Blazek. Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications / J.Blazek-Second Edition: Elsevier, 2005- 470 pages