На правах рукописи

СЕРОВ Вячеслав Петрович

НЕКОТОРЫЕ МИНИМАКСНЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ И МАРШРУТИЗАЦИИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2002

Работа выполнена на кафедре теоретических основ радиотехники Уральского государственного технического университета – УПИ.

Научный руководитель	–	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор А.Г. Ченцов
Официальные оппоненты	–	доктор физико-математических наук, профессор А.Н. Сесекин, кандидат физико-математических наук, доцент М.И. Логинов
Ведущая организация	–	Челябинский государственный университет

Защита состоится "24" апреля 2002 года в "15" часов на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Уральском государственном университете имени А.М. Горького по адресу: 620083, г. Екатеринбург, К-83, пр. Ленина 51, к. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета.

Автореферат разослан " " марта 2002 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работа посвящена минимаксным задачам маршрутизации и последовательного управления.

В последние годы классические задачи комбинаторной оптимизации (в первую очередь, задача коммивояжера (ЗК), задача о наикратчайших путях (ЗНП), задача о минимальном остовном дереве) стали изучаться в обобщенной постановке, когда вместо фиксированного узла x_i рассматривается множество M_i, которому может принадлежать узел x_i. Преимуществом таких обобщенных постановок задач комбинаторной оптимизации является то, что появляется дополнительная свобода варьировать узлы x_i для достижения лучшего качества. Однако в ряде задач следует считаться с наличием неконтролируемых воздействий.

В связи с этим, в настоящей работе делается следующий шаг в этом направлении, и предлагается постановка, в которой нет возможности выбирать точки x_i или управлять ими. Таким образом, получаем игровую ситуацию, когда распоряжение точками x_i отдается игроку-противнику или (противостоящей) природе. Множествами M_i моделируется (непредсказуемое) поведение точек x_i (они могут представлять собой, в зависимости от конкретной задачи, помехи, ошибки, возмущения, шумы, сбои и т.п., или разумные управления игрока-противника).

Особый интерес представляют позиционные динамические задачи (ЗК ЗНП и др.), когда решения принимаются игроками в динамике, в зависимости от предыдущих действий противника. Построение позиционных стратегий управления является здесь новым, неисследованным и трудным кругом задач. Основной вопрос при решении задач этого класса заключается в следующем: как подойти к конструированию управления по принципу обратной связи в динамической игре с комбинаторным функционалом, и как сформулировать и решить задачу в замкнутом виде?

Н.Н. Красовским, А.И. Субботиным и их сотрудниками была создана теория позиционных дифференциальных игр.[1,2,3,4,5,6] Настоящая работа,

[1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. - М.: Наука, 1974.

[2] Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. - New York: Springer, 1987.

[3] Osipov Yu.S., Kryazhimski A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: Dynamical solutions. - London: Gordon and Breach, 1995.

[4] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. - М.: Наука, 1981.

[5] Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона -Якоби. - М.: Наука, 1991.

[6] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. - М.: Наука, 1977.

в которой вводится и изучается обобщенная ЗК в игровой постановке в классе позиционных стратегий, основана на этом подходе, связанном с минимизацией гарантированного результата в классе позиционных стратегий, что объективно сближает рассматриваемую постановку с задачами теории дифференциальных игр. В [7] даны многочисленные примеры содержательных задач управления, формализуемых в рамках теории дифференциальных игр. Теория дифференциальных игр получила свое глубокое развитие в работах Р.В. Гамкрелидзе, Н.Н. Красовского, А.В. Кряжимского, А.Б. Куржанского, Е.Ф. Мищенко, Ю.С. Осипова, Л.С. Понтрягина, Б.Н. Пшеничного, А.И. Субботина, В.Е. Третьякова, А.Г. Ченцова, Ф.Л. Черноусько, А.А. Чикрия; отметим также исследования Э.Г. Альбрехта, В.Д. Батухтина, П. Варайи, Н.Л. Григоренко, П.Б. Гусятникова, А.Ф. Клейменова, А.Н. Красовского, Дж. Лейтмана, Н.Ю. Лукоянова, М.С. Никольского, В.С. Пацко, Н.Н. Петрова, Л.А. Петросяна, Н.Н. Субботиной, А.М. Тарасьева, В.И. Ухоботова, В.Н. Ушакова, В. Флеминга, А. Фридмана и др.

Обобщенная (неигровая) ЗК и ее решение методом динамического программирования рассматривались[8,9] А.Г. Ченцовым и его сотрудниками. Следует отметить, что многие комбинаторные задачи могут быть переформулированы в виде ЗК или обобщенной ЗК. Как отмечается в литературе, ЗК занимает центральное место в комбинаторной оптимизации, и она явилась прототипической задачей современной комбинаторной оптимизации. Простота ее формулировки сочетается с трудностью решения. Многие подходы к решениям, ставшие стандартными в комбинаторной оптимизации, сначала были развиты и опробованы в контексте ЗК. Таким образом, в данной работе объединяются рамки и инструментарий теории динамических игр (программное движение, позиционная стратегия, движение, порожденное позиционной стратегией, многократный минимакс, позиционный минимакс, и др.) и весьма нетривиальная комбинаторная задача, каковой является обобщенная ЗК, так что данная тематика органически связана с задачами управления.

В диссертации рассматриваются также некоторые программные минимаксные задачи оптимального управления. Основой рассматривае-

[7] Айзекс Р. Дифференциальные игры. - М.: Мир, 1967.

[8] Chentsov A.G., Korotayeva L.N. The dynamic programming method in the generalized traveling salesman problem//Mathl. Comput. Modell. - 1997. - Vol. 25, N 1. - P. 93-105.

[9] Коротаева Л.Н., Сесекин А.Н., Ченцов А.Г. Об одной модификации метода динамического программирования в задаче последовательного сближения//Журн. Выч. Мат. Мат. Физ. - 1989. - Т. 29, N 8. - С. 1107-1113.

мых конструкций является теория принципа максимума Л.С. Понтрягина. В работе изучаются, в частности, задачи сближения и уклонения траекторий управляемой системы относительно дискретной по времени системы выпуклых компактов, при различных типах (в том числе комбинированных) ограничений на управление. В идейном отношении предлагаемые конструкции следуют подходу,[10,11] который предполагает совместное исследование пары экстремальных задач (оптимального управления и математического программирования (МП)), находящихся в двойственности. Такой подход дает возможность в целом ряде случаев для решения задач оптимального управления использовать методы математического программирования, получая эквивалентные по результату конечномерные экстремальные задачи. В[11] подход был продвинут на случай задачи сближения с выпуклым компактом в заданной момент времени (при геометрических ограничениях на управления). В работе Н.Н. Красовского[12] для решения задач оптимизации впервые была применена проблема моментов. Различные задачи управления на основе функционального подхода рассматривались в работах Ф.М. Кирилловой, Р. Габасова, М.И. Гусева, А.Б. Куржанского, Ю.С. Осипова.

В работах Ю.И. Бердышева, А.В. Кряжимского, А.Г. Ченцова рассматривались задачи последовательного управления при обходе системы компактных множеств, когда производится совокупная минимизация системы рассогласований; такие постановки связывают конструкции теории оптимального управления и теории маршрутных задач. Задачи последовательной оптимизации в игровой постановке изучались в работах А.Н. Красовского, Н.Н. Красовского, Н.Ю. Лукоянова, А.А. Чикрия[13,14,15] .

В ряде прикладных задач приходится решать вопросы взаимодействия двух управляемых систем с импульсными управлениями; это взаимодействие может проходить в условиях неполной информации и, возможно, конфликтности. Задачи управления с обратной связью традиционно являются одним из предметов теории дифференциальных игр.

---

[10]Красовский Н.Н. Теория управления движением. - М.: Наука, 1968.

[11]Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. - М.: Наука, 1970.

[12]Красовский Н.Н. К теории оптимального регулирования//Автом. Телемех. - 1957. - Т. 18, N 11. - С. 960-970.

[13]Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. - Boston: Birkhauser, 1995.

[14]Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю. Задача конфликтного управления с наследственной информацией//Прикл. Матем. Мех. - 1996. - Т. 60, вып. 6. - С. 885-900.

[15]Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. - Dordrecht: Kluwer, 1997.

Также приходится работать и с минимаксными задачами программного управления (см.[1,2,4,6,8–10], а также работы[16,17,18]). В диссертации исследуется, в частности, минимаксная задача импульсного программного управления в условиях, когда о фазовом состоянии одного из объектов имеется лишь неполная информация, а также в условиях последовательного обхода системы множеств. В смысле интегральных ограничений, ограничение на полный импульс управляющей программы представляет основной интерес, поскольку для многих задач механики, космической навигации, экономики, биомедицины, радиотехники и др. актуальны именно такие ограничения на управляющее воздействие. Для решения в замкнутом виде таких задач, рассматриваемых в диссертации, используются процедуры компактификации в классах обобщенных управлений-мер.

Цель работы. Построение теории позиционного управления в игровой комбинаторной задаче последовательного обхода системы множеств. Получение необходимых условий оптимальности для задач последовательного управления относительно системы выпуклых компактных множеств при различных ограничениях на управления.

Методы исследования. Используются методы теории оптимального управления, дифференциальных игр, функционального анализа, теории меры, комбинаторной оптимизации.

Научная новизна.

1. Построена теория позиционного управления в минимаксных задачах последовательного обхода конечной системы множеств.

2. Получены необходимые условия оптимальности в классе конечно-аддитивных управлений-мер для задач управления линейными системами с импульсными ограничениями и разрывными коэффициентами при управлении, включая задачи последовательного сближения с системой выпуклых компактов.

3. Получены необходимые условия оптимальности в задаче программного уклонения для собственно линейной системы.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные результаты могут быть использованы при синтезе управления в прикладных

[16]Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. - М.: Наука, 1969.

[17]Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. - Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1977.

[18]Куржанский А.Б., Осипов Ю.С. К задачам программного преследования в линейных системах//Изв. АН СССР. Техн. киберн. - 1970. - N 3. - С. 18-29.

задачах, связанных с маршрутизацией (например, в динамических сетевых задачах) при наличии неопределенностей. Результаты также могут применяться для построения управления в задачах последовательного обхода множеств.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на семинарах отдела управляемых систем ИММ УрО РАН, совместных семинарах кафедры теоретических основ радиотехники РТФ УГТУ-УПИ и отдела управляемых систем, VII Всесоюзной конф. "Качественная теория дифференциальных уравнений" (Рига, 1989), VII Всесоюзной конф. "Управление в механических системах" (Свердловск, 1990), 2 Междунар. Семинаре "Негладкие и разрывные задачи управления и оптимизации" (Челябинск, 1993), 11 Междунар. Семинаре ИФАК "Control Appications of Optimization" (С-Петербург, 2000), 5 Симпозиуме ИФАК "Nonlinear Control Systems" (С-Петербург, 2001).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах [1–12].

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, приложения и списка литературы. Общий объем — 107 страниц машинописного текста. Библиографический список содержит 101 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит описание проблематики работы и постановки рассмотренных задач. Приводятся ссылки на основные работы по теме диссертации и излагается краткое содержание по главам.

Первая глава посвящена игровому варианту обобщенной задачи коммивояжера (ОЗК). Задача состоит в том, чтобы посетить все множества из заданной системы попарно непересекающихся компактных множеств $M_1, \ldots, M_m$ в R^n так, чтобы минимизировать стоимость обхода. Задача осложнена наличием неопределенных факторов в пределах множеств M_k; значения этих факторов заранее неизвестны.

В работах[8,9] рассматривается неигровая обобщенная ЗК, когда можно варьировать точку x_k в пределах заданного множества $M_k \subset R^n$ ($k \in \overline{1,m} \triangleq \{1, 2, \ldots, m\}$). В такой ОЗК требуется перенумеровать множества $M_k, k \in \overline{1,m}$, в порядке $M_{r_1}, \ldots, M_{r_m}$ и выбрать m-набор $(x_k)_{k\in\overline{1,m}}$ точек $x_1 \in M_{r_1}, \ldots, x_m \in M_{r_m}$ так, чтобы минимизировать целевую функцию

$$I(r, (x_k)_{k\in\overline{0,m}}) = \sum_{k=1}^{m} c_{r_k}(x_{k-1}, x_k) \qquad (1)$$

или

$$I(r,(x_k)_{k\in\overline{0,m}}) = \max_{k\in\overline{1,m}} c_{r_k}(x_{k-1},x_k), \tag{2}$$

где x_0 есть фиксированная начальная точка, а $c_j(x,y)$ есть стоимость перехода из x в $y \in M_j$. Таким образом, это задача совместной минимизации по r и m-наборам $(x_k)_{k\in\overline{1,m}}$. Для ее решения в[8,9] применен метод динамического программирования.

В главе I ставится и решается иная, игровая задача обхода заданной системы множеств $M_1,\dots,M_m$. Векторы $x_k \in M_k$ теперь являются неопределенными факторами. Разделяем управление $\{r,(x_k)_{k\in\overline{1,m}}\}$ на две части, отдавая право выбирать маршрут r первому игроку, а право выбирать точки посещения $x_k \in M_{r_k}$, $k\in\overline{1,m}$, – второму игроку.

Скалярные функции c_k, $k\in\overline{1,m}$, могут быть, например, расстояниями $c_k(x,y) = \|x-y\|$ или минимальным временем движения между точками x и y для объекта $\dot{x} = u$, имеющего возможность двигаться в любом направлении в R^n со скоростью $0 \leqslant u \leqslant a$: $c_k(x,y) = \|x-y\|/a$. Целью игрока 1 является минимизация целевой функции, а целью игрока 2 – ее максимизация. Вводится антагонистическая многошаговая позиционная игра двух игроков, протекающая следующим образом. На $(k+1)$-м шаге игрок 1 на основании информации о $r_1,\dots,r_k$ и $x_k \in M_{r_k}$ выбирает номер r_{k+1} следующего множества для посещения, затем игрок 2 выбирает точку $x_{k+1} \in M_{r_{k+1}}$, так что траектория приходит в точку x_{k+1}.

В качестве игрока 2 может рассматриваться как реальный игрок, разумно противодействующий игроку 1, так и (противостоящая) природа, "управляющая" неопределенными факторами $x_k \in M_k$, $k\in\overline{1,m}$.

Управление первого игрока r_{k+1} на каждом $(k+1)$-м шаге строится на основе допустимой информации о текущем состоянии системы. Под *позицией* понимаем пару (H,x), где H есть множество индексов j всех тех множеств M_j, которые осталось посетить, а x – это точка, в которой находится траектория. Под *позиционным управлением* на $(k+1)$-м шаге понимаем функцию $R_{k+1}(H;x) \triangleq r_{k+1}(H;x)$, определенную для всех H и x, которые могут возникнуть на этом шаге.

Определим *позиционную стратегию* R игрока 1 как функцию $R:(H,x)\to R(H;x)$, определенную для всех возможных значений H,x и производящую для каждой текущей позиции (H,x) номер $R(H;x)$ следующего множества для посещения.

Подчеркнем, что выбор стратегии R не означает выбора какой-то перестановки (программного маршрута) r, а означает выбор *механизма* для формирования текущей последовательности посещений, в зависимости от реализующихся позиций (H, x_k). Каждая позиционная стратегия генерирует маршрут в течение движения, зависящий от реализующихся неопределенностей.

Определим *движение* $x(\cdot)$, *порожденное стратегией* R (из начальной позиции $(\overline{1,m}; x_0)$) как пару

$$x(\cdot) = (r, (x_k)_{k\in\overline{0,m}}), \; x_s \in M_{r_s}, r_s = R(\overline{1,m} \setminus \{r_i : i \in \overline{1, s-1}\}; x_{s-1}),$$

$s \in \overline{1,m}$; здесь $r = (r_1, \ldots, r_m)$ есть конкретная перестановка чисел $1, \ldots, m$, полученная согласно стратегии R при реализации конкретного m-набора неопределенностей $(x_k)_{k\in\overline{1,m}}$. Для каждой позиционной стратегии R обозначим через $X(R)$ совокупность ("пучок") всех возможных движений $x(\cdot)$, порожденных стратегией R.

В §1 формулируется задача нахождения позиционной стратегии, доставляющей минимальное гарантированное значение функционала $I(x(\cdot)$ на множестве всех возможных движений $x(\cdot)$, порожденных стратегией.

Задача 1.1.1. *Найти стратегию* $\tilde{R}$, *удовлетворяющую условию*

$$\sup_{x(\cdot)\in X(\tilde{R})} I(x(\cdot)) = \min_R \sup_{x(\cdot)\in X(R)} I(x(\cdot)) = \gamma^0.$$

Через ε^0 обозначим значение игровой задачи в классе программных управлений:

$$\varepsilon^0 \triangleq \min_r \sup_{(x_k)_{k\in\overline{1,m}}\in \prod_{k=1}^{m} M_{r_k}} I(r, (x_k)_{k\in\overline{0,m}}).$$

В §§2,3 построена позиционная стратегия, решающая Задачу 1.1.1 для случая функционала (1). Для любого множества $H \in 2^{\overline{1,m}}$ такого, что $|H| \geqslant 2$ ($|H|$ – число элементов во множестве H), вводится функция Беллмана посредством рекурсивного уравнения

$$J(H; y) \triangleq \min_{i\in H} \sup_{x\in M_i} \{c_i(y, x) + J(H \setminus \{i\}; x)\} \tag{3}$$

с краевым условием

$$J(\{i\}; y) \triangleq \sup_{x\in M_i} c_i(y, x) \qquad (i \in \overline{1,m}). \tag{4}$$

Решение уравнения (3), (4) находим рекурсивным образом. Начиная с краевого условия (4), на первой стадии вычислим функцию $J(H; y)$ для всех одноэлементных множеств $H = \{k\}$ и точек $y \in \left(\bigcup_{j=1}^{m} M_j\right) \setminus M_k$ $(k \in \overline{1,m})$. Затем вычислим $J(H; y)$ для всех двухэлементных множеств

$H = \{k, s\}$ и точек $y \in \left(\bigcup\limits_{j=1}^{m} M_j\right) \setminus (M_k \cup M_s)$ $(k, s \in \overline{1,m},\ k \neq s)$, и так далее. Продолжая этот рекурсивный процесс, на предпоследней стадии вычислим функцию $J(H; y)$ для всех $(m-1)$-элементных множеств $H \setminus \{k\}$ и точек $y \in M_k$ $(k \in \overline{1,m})$. Наконец, на последней стадии вычисляем значение $J(\overline{1,m}; x_0)$.

Далее, имея в виду цель построить стратегию, решающую Задачу 1.1.1, мы, параллельно с вычислением $J(H; y)$, находим и храним номер

$$R_k^0(H; y) \triangleq i^0(H; y) \tag{5}$$

$(k = m - |H| + 1)$, доставляющий минимум в (3), для всех H и y, которые могут возникнуть на этом шаге. Если такой $i^0(H; y)$ не единствен, выбираем и запоминаем любой из них.

Теорема 1.3.2. *Стратегия R^0, определенная соотношениями (3)–(5), является решением Задачи 1.1.1 для случая целевого функционала (1), т.е. является оптимальной минимаксной стратегией.*

Стратегия R^0 является *универсальной* стратегией (в том смысле, что она остается оптимальной минимаксной стратегией для любой промежуточной позиции (H, x), рассматриваемой в качестве начальной).

Приводится пример, показывающий, что оптимальный результат в классе позиционных стратегий может быть строго лучшим, чем оптимальный результат в классе программных стратегий: $\gamma^0 < \varepsilon^0$.

Далее в §3 вычисляется временная сложность и объем памяти всего алгоритма (в терминах числа элементарных операций). Пусть N_i есть число узлов в сетке $\tilde{M}_i$ на множестве M_i, т.е. $N_i \triangleq |\tilde{M}_i|$, $i \in \overline{1,m}$. Без потери общности считаем, что $N_i = N = const$, $i \in \overline{1,m}$. Показывается, что временная сложность алгоритма равна $O(N^2 m^2 2^m)$, а сложность памяти равна $O(Nm2^m)$.

В §4 рассматривается Задача 1.1.1 для случая функционала (2). Определим функцию Беллмана $(H \in 2^{\overline{1,m}},\ |H| \geqslant 2)$

$$\tilde{J}(H; y) \triangleq \min_{i \in H} \sup_{x \in M_i} \max \{c_i(y, x); \tilde{J}(H \setminus \{i\}; x)\} \tag{6}$$

с краевым условием

$$\tilde{J}(\{i\}; y) \triangleq \sup_{x \in M_i} c_i(y, x) \qquad (i \in \overline{1,m}). \tag{7}$$

Одновременно с $\tilde{J}(H; y)$ на каждом шаге находим и запоминаем номер $R_k^0(H; y)$ (5) (где теперь $i^0(H; y)$ доставляет минимум в (6)).

Теорема 1.4.2. *Стратегия R^0, определенная соотношениями (6), (7), (5), является решением Задачи 1.1.1 для случая функционала (2).*

Характеристики $O(N^2m^22^m)$ и $O(Nm2^m)$ велики, однако после того как мы построили точное (оптимальное) решение, можно сконструировать хорошо обоснованные эвристические решения. В §5 приводятся некоторые эвристические стратегии.

Оптимальный результат γ^0 по сути есть многократный минимакс, в котором на каждом k-м шаге игры локальная операция $\min_{r_k}\sup_{x_k}$ вычисляется на значениях специально сконструированной оптимальной функции (см. (3) и (6)):

$$\min_{r_1}\sup_{x_1}\ldots\min_{r_k}\sup_{x_k}\ldots\min_{r_m}\sup_{x_m}\ I(r,(x_k)_{k\in\overline{0,m}})$$

(где $r_k\in\overline{1,m}\setminus\{r_1,\ldots,r_{k-1}\}$, $x_k\in M_{r_k}$ $k\in\overline{1,m}$), так что для игрока 1 при конструировании позиционной эвристической стратегии естественно следовать, насколько это возможно, идее многократного минимакса.

Для определенности, возьмем случай целевого функционала (1).

Эвристика с одним локальным минимаксом. Для каждой текущей позиции (H,y) номер $i^0(H;y)$ следующего множества для посещения доставляет минимум в соотношении

$$J^{(1)}(H;y)=\min_{i\in H}\sup_{x\in M_i}\{c_i(y,x)\}.$$

Эта эвристика есть аналог эвристики ЗК "иди в ближайший". Ее вычислительная сложность равна $O(Nm^2)$.

Эвристика с двумя локальными минимаксами. Номер $i^0(H;y)$ следующего множества доставляет минимум в соотношении

$$J^{(2)}(H;y)=\min_{i\in H}\sup_{x\in M_i}\{c_i(y,x)+\min_{j\in H\setminus\{i\}}\sup_{z\in M_j}c_j(x,z)\}$$

($|H|\geqslant 2$). Их вычислительная сложность равна $O(N^2m^3)$.

Аналогичный вид имеют эвристические стратегии с s локальными минимаксами для $s=3,4,\ldots$ Их вычислительная сложность равна $O(N^sm^{s+1})$.

В этих эвристиках не требуется никакой специальной памяти для запоминания массивов значений $J(H;y)$ и $R^0(H;y)$.

Мотивация введения позиционных стратегий состоит, во-первых, в том, что они доставляют лучший априори гарантированный результат ($\gamma^0<\varepsilon^0$) по сравнению с программными управлениями, и, во-вторых, в том, что они еще больше улучшают результат γ^0, если игрок-противник (или природа) неудачно играет в течение игры.

Во **второй главе** диссертации рассматриваются задачи сближения и уклонения для управляемой системы относительно дискретной по времени совокупности выпуклых компактных множеств.

В §1 изучается программная линейная игровая задача наведения при ограничении на импульс управляющей силы. Рассматриваются движения двух управляемых объектов в фазовом пространстве R^n

$$\dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{8}$$

$$\dot{y}(t) = A_2(t)y(t) + C(t)v(t), \tag{9}$$

где $t \in T = [t_0, \vartheta]$; $u \in R^r$, $v \in R^q$ – управляющие воздействия; матрицы-функции $A_1(\cdot)$, $A_2(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ имеют размерность $n \times n$, $n \times n$, $n \times r$, $n \times q$ соответственно. Компоненты матриц-функций $B(\cdot)$ и $C(\cdot)$ предполагаются, вообще говоря, разрывными (а именно, ограниченными борелевскими функциями).

Рассмотрение ведется в классе программных управлений $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, причем "играем" только за первого игрока, распоряжающегося выбором $u(\cdot)$. Предполагается, что он знает свои управление $u(t)$, $t \in T$, и начальное состояние $x(t_0) = x_0$, а начальное состояние второго игрока, формирующего $V = v(\cdot)$, он знает лишь приближенно: $y_0 = y(t_0) \in Y_0$; кроме того, он не знает заранее управление $v(\cdot)$ игрока-противника.

На управления $U = u(\cdot)$ накладывается ограничение $U \in \mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ – выпуклое множество в пространстве r-мерных вектор-функций; основной интерес для нас представляет случай, когда множество $\mathcal{U}$ задается импульсным ограничением

$$\int_{t_0}^{\vartheta} \|u(t)\|_r dt \le c_1 \qquad (c_1 = const,\ c_1 \ge 0) \tag{10}$$

($\|\cdot\|_r$ – некоторая норма в R^r). Через $\varphi_U(\cdot) \triangleq (\varphi_U(t))_{t \in T}$ обозначим траекторию системы (8) из начальной позиции (t_0, x_0) при управлении U, а через $\psi_V(\cdot; y_0) \triangleq (\psi_V(t; y_0))_{t \in T}$ – траекторию системы (9) из начальной позиции (t_0, y_0) при управлении V. Эти траектории определяются формулой Коши. Пусть выделена некоторая часть координат, именуемых геометрическими, которые определяются заданным оператором проектирования $\pi : R^n \to Y \triangleq R^k$, $k \leqslant n$; π есть, фактически, умножение вектора x на соответствующую матрицу D размерности $k \times n$, у которой в каждой строке все компоненты нулевые, кроме одной, равной единице.

Рассмотрим программную задачу наведения на выпуклый компакт $M \subset R^k$ в заданный момент окончания процесса ϑ:

$$\left[\varepsilon(U) \triangleq \sup_{V\in\mathcal{V}} \sup_{y_0\in Y_0} d(D(\varphi_U(\vartheta) - \psi_V(\vartheta; y_0)), M)\right] \to \inf_{U\in\mathcal{U}}, \tag{11}$$

где $d(z, M) \triangleq \inf(\{\|z - m\| : m \in M\})$ – функция расстояния от точки $z \in Y$ до множества M, $M \subset R^k$. Другими словами, цель первого игрока – привести вектор $z(\vartheta) = D(x(\vartheta) - y(\vartheta))$ на множество M. Значение задачи (11) обозначим через γ:

$$\gamma \triangleq \inf_{U\in\mathcal{U}} \varepsilon(U). \tag{12}$$

Основой используемых далее двойственных конструкций является общий принцип двойственности, установленный Н.Н. Красовским[10,11] .

Пусть $L \triangleq \{l \in R^k \mid \|l\| \leqslant 1\}$, $L_0 \triangleq \{l \in R^k \mid \|l\| = 1\}$; $\Phi(\cdot,\cdot)$, $Y(\cdot,\cdot)$ – фундаментальные матрицы-функции решений однородных систем $\dot{x}(t) = A_1(t)x(t)$ и $\dot{y}(t) = A_2(t)y(t)$ соответственно, удовлетворяющие условиям $\Phi(t,t) = E$, $Y(t,t) = E$ при любом $t \in T$ (E – единичная матрица порядка n); $\rho(l|M)$ – опорная функция множества M.

Пусть выполняется условие, аналогичное условию[19] .

Теорема 2.1.1. *Величина γ (12) определяется равенством*

$$\gamma = \omega + \sup\left(\left\{-\omega; \sup(\{0; \max_{l\in L_0}[\Omega_1(l) + \inf_{U\in\mathcal{U}} l'p(U)]\})\right\}\right),$$

где $\Omega_1(l) \triangleq l'D\Phi(\vartheta, t_0)x_0 + l'z - \rho(l|G)$ $(l \in L_0,\ z \in R^k,\ \omega \in R,\ G$ – *выпуклый компакт в* $R^k)$.

Задача (11) может не иметь решения из-за некомпактности множества $\mathcal{U}$, так что целесообразна ее компактификация. В §2 строится оптимальное управление, доставляющее значение (12). Рассматриваем случай скалярных управлений U. В качестве множества обобщенных управлений используется

$$\Xi \triangleq \{\mu \in \mathbb{A}(\Sigma) \mid (v_\mu(I) \leq c_1)\&(\forall Z \in \Sigma : (\eta(Z) = 0) \Rightarrow (\mu(Z) = 0))\},$$

где $I \triangleq [t_0, \vartheta)$; Σ – полуалгебра подмножеств I, соответствующая условию $\mathcal{L} \subset \Sigma \subset \sigma(\mathcal{L})$ ($\mathcal{L}$ – полуалгебра, образованная семейством всех полуинтервалов $[a, b)$ таких, что $a \in I$, $b \in T$, а $\sigma(\mathcal{L})$ – борелевская

[19]Ченцов А.Г. Игровая задача сближения в собственно линейной системе//Изв. АН СССР. Техн. киберн. - 1977. - N2. - С. 3–7.

σ-алгебра); η – след меры Лебега на Σ; $\mathbb{A}(\Sigma)$ –множество всех скалярных конечно-аддитивных мер[20,21] ограниченной вариации с областью определения Σ; $v_\mu(I)$ есть полная вариация (на множестве I) конечно-аддитивной меры $\mu \in \mathbb{A}(\Sigma)$. Множество Ξ выпукло и компактно в $*$-слабой топологии τ_* пространства $\mathbb{A}(\Sigma)$. Предполагаем, что компоненты матриц-функций $B(\cdot) = b(\cdot)$ и $C(\cdot)$ принадлежат пространству $B(I, \Sigma)$ всех равномерных пределов Σ-ступенчатых функций на I. Множество $\mathcal{U}$ (10) формализуется следующим образом:

$$\mathcal{U} \triangleq \{U \in B_0(I, \Sigma) \mid \int\limits_I |u(t)|\eta(dt) \leq c_1\}$$

($B_0(I, \Sigma)$ – множество всех Σ-ступенчатых функций из I в $\mathbb{R}$). Замыкание множества $\tilde{\mathcal{U}} \triangleq \{U * \eta : \; U \in \mathcal{U}\}$ в топологии τ_* совпадает[20,21] с множеством Ξ: $\Xi = cl(\tilde{\mathcal{U}}, \tau_*)$, где $cl(\cdot, \tau)$ – оператор замыкания в смысле топологии τ, а $U * \eta$ – неопределенный η-интеграл функции U. Наряду с обычной U-траекторией $\varphi_U(\cdot)$, $\forall \mu \in \Xi$ рассматривается μ-траектория $\tilde{\varphi}_\mu(t) : \; I \to R^n$, задаваемая расширением формулы Коши[20,21] .

Также рассматривается обобщенная задача управления

$$\left[\tilde{\varepsilon}(\mu) \triangleq \sup_{V \in \mathcal{V}} \sup_{y_0 \in Y_0} d(D(\tilde{\varphi}_\mu(\vartheta) - \psi_V(\vartheta; y_0)), \; M)\right] \to \min_{\mu \in \Xi}. \tag{13}$$

Ее значение обозначим через $\tilde{\gamma}$: $\tilde{\gamma} \triangleq \min\limits_{\mu \in \Xi} \tilde{\varepsilon}(\mu)$. Имеем равенство $\gamma = \tilde{\gamma}$.

Далее формулируются необходимые условия оптимальности в задаче (13). Введем конечномерную задачу МП

$$\Lambda(l) \to \max, \, l \in L_0, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda(l) &\triangleq \min_{\mu \in \Xi} \tilde{\Psi}_1(l, \mu) = -c_1 \sup_{t \in I} |l' D\Phi(\vartheta, t) b(t)| + \Omega_1(l), \\ \tilde{\Psi}_1(l, \mu) &\triangleq l' \int\limits_I D\Phi(\vartheta, \tau) B(\tau) \mu(d\tau) + \Omega_1(l). \end{aligned} \tag{15}$$

Теорема 2.2.1. *Пусть $\tilde{\gamma} > \sup(\{0; \omega\})$. Тогда для оптимальности обобщенного управления $\mu^0 \in \Xi$ необходимо выполняется равенство*

$$\min_{\mu \in \Xi} \tilde{\Psi}_1(l^0, \mu) = \tilde{\Psi}_1(l^0, \mu^0), \tag{16}$$

[20] Chentsov A.G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. - New York: Plenum Publ. Corp., 1996.

[21] Chentsov A.G. Asymptotic attainability. - Kluwer: Dordrecht, 1997.

где l^0 доставляет максимум в (14), а $\tilde{\Psi}_1(l,\mu)$ определяется в (15).

Равенство (16) эквивалентно условию

$$\min_{\mu\in\Xi} l^{0'} \int_I D\Phi(\vartheta,\tau)b(\tau)\mu(d\tau) = -c_1 \sup_{t\in I} | \, l^{0'} D\Phi(\vartheta,t)b(t)|. \tag{17}$$

Указаны случаи, когда минимум в (16), (17) достигается в классе счетно-аддитивных мер, и когда для достижения минимума в (16), (17) недостаточно не только класса "обычных", но и класса счетно-аддитивных обобщенных управлений.

Далее в §2 рассматривается задача последовательного сближения с системой выпуклых компактов. В пространстве Y геометрических координат управляемого процесса выделены непустые, выпуклые компактные множества $M_1,\ldots,M_m$, где m – некоторое натуральное число $(\forall i\in\overline{1,m}: \ M_i\subset Y)$. Кроме того, указаны моменты $\tau_0=t_0\in T$, $\tau_1\in T,\ldots,\tau_m=\vartheta\in T$, упорядоченные соотношением $\tau_{i-1}<\tau_i$ при $i\in\overline{1,m}$. В моменты τ_i определяются расстояния ($\|\cdot\|$ – евклидова норма в Y): $d(\pi_i[x(\tau_i)],M_i) = \min_{y\in M_i}\|\pi_i[x(\tau_i)]-y\|$. Пусть $S \triangleq \{\alpha\in R^m \mid \alpha_i\geqslant 0 \ (i\in\overline{1,m}),\ \sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1\}$. Задачу $(\alpha\in S)$

$$\gamma_\alpha(U)\triangleq\sum_{i=1}^{m}\alpha_i d(\pi_i[\varphi_U(\tau_i)],M_i)\to\inf_{U\in\mathcal{U}} \tag{18}$$

назовем α-задачей взвешенной оптимизации. Ее значение обозначим через γ_α^0. Наряду с задачей (18) рассмотрим обобщенную задачу

$$\gamma_\alpha(\mu)\triangleq\sum_{i=1}^{m}\alpha_i d(\pi_i[\tilde{\varphi}_\mu(\tau_i)],M_i)\to\min_{\mu\in\Xi}. \tag{19}$$

Эти две задачи эквивалентны по результату: $\gamma_\alpha^0=\min_{\mu\in\Xi}\gamma_\alpha(\mu)$. Через Λ обозначим множество всех отображений $\lambda:\overline{1,m}\to L$. Элементы Λ – "наборы" $(\lambda(1),\ldots,\lambda(m))$, удовлетворяющие условию $\lambda(i)\in L$ при $i\in\overline{1,m}$. Пусть $\forall\alpha\in S,\ \lambda\in\Lambda$:

$$\Psi_\alpha(\lambda)\triangleq\sum_{i=1}^{m}\alpha(i)(\lambda'(i)\pi_i[\Phi(\tau_i,t_0)x_0]-\rho(\lambda(i)|M_i))-$$

$$-c_1\max_{s\in\overline{1,m}}\sup_{t\in[\tau_{s-1},\tau_s[}|\sum_{i=s}^{m}\alpha_i\lambda'(i)\pi[\Phi(\tau_i,t)b(t)]|.$$

Для $\forall\alpha\in S$ рассмотрим двойственную задачу

$$\Psi_\alpha(\lambda)\to\max_{\lambda\in\Lambda}. \tag{20}$$

Пусть $\alpha \in S$, тогда значения задач (19) и (20) совпадают. В Теореме 2.2.3 получены необходимые условия оптимальности в задаче (19).

Задача (18) является вспомогательной для рассматриваемой далее задачи минимизации максимального отклонения (т.е. задачи последовательного программного сближения)

$$\hat{\gamma}(U) \triangleq \max_{i\in\overline{1,m}} d(\pi_i[\varphi_U(\tau_i)], M_i) \to \inf_{U\in\mathcal{U}}.$$

Соответствующая ей обобщенная задача имеет вид

$$\hat{\gamma}(\mu) \triangleq \max_{i\in\overline{1,m}} d(\pi_i[\tilde{\varphi}_\mu(\tau_i)], M_i) \to \min_{\mu\in\Xi}. \tag{21}$$

Значения этих задач совпадают. Вводится двойственная задача

$$\Psi_\alpha(\lambda) \to \max, \quad (\alpha,\lambda) \in S\times\Lambda, \tag{22}$$

и получены следующие необходимые условия оптимальности.

Теорема 2.2.4. *Пусть $\nu \in \Xi$ есть решение задачи (21), а пара $(\alpha^0,\lambda^0) \in S\times\Lambda$ есть решение задачи (22). Тогда*

$$\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{[\tau_{j-1},\tau_j[} \sum_{i=j}^{m} \alpha_i^0 \lambda^{0\prime}(i) D_i\Phi(\tau_i,t)b(t)\nu(dt) =$$

$$= -c_1 \max_{s\in\overline{1,m}} \sup_{t\in[\tau_{s-1},\tau_s[} \Big|\sum_{i=s}^{m} \alpha_i^0\lambda^{0\prime}(i)D_i\Phi(\tau_i,t)b(t)\Big|.$$

В §3 для собственно линейной управляемой системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f^{(1)}(t,u(t)) + c(t)f^{(2)}(t,v(t)), \tag{23}$$

($t\in T=[t_0,\vartheta]$, $x\in R^n$, $x(t_0)=x_0$) рассматриваются α-задача взвешенной оптимизации и задача последовательного программного уклонения относительно заданной системы выпуклых компактов $M_i \subset Y$ в моменты τ_i, $i\in\overline{1,m}$. Здесь $U=u(\cdot):T\to R^p$, $V=v(\cdot):T\to R^q$, $c(\cdot):T\to[0,\infty)$ суть кусочно-постоянные и непрерывные справа управляющие функции, удовлетворяющие ограничениям

$$u(t)\in P, \quad v(t)\in Q, \quad \int\limits_{t_0}^{\vartheta} c(t)dt \le a,$$

где $a=const$, $a\ge 0$, P и Q – непустые компактные множества. Множества всех таких допустимых управлений обозначим через $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{C}$.

Отображения A, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ – непрерывные отображения, определенные на T, $T \times P$, $T \times Q$ соответственно.

Обозначим через $\varphi(t, U, V, c(\cdot))$ решение системы (23), и рассмотрим α-задачу взвешенной минимизации системы отклонений

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i d(\pi_i[\varphi(\tau_i, U, V, c(\cdot))], M_i) \to \inf_{(U,V,c(\cdot))} \qquad (24)$$

и задачу последовательного программного уклонения

$$\min_{i \in \overline{1,m}} d(\pi_i[\varphi(\tau_i, U, V, c(\cdot))], M_i) \to \sup_{(U,V,c(\cdot))} \qquad (25)$$

$(U \in \mathbf{U}, V \in \mathbf{V},\ c(\cdot) \in \mathbf{C})$. Вычисляются их значения γ_α^0 и $æ^0$ соответственно. Для вычисления этих значений множества $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ погружаются в виде всюду плотных подмножеств в компакты обобщенных программных управлений-мер[1,4,16,17]. Характерный вид такого рода формул виден из Теоремы 2.3.2.

Теорема 2.3.2. *Значение задачи (25) определяется равенством*

$$æ^0 = \max_{\lambda \in \Lambda} \min_{\alpha \in S} \Big[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j (\lambda'(j)\pi_i[\Phi(\tau_j, t_0)x_0] - \rho(\lambda(j)|M_j)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \max_{u \in P} \Big(\sum_{i=j}^{m} \alpha_i \lambda'(i)\pi_i[\Phi(\tau_i, t) f^{(1)}(t, u)]\Big) dt +$$

$$+ a \max_{s \in \overline{1,m}} \sup\{0; \max_{(t,v) \in [\tau_{s-1}, \tau_s] \times Q} \Big(\sum_{i=s}^{m} \alpha_i \lambda'(i)\pi_i[\Phi(\tau_i, t) f^{(2)}(t, v)]\Big)\}\Big].$$

Выражения для γ_α^0 и $æ^0$ определяют функции Беллмана (значения задач (24) и (25) оптимального управления) в терминах значений конечномерных задач МП.

В §4 рассматривается задача последовательного программного уклонения для случая геометрических ограничений на управление, и приводятся необходимые условия оптимальности для собственно линейной управляемой системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t, u(t)), \qquad (26)$$

где $t \in T = [t_0, \vartheta]$, $x \in R^n$, $u(t) \in P$, $t \in T$, P – непустой компакт в R^p, $A(\cdot)$ – непрерывная матрица-функция размерности $n \times n$, $g(t, u)$ – непрерывная по совокупности переменных вектор-функция. Допустимыми программными управлениями считаем кусочно-непрерывные и непрерывные справа функции $U = u(\cdot) : u(t) \in P$, $t \in T$.

Пусть задано непрерывное (в метрике Хаусдорфа) многозначное отображение M из T в семейство выпуклых компактов пространства R^k. Рассмотрим задачу программного уклонения от "трубки" $M(t),\ t \in T$:

$$\varepsilon^*(U) \triangleq \min_{t \in T} d(\pi_t[\varphi_U(t)], M(t)) \to \sup_{U \in \mathbf{U}}.$$

Ее значение обозначим через ε^* : $\varepsilon^* \triangleq \inf_{U \in \mathbf{U}} \varepsilon^*(U)$.

Для достижения этого значения используем процедуру расширения. Через $\mathcal{M}$ обозначим множество всех обобщенных программных управлений[1,§30;4,§6.4] $\mu = \{\mu_t,\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$ (на отрезке T). Значения обычной и обобщенной задач совпадают: $\varepsilon^* = \max_{\mu \in \mathcal{M}} \varepsilon^*(\mu)$, где

$$\varepsilon^*(\mu) \triangleq \min_{t \in T} d(\pi_t[\tilde{\varphi}_\mu(t)], M(t)).$$

Мы изучаем дискретную аппроксимацию задачи уклонения траектории от непрерывной трубки $M(t),\ t \in T$, а именно, задачу последовательного программного уклонения от дискретной системы множеств $M_1, \ldots, M_m$:

$$\varepsilon(U) \triangleq \min_{i \in \overline{1,m}} d(\pi_i[\varphi_U(\tau_i)], M_i) \to \sup_{U \in \mathbf{U}}. \tag{27}$$

Пусть ε^0 : $\varepsilon^0 \triangleq \sup_{U \in \mathbf{U}} \varepsilon(U)$. Рассмотрим также обобщенную задачу

$$\tilde{\varepsilon}(\mu) \triangleq \min_{i \in \overline{1,m}} d(\pi_i[\tilde{\varphi}_\mu(\tau_i)], M_i) \to \max_{\mu \in \mathcal{M}}. \tag{28}$$

Значения задач (27) и (28) совпадают: $\varepsilon^0 = \max_{\mu \in \mathcal{M}} \tilde{\varepsilon}(\mu)$. Более того, решение μ^0 задачи (28) может быть $*$-слабо аппроксимировано с помощью обычных управлений. Поэтому ограничиваемся решением задачи (28).

Пусть

$$\tilde{\omega}(\lambda, \alpha) \triangleq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i[\lambda'(i) D_i \Phi(\tau_i, t_0) x_0 - \rho(\lambda(i)|M_i)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \max_{u \in P} (\sum_{i=j}^{m} \alpha_i \lambda'(i) D_i \Phi(\tau_i, \xi) g(\xi, u)) d\xi,$$

$$\Lambda^0 \triangleq \{\lambda \in \Lambda \mid \min_{\alpha \in S} \tilde{\omega}(\lambda, \alpha) = \varepsilon^0\},$$

$$A^0(\lambda) \triangleq \{\alpha^0 \in S \mid \tilde{\omega}(\lambda, \alpha^0) = \min_{\alpha \in S} \tilde{\omega}(\lambda, \alpha)\},\ \lambda \in \Lambda.$$

Множества Λ^0 и $A^0(\lambda)$ непусты. Пусть выполнено следующее условие.

Условие 2.4.1. *Либо оптимальное управление в задаче (28) единственно, либо Λ^0 – одноточечное множество.*

Теорема 2.4.1 (принцип максимума). *Пусть выполняется Условие 2.4.1. Тогда если $\nu \in \mathcal{M}$ таково, что $\tilde{\varepsilon}(\nu) = \varepsilon^0$, и $\lambda^0 \in \Lambda^0$, то для любого $\alpha^0 \in A^0(\lambda^0)$ при почти всех t из $[\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j \in \overline{1,m}$, выполняется условие*

$$\int\limits_P \sum_{i=j}^{m} \alpha^0 \lambda^{0\prime}(i) D_i \Phi(\tau_i, t) g(t,u) \nu_t(du) = \max_{u \in P} \left(\sum_{i=j}^{m} \alpha_i^0 \lambda^{0\prime}(i) D_i \Phi(\tau_i, t) g(t,u) \right).$$

В §5 представлены примеры. В первом примере рассмотрена задача управления материальной точкой на плоскости при комбинированных ограничениях на управление. Выписаны формулы для γ_α^0 и $æ^0$ для задач (24) и (25), и для конкретных значений параметров приведены результаты численных расчетов.

Во втором примере рассмотрена задача наведения для двух материальных точек $x(t)$ и $y(t)$, движущихся по прямой Z в горизонтальной плоскости под действием реактивных ускорений $u(t)$ и $v(t)$ соответственно. Ускорения направлены вдоль Z и удовлетворяют импульсным ограничениям с ресурсами c_1 и c_2. Вычислено значение $\gamma = \tilde{\gamma}$ задач (11) и (13). Рассмотрена конкретная ситуация, когда для достижения соответствующего минимума не хватает не только класса "обычных", но и счетно-аддитивных обобщенных управлений; минимум в (16), (17) здесь достигается, в частности, на (чисто) конечно-аддитивной мере.

Публикации по теме диссертации

1. Серов В.П., Ченцов А.Г. Конечно-аддитивные меры и расширения некоторых линейных задач оптимального управления/ Урал. политехн. ин-т. - Свердловск, 1988. - 38 с. - Деп. в ВИНИТИ N 4200-В88.

2. Серов В.П., Ченцов А.Г. Конечно-аддитивное расширение линейных задач оптимального управления с интегральными ограничениями/ Урал. политехн. ин-т. - Свердловск, 1989. - 59 с. - Деп. в ВИНИТИ N 6644-В89.

3. Серов В.П., Ченцов А.Г. Конечно-аддитивные меры и релаксации задач оптимального управления//Тез. докл. VII Всесоюзн. конф. "Качеств. теория диффер. уравнений". - Рига, 1989. - С. 202.

4. Морина С.И., Серов В.П., Ченцов А.Г. К вопросу о построении функции Беллмана в некоторых задачах оптимального управления с комбинированными ограничениями//Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. - 1989. - N 4.- С. 9–16.

5. Серов В.П., Ченцов А.Г. Об одной конструкции расширения задачи управления с интегральными ограничениями// Диффер. уравнения. -

1990.- Т. 26, N 4.- С. 607–617.

6. Серов В.П., Ченцов А.Г. О программной линейной игровой задаче наведения при ограничении на импульс управляющей силы//Автом. телемех. - 1993. - N 5. - С. 61–74.

7. Серов В.П. Компактификация задачи управления разрывной системой с ограничением на ресурс// Тез. докл. VII Всесоюзн. конф. "Управл. в мех. сист." - Свердловск, 1990. - С. 95–96.

8. Серов В.П. Оценивание израсходованного ресурса управления игрока-противника как проблема моментов// Изв. РАН. Техн. киберн. - 1994. - N 6. - С. 215–222.

9. Chentsov A.G., Serov V.P. Representation for some set-theoretic limits in the class of two-valued finitely additive measures//Funct. Differ. Equat. - 1996. - Vol. 3, N 3-4. - P. 265–278.

10. Serov V.P. The estimate of control resourses spent by player-opponent as a moment problem//Тез. докл. II Межд. Семинара "Негладкие и разрывные задачи управления и оптимизации". - Челябинск, 1993. - С. 123–125.

11. Serov V.P. Optimal feedback strategy in the game variant of generalized travelling salesman problem//Proc. 11th IFAC Workshop "Control Applications of Optimization". - Vol. 2. - Oxford: Pergamon, 2000. - P. 635–640.

12. Serov V.P. Adherence approach in the moment problems: Convergence for unbounded case//Prepr. 5th IFAC Symposium "Nonlinear Control Systems". - Vol. 2. - St. Petersburg, 2001. - P. 477–482.

Подписано в печать 7.03.02 г. Формат 60x84/16.
Бумага ВХИ. Усл. печ. л. 1,25. Заказ 73. Тираж 100.

Отпечатано в ИПЦ «Издательство УрГУ».
г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.