На правах рукописи

МАЗГАЛИН Дмитрий Вениаминович

ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ ПРОГРАММНОЙ ТРАЕКТОРИИ ВЫВЕДЕНИЯ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ С КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ

05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2013

Работа выполнена в отделе прикладных проблем управления ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, с.н.с Кукушкин Александр Петрович
Официальные оппоненты:	Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, заведующий отделом управляемых систем
	Бельский Лев Николаевич, кандидат технических наук, ФГУП Научно-производственное объединение автоматики имени академика Н.А. Семихатова, заместитель генерального директора по ракетно-космической тематике
Ведущая организация:	ОАО «Государственный ракетный центр имени академика В.П. Макеева», г. Миасс

Защита состоится "____"____________ 2013 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.285.25 на базе ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина» по адресу:
620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн. 248, зал заседаний диссертационных советов.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина».

Автореферат разослан "____" ________________ 2013 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Одной из важных задач баллистического навигационного обеспечения запуска ракеты-носителя (РН) с космическим аппаратом (КА) является расчет программной номинальной траектории ее движения на активном участке (АУ). Построение программной траектории полета осуществляется в целях:

– оценки возможности выведения полезной нагрузки с помощью РН на заданную орбиту, то есть проведения проверки возможности реализации задачи пуска;

– получение исходной информации по параметрам траектории полета для расчета коэффициентов бортового полетного задания.

Построение программного движения должно осуществляться с выполнением условий:

– оптимальности программного движения по критерию максимизации веса выводимой РН на заданную орбиту;

– падения отделяемых элементов конструкции РН в заданные районы.

В настоящее время предъявляется ряд принципиально новых условий:

– должны учитываться изменения по условиям пуска, в первую очередь данные по систематике ветра и уточнения по массовым характеристикам РН;

– построение программного движения должно проводиться с учетом ограничений по углам атаки, скольжения и угловым скоростям разворота РН, обусловленных минимизацией поперечных перегрузок на атмосферном участке полета и конструктивными особенностями носителя;

– выведение КА на орбиты, задаваемые оскулирующими высотами над поверхностью общеземного эллипсоида;

– построение программного движения и подготовка бортового полетного задания должны проводиться оперативно перед стартом с применением штатной наземной аппаратуры системы управления.

Анализ известных алгоритмических решений построения программного движения РН на активном участке, опубликованных в литературе, показывает следующее. Базовыми монографиями по рассматриваемой тематике являются труды Д.Ф. Лоудена[1], Р.Ф. Аппазова[2], А.М. Летова[3], Ю.Г. Сихарулидзе[4], О.М. Алифанова[5].

[1]Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. М.: Издательство МИР. 1966

[2]Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. М.: Наука. 1987.

[3]Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука. 1969.

[4]Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов. М.: Бином. 2011.

[5]Алифанов О.М. Баллистические ракеты и ракеты-носители. М.: Дрофа. 2004.

Исследования, изложенные в монографиях, проводились при предположении, что за управляющий параметр принимается угол ориентации вектора тяги по углу тангажа, угол рыскания полагается равным нулю.

В монографиях А. Брайсона, Хо Ю-ши[6] методами классического вариационного исчисления и Дж. Лейтмана[7] на основе принципа максимума Понтрягина определена структура оптимального программного управления на безатмосферном активном участке при описании гравитационных сил плоскопараллельным однородным гравитационным полем.

Оптимальная программа угла тангажа представляется дробно-линейным тангенсом, то есть

$$\operatorname{tg}\vartheta(t) = \frac{c_1 + c_2(t - t_0)}{c_3 + c_4(t - t_0)},$$

где $\vartheta(t)$ – угол тангажа, t_0 – начало движения, c_i – параметры управления.

Для определения параметров управления c_i необходимо проводить решение двухточечной краевой задачи.

В работе А.П. Кукушкина[8] исследуется структура оптимального по быстродействию управления, когда в качестве управления принимается нормальное ускорение.

Общие принципы управления полетом и построения программного движения рассматриваются в монографиях Г.Н. Разоренова[9], А.П. Разыграева[10]. В монографии под общей редакцией профессора Г.Н. Лебедева[11] исследованы вопросы построения программного движения РН с использованием градиентных методов определения управления.

Общие теоретические и практические вопросы построения оптимального программного движения с использованием градиентных методов рассмотрены в монографиях Р.П. Федоренко[12] и Э.П. Сейдж, Ч.С. Уайт[13]. В связи с большой сложностью и временными затратами, градиентные методы нельзя применить в случае оперативного расчета полетного задания РН.

На предприятии ФГУП НПО автоматики им. академика Н.А. Семихатова при создании системы управления РН Союз-2 проводились исследования по методам построения программной траектории. Тем не менее, задача построения программного движения для трехступенчатой РН типа Союз-2 не имеет

[6] Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Издательство МИР. 1972.
[7] Лейтман Дж. Введение в теорию оптимального управления. М.: Наука. 1968.
[8] Кукушкин А.П. Исследование структуры оптимальных по быстродействию траекторий в плоском поле тяготения. Сб. статей. Вопросы оптимизации нелинейных систем автоматического управления. Свердловск.: УНЦ АН СССР. 1975.
[9] Разоренов Г.Н. Системы управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение. 2003.
[10] Разыграев А.П. Основы управления полетом космических аппаратов. М.: Машиностроение. 1990.
[11] Лебедев Г.Н. Системы управления летательными аппаратами. М.: Издательство МАИ. 2007.
[12] Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука. 1978
[13] Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь. 1982.

полного решения, и его поиск является актуальной проблемой.

Цель работы. Разработка аналитических и численных методов расчета программной номинальной траектории выведения РН на орбиту, при использовании которых обеспечивается выполнение требований, предъявляемых к построению программного движения.

Методы исследования. Основные результаты базируются на использовании теории оптимального управления (принцип максимума Понтрягина), численных методах нелинейного программирования и линейной алгебры, на результатах теории движения тел небесной механики.

Научная новизна работы. В работе получены следующие новые результаты.

1. Решена задача определения параметров оскулирующей орбиты[14] при ее задании высотами, отсчитываемыми от поверхности общеземного эллипсоида. Получены в аналитическом виде ограничения на задающие орбиту параметры, выполнение которых достаточно для существования и построения соответствующей им оскулирующей орбиты. Разработан вычислительный метод расчета параметров оскулирующей целевой орбиты при отсчете высот от поверхности общеземного эллипсоида.

2. Для задачи построения программного движения на атмосферном участке полета РН были разработаны:

– способ построения программного управления по углам тангажа и рыскания на атмосферном участке полета, обеспечивающий прохождение участков траектории с повышенными скоростными напорами с соблюдением заданных ограничений на углы атаки и скольжения в условиях воздействия систематических составляющих скорости ветра;

– способ определения азимута пуска и параметра программы по углу атаки, при которых обеспечивается приведение точки падения корпуса первой ступени в разрешенный район.

3. Для задачи построения программного движения на безатмосферном участке полета конечной (третьей) ступени РН разработан метод, в котором исходная задача разделяется на следующие подзадачи:

– построение оптимального управления боковым движением с минимизацией потерь по кажущейся скорости в плоскости орбиты,

– построение оптимального управления вертикальным движением РН с минимизацией потерь по кажущейся скорости на тангенциальное направление скорости в плоскости орбиты на момент выведения,

– определение момента выключения двигательной установки (ДУ) третьей ступени по достижении требуемого значения тангенциальной скорости

[14] Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука. 1965.

и выбора приведенной широты точки выведения по минимуму расстояния до заданной орбиты по тангенциальному направлению.

Для каждой подзадачи найдена структура квазиоптимального управления при использовании в качестве управляющих параметров программных значений угловых скоростей разворота РН. Разработан численный метод определения параметров полученной структуры управления.

4. Исследована и подтверждена работоспособность разработанных алгоритмов и методов определения их параметров на реальных траекториях выведения РН типа Союз-2.

Практическая ценность работы. Разработанные в диссертации методы и алгоритмы построения программного движения использованы в научно-исследовательских и опытно-конструкторских работах, проводимых ФГУП НПО автоматики им. Н.А. Семихатова с участием ИММ УрО РАН. Способы построения программного движения на атмосферном участке полета первой ступени и на безатмосферном участке полета третьей ступени реализованы в системе подготовки полетного задания РН Союз-2.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научно-технических конференциях, семинарах, научно-технических советах предприятий и организаций, в том числе на шестых научных чтениях по военной космонавтике памяти М.К. Тихонравова "Космос и обеспечение безопасности России" (г. Юбилейный, 2006 г.),на 3 Международной конференции "Параллельные вычисления и задачи управления памяти И.В. Прангишвили" (г. Москва, 2006 г.), научно-технической конференции "Проблемные вопросы открытия и эксплуатации трасс запусков космических аппаратов, баллистического и метеорологического обеспечения пусков ракет-носителей" (г. Москва, 2010 г.).

Публикации. Основные результаты работы изложены в 7 статьях, список которых приведен в конце реферата. Из них две опубликованы в рецензируемых научных журналах, определенных ВАК. В совместной работе [3] А.П. Кукушкину принадлежит постановка задачи получения первых интегралов для уравнений принципа максимума на основе свойства симметрии, а диссертанту – вывод интегралов и определение структуры оптимального управления. В работе [2] В.И. Починскому принадлежит постановка задачи и реализация разработанного метода непосредственно в системе подготовки полетного задания в НАСУ РН Союз–2, а диссертанту – разработка структуры управления, разработка метода определения азимута пуска и программы угла тангажа на атмосферном участке полета РН, результаты исследований по вычислительным методам определения азимута и параметров программы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, двух приложений и списка цитируемой литературы. Главы разбиты на разделы. Объем диссертации составляет 136 страниц текста, в том числе 14 таблиц, 12 рисунков. Список цитируемой литературы содержит 47 названий.

Содержание диссертации. Исследуемое движение носителя описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений девятого порядка:

$$\begin{cases} dx/dt = V, \\ dV/dt = W_R(t,x,\vartheta,\psi) + W_A(t,x,V,\vartheta,\psi) + g(x), \\ dm/dt = -\mu, \\ d\vartheta/dt = U_\vartheta(t), \\ d\psi/dt = U_\psi(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $x \in R^3$ – вектор координат, $V \in R^3$ – вектор скоростей, m – текущая масса носителя, μ – величина секундного расхода. Начальный момент t_0 и начальные условия для этой системы считаем известными: $x(t_0) = x_0$, $V(t_0) = V_0$, $\vartheta(t_0) = \vartheta_0$, $\psi(t_0) = \psi_0$. Момент окончания активного участка t_f не фиксирован. Явные выражения для вычисления гравитационного ускорения $g(x) \in R^3$, реактивного ускорения $W_R(t,x,\vartheta,\psi) \in R^3$, аэродинамического ускорения $W_A(t,x,V,\vartheta,\psi) \in R^3$ приведены в трудах Р.Ф. Аппазова[2].

В момент окончания движения t_f должно обеспечиваться выведение РН на околоземные эллиптические орбиты. Уравнение орбиты имеет вид:

$$F_1(x(t_f),p,e,u,u_1) = 0, F_2(V(t_f),p,e,u,u_1) = 0, F_1,F_2 \in R^3, \tag{2}$$

где p – фокальный параметр орбиты, e – эксцентриситет орбиты, u – текущее значение приведенной широты. Значения p, e вычисляются через задаваемый набор параметров (i_n,Ω,h_2,h_1,u_1), где i_n – угол наклона плоскости орбиты к экватору, Ω – долгота восходящего узла в точке выведения; h_2 – максимальная высота над поверхностью Земли; h_1 – минимальная высота над поверхностью Земли, u_1 – приведенная широта точки орбиты с минимальной высотой.

Угловые скорости U_ϑ, U_ψ изменения углов ϑ, ψ(углы тангажа и рыскания) рассматриваются как управляющие воздействия, ограниченные по величине неравенствами $|U_\vartheta(t)| \le U_{gr}$, $|U_\psi(t)| \le U_{gr}$, п.в. $t \in [t_0, t_f]$.

На участке полета первой ступени имеются ограничения на возможные значения фазовых координат:

– вертикальный полет ($\vartheta(t) = \pi/2$, $\psi(t) = 0$) на начальном участке $t \in [t_0, t_{nrt}]$, где t_{nrt} – момент окончания участка вертикального полета;

– полет с выполнением ограничений по величинам углов атаки и скольжения при прохождении участка повышенных скоростных напоров;

[2] Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. М.: Наука. 1987.

– набранные параметры движения на момент окончания полета первой ступени должны обеспечивать попадание отделяемых элементов конструкции в заданный район.

В работе решаются следующие задачи:

1. Определение параметров орбиты и вычисление по ним терминальных условий на момент t_f окончания движения носителя по задаваемым величинам (i_n,Ω,h_2,h_1,u_1) над поверхностью общеземного эллипсоида.

2. Построение управления на участке полета первой ступени с обеспечением падения отделяемых элементов конструкции в заданный район падения и выполнения ограничений по углам атаки и скольжения.

3. Определение квазиоптимального управления (структура управления и значения его параметров) при движении носителя на участке полета третьей ступени. Система уравнений движения носителя на участке полета третьей ступени, где отсутствуют аэродинамические силы, получается из системы (1) обнулением W_A и имеет вид:

$$\begin{cases} dx/dt = V, \\ dV/dt = W_R(x,\vartheta,\psi) + g(x), \\ dm/dt = -\mu, \\ d\vartheta/dt = U_\vartheta(t), \\ d\psi/dt = U_\psi(t). \end{cases} \tag{3}$$

Требуется при заданных начальных условиях найти управление U_ϑ, U_ψ, удовлетворяющее ограничениям, обеспечивающее выведение на эллиптическую орбиту и минимизирующее значение функционала $J = -m(t_f)$.

Во ВВЕДЕНИИ обосновывается актуальность темы, формулируется цель диссертационной работы, содержится обзор имеющихся работ по исследуемой тематике.

В ПЕРВОЙ ГЛАВЕ исследуется задача определения параметров эллиптической орбиты по заданным условиям на момент окончания выведения РН. Эллиптические орбиты используются для описания целевого множества в терминальном методе наведения при нахождении программного движения. Для РН типа Союз-2 эллиптическая орбита задается следующим составом параметров: углом наклона плоскости орбиты к экватору (i_n), долготой восходящего узла (Ω) в точке выведения; максимальной высотой (h_2) над поверхностью Земли; минимальной высотой (h_1) над поверхностью Земли и значением приведенной широты (u_1) в точке минимума расстояния от орбиты до поверхности Земли.

В качестве модели поверхности Земли могут задаваться сфера среднего радиуса или общеземной эллипсоид. Постановка подобной задачи содержится в монографии Р.Ф. Аппазова, О.Г. Сытина, а также в работе И.К. Бажинова, В.П. Гаврилова[15]. Там же содержится решение задачи определения параметров орбиты при отсчете высот от сферы.

В диссертационной работе проведено исследование и разработан метод определения параметров эллиптической орбиты с отсчетом высот от общеземного эллипсоида при ее задании выше описанным составом параметров.

Текущее значение h высоты орбиты вычисляется по формуле

$$h = p/(1 + e\cos(u - \omega)) - a_{oz}(1 - k\sin^2 u), \tag{4}$$

где $k = 0.5e_{oz}^2 \sin^2 i_n$, a_{oz} – большая полуось земного эллипсоида; e_{oz}^2 – квадрат второго эксцентриситета; p – фокальный параметр орбиты; u – приведенная широта; ω – аргумент перигея; e – эксцентриситет орбиты.

Решается задача нахождения такой совокупности параметров p, e, ω, задающих функцию (4), для которых точка минимальной высоты $(u_1,\ h_1)$ и точка максимальной высоты $(u_2,\ h_2)$ являются экстремальными. Под экстремальными точками (u, h) понимаются точки, которые удовлетворяют формуле (4) и обращают в ноль первую производную этой функции.

Теорема 1 определяет условия для параметров $(i_n,\ u_1,\ h_1,\ h_2)$, задающих орбиту относительно общеземного эллипсоида, выполнение которых достаточно для существования соответствующей эллиптической орбиты.

Теорема 1. *Эллиптическая орбита с параметрами (p, e, ω) при отсчете высот от общеземного эллипсоида существует, если совокупность величин* $i_n,\ u_1,\ h_1,\ h_2$ *где* $h_2 > h_1$, $h_2 < 0.5a_{oz}$ *удовлетворяет условию* $(h_2 - h_1) > \sqrt{2}ka_{oz}$. *Если* $(h_2 - h_1) \le \sqrt{2}ka_{oz}$, *то для существования орбиты достаточно выполнения условия* $(h_2 - h_1) > ka_{oz}\max\{\cos 2u_1 + 5\cdot 10^{-2}\sin 2u_1, \cos 2u_1 - 5\cdot 10^{-2}\sin 2u_1\}$.

Доказательство теоремы является конструктивным и на его основе построен алгоритм определения p, e, ω – параметров эллиптической орбиты и u_2 – приведенной широты точки, в которой достигается максимальная высота над поверхностью общеземного эллипсоида.

ВО ВТОРОЙ ГЛАВЕ приведена модель движения центра масс РН с учетом систематики ветра и проведены исследования по построению программного управления движением РН на атмосферном участке полета первой ступени с учетом изложенных ранее требований. Плоскость полета РН определяется заданием азимута пуска Π_0.

[15]Бажинов И.К., Гаврилов В.П. Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют-6» - «Союз»- «Прогресс». М.: Наука. 1985.

Программа по углу тангажа $\vartheta_{pr}(t)$ задается в виде:

$$\vartheta_{pr}(t) = \begin{cases} \pi/2, \text{ если } t_{kp} \le t \le t_{nrt}, \\ \theta(t) + \alpha(t), \text{ если } t > t_{nrt}, \end{cases}$$

где $\alpha(t) = \bar{\alpha}\exp(a(t - t_{nrt}))(1 - \exp(a(t - t_{nrt})))$, $\theta(t)$ – угол тангажа вектора поточной скорости центра масс, $\alpha(t)$ – угол атаки, t_{nrt} – момент окончания участка вертикального полета, t_{kp} – момент начала движения РН, $\bar{\alpha}$ – амплитуда угла атаки, a – коэффициент развертки программы угла атаки по времени.

Программа по углу рыскания $\psi_{pr}(t)$ задается в виде:

$$\psi_{pr}(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t_{kp} \le t \le t_a, \\ \sigma(t), \text{ если } t > t_a, \end{cases}$$

где $\sigma(t)$ – угол рыскания вектора поточной скорости, t_a – момент достижения высоты h_a и начало учета действия ветра при формировании программного управления. Вычисление управления U_ϑ, U_ψ по угловым скоростям разворота по углам тангажа и рыскания на интервале (t_i, t_{i+1}), где $t_i = t_{nrt} + i\Delta t$, проводится по соотношениям:

$$U_\vartheta = \begin{cases} (\vartheta_{pr}(t_{i+1}) - \vartheta(t_i))/\Delta t \text{ , если } |(\vartheta_{pr}(t_{i+1}) - \vartheta(t_i))/\Delta t| \le U_{gr}, \\ U_{gr}\mathrm{sign}((\vartheta_{pr}(t_{i+1}) - \vartheta(t_i))/\Delta t), \text{ если } |(\vartheta_{pr}(t_{i+1}) - \vartheta(t_i))/\Delta t| > U_{gr}, \end{cases}$$

$$U_\psi = \begin{cases} (\psi_{pr}(t_{i+1}) - \psi(t_i))/\Delta t, \text{ если } |(\psi_{pr}(t_{i+1}) - \psi(t_i))/\Delta t| \le U_{gr}, \\ U_{gr}\mathrm{sign}((\psi_{pr}(t_{i+1}) - \psi(t_i))/\Delta t), \text{ если } |(\psi_{pr}(t_{i+1}) - \psi(t_i))/\Delta t| > U_{gr}, \end{cases}$$

где t_i – левый конец интервала формирования программного управления, Δt – величина интервала, U_{gr} – ограничение по угловой скорости разворота. На интервале полета управление U_ϑ, U_ψ принимается постоянным.

Значения $\vartheta_{pr}(t_{i+1})$, $\psi_{pr}(t_{i+1})$ вычисляются методом Эйлера по параметрам движения центра масс РН и ветра на момент t_i, $\vartheta(t_i)$, $\psi(t_i)$ – имеющиеся на момент t_i углы тангажа и рыскания РН.

Значение параметра a выбирается из условия обеспечения величины модуля угла атаки $|\alpha(t)| \le \alpha_{gr}$ и $\dot{\alpha}(t) < 0$ на момент достижения высоты $h_a = 3.5$ км. Значения h_a, α_{gr} задаются разработчиком системы стабилизации исходя из конструктивных требований и модели движения.

Параметрами управления, с помощью которых можно обеспечивать нулевые значения прогнозируемых отклонений по дальности L и отклонению B на момент окончания работы ДУ первой ступени, являются $\bar{\alpha}$ и Π_0.

Определение параметров $\bar{\alpha}$, Π_0 производится из условия минимума отклонения точки падения корпуса первой ступени от центра разрешенного района:

$$\min_{\bar{\alpha},\Pi_0}\{\sqrt{(L(\bar{\alpha},\Pi_0))^2 + (B(\bar{\alpha},\Pi_0))^2}\} = \min_{\bar{\alpha},\Pi_0}\rho(\bar{\alpha},\Pi_0).$$

Разработанный вычислительный метод нахождения значений $\bar{\alpha}$, Π_0 представляет собой итерационный способ, основанный на последовательной линеаризации отклонений $L(\bar{\alpha}, \Pi_0)$, $B(\bar{\alpha}, \Pi_0)$ по приращениям $\Delta\bar{\alpha}$,$\Delta\Pi$ с ограничением приращения $\bar{\alpha}$ на шаге по членам второго порядка.

Условие нахождения $\Delta\bar{\alpha}$,$\Delta\Pi$ на шаге:

$$\min_{|\Delta\bar{\alpha}| \leq \Delta\alpha_{gr}} |L_0 + L_1 \cdot \Delta\overline{\alpha}|,$$

где $L_0 = L(\bar{\alpha}, \Pi_0) - \frac{\partial L}{\partial \Pi_0}\left(B(\bar{\alpha}, \Pi_0)\Big/\frac{\partial B}{\partial \Pi_0}\right)$, $L_1 = \frac{\partial L}{\partial \bar{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \Pi_0} \cdot \frac{\partial B}{\partial \bar{\alpha}} / \frac{\partial B}{\partial \Pi_0}$, $\Delta\alpha_{gr} \leq \sqrt{(2 \cdot \varepsilon)/|\frac{\partial^2 L}{\partial \bar{\alpha}^2}|}$, $\Delta\Pi = (-1)(B(\bar{\alpha}, \Pi_0) + \frac{\partial B}{\partial \bar{\alpha}}\Delta\bar{\alpha})/\frac{\partial B}{\partial \Pi_0}$, ε – ограничение на величину определяющего члена второго порядка.

В качестве начального приближения ($\bar{\alpha}$, Π_0) брались значения, полученные в предположении номинальных условий пуска и отсутствия вращения Земли.

Разработка специализированного вычислительного метода определения $\bar{\alpha}$, Π_0 обусловлена тем, что известные методы поиска минимума: метод наискорейшего спуска по градиенту функции с организацией поиска минимума целевой функции вдоль градиентного направления методом квадратичной аппроксимации, метод минимизации с использованием вторых производных (метод Ньютона второго порядка) – приводили к медленной сходимости или к расходимости процесса. Определение $\bar{\alpha}$, Π_0 методом Ньютона из условия решения системы уравнений $L(\bar{\alpha}, \Pi_0) = 0$, $B(\bar{\alpha}, \Pi_0) = 0$ приводило при некоторых сочетаниях возмущений к расходящемуся процессу.

Разработанный способ определения ($\bar{\alpha}$, Π_0) был исследован и протестирован на данных шести запусков РН Союз-2 при составляющих ветра, равных значениям, полученным по данным метеозондирования перед пуском, а также при задании систематических возмущений по термодинамическим характеристикам атмосферы и ветра для каждого месяца года. Полученные данные моделирования и результаты пусков при величине $\Delta t = 1$ сек. показали хорошую сходимость метода и выполнение требований по точности построения программной траектории движения РН.

В ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЕ проведено определение структуры оптимального управления при построении программного движения на участке выведения третьей ступени носителя, который заканчивается выведением на заданную орбиту.

Движение рассматривается в орбитальной системе координат[4] $O\eta_1\eta_2\eta_3$, ориентация вектора тяги задается орбитальными углами тангажа (ϑ) и рыс-

[4]Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов. М.: Бином. 2011.

кания (ψ).

Система уравнений движения (3) третьей ступени носителя на последнем участке активного полета в орбитальной системе координат имеет вид:

$$\begin{cases} d\eta_1/dt = \eta_4, d\eta_2/dt = \eta_5, d\eta_3/dt = \eta_6, \\ d\eta_4/dt = g_{\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) + P/m \cos\vartheta \cos\psi, \\ d\eta_5/dt = g_{\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) + P/m \sin\vartheta \cos\psi, \\ d\eta_6/dt = g_{\eta_3}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) - P/m \sin\psi, \\ dm/dt = -\mu, \\ d\vartheta/dt = U_\vartheta, \\ d\psi/dt = U_\psi. \end{cases} \tag{5}$$

В (5) m – текущая масса РН, P – величина тяги ДУ РН, μ – секундный расход массы ДУ, $g_{\eta_i}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $i = 1, 2, 3$ – проекции гравитационного ускорения.

Начальные условия (t_0, η_i^0, m_0, ϑ_0, ψ_0) известны. Значения U_ϑ, U_ψ должны удовлетворять ограничениям: $|U_\vartheta| \leq \mathrm{U}_{gr}, |U_\psi| \leq U_{gr}, U_{gr} = 1$ град/сек.

Начальные значения углов тангажа и рыскания должны удовлетворять ограничениям $|\vartheta_0| < \pi/2$, $|\psi_0| < \pi/2$.

Конечные терминальные условия (2) в орбитальной системе координат задаются в виде $\eta_i(t_f) = \eta_{iz}$.

$$\begin{cases} \eta_{1z} = 0, \\ \eta_{2z} = p/(1 + e\cos(u_a - \omega)), \\ \eta_{3z} = 0, \\ \eta_{4z} = \sqrt{a_{oz} g_0 (a_{oz}/p)}(1 + e\cos(u_a - \omega)), \\ \eta_{5z} = \sqrt{a_{oz} g_0 (a_{oz}/p)} e \sin(u_a - \omega), \\ \eta_{6z} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Через t_f обозначен момент выведения РН на заданную орбиту, u_a – приведенная широта точки выведения.

В качестве критерия оптимальности программного движения принят максимум массы РН, выводимой на заданную орбиту. При условии непрерывности работы ДУ максимизация выводимой массы РН эквивалентна минимизации времени выведения $J = t_f - t_0$.

Таким образом, имеем следующую математическую постановку задачи: *для автономной нелинейной системы (5), описывающей движение центра масс РН на активном участке полета третьей ступени, требуется построить программное управление U_ϑ, U_ψ, удовлетворяющее ограничениям и обеспечивающее переход системы из начального фазового состояния в терминальное (конечное) состояние за минимальное время.*

Программы по углам тангажа и рыскания, построенные в орбитальной системе координат, пересчитываются в приборную инерциальную систему координат с помощью матрицы, вычисляемой по значениям широты точки старта φ_{st}, долготы точки старта λ_{st}, азимута пуска Π_0 и значений i_n, Ω, u_a.

Решение задачи построения оптимального управления полетом третьей ступени РН при описании ее движения уравнениями (5) с использованием принципа максимума Понтрягина приводит к необходимости решения двухточечной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений 18-го порядка.

Для преодоления возникающих существенных вычислительных трудностей в определении структуры управления осуществляется переход к модельному представлению гравитационного поля Земли. В качестве модели берется однородное параллельное гравитационное поле, построение которого проводится по координатам в момент начала управления η_i^0 и координатам в конечной терминальной точке η_{iz} $(i = 1, 2, 3)$.

$$g_{\eta_i} = g_{\eta_i}(\eta_i^0, \eta_{iz}) = \text{const}. \tag{7}$$

Выбор такой модели гравитационного поля позволяет получить простые по структуре, экономичные по времени решения алгоритмы управления, что важно с точки зрения их использования при построении программной траектории при оперативном расчете полетного задания. Одновременно при этом, как показали проведенные исследования, обеспечиваются требуемая точность управления по выведению на орбиту и малое отличие по величине выводимой массы РН по сравнению с вариантом точного описания гравитационного поля. Введение такого представления гравитационного ускорения позволяет свести определение структуры оптимального управления к последовательному определению структуры управления для бокового, вертикального и горизонтального движений РН, на которые распадается при использовании модели (7) общее движение, задаваемое системой (5).

Для обеспечения оптимальности использования энергетики при построении управлений боковым и вертикальным движениями вводятся дополнительные функционалы. Время окончания управления t_f берется общим для указанных выше трех движений РН.

Определение оптимального управления для модельной задачи будем проводить на основе принципа максимума Понтрягина.

Система уравнений бокового движения для основных переменных записывается в виде:

$$\begin{cases} d\eta_3/dt = \eta_6, \\ d\eta_6/dt = g_{\eta_3} - (P/m)\sin\psi, \\ dm/dt = -\mu, \\ d\psi/dt = U_\psi, \end{cases} \tag{8}$$

где $P = \text{const}, g_{\eta_3} = \text{const}$.

Критерий оптимальности для построения управления:

$$J_\psi = \int\limits_{t_0}^{t_f} (P/m)(1 - \cos\psi) d\tau \to \min_{U_\psi}. \tag{9}$$

Ограничение на управление

$$|U_\psi| \le U_{gr}. \tag{10}$$

Начальные условия на момент t_0 известны:

$$\begin{cases} \eta_3(t_0) = \eta_3^0, \\ \eta_6(t_0) = \eta_6^0, \\ m(t_0) = m_0, \\ \psi(t_0) = \psi_0, \\ |\psi_0| < \pi/2. \end{cases} \tag{11}$$

Терминальные условия на момент окончания движения t_f:

$$\begin{cases} \eta_3(t_f) = \eta_{3z}, \\ \eta_6(t_f) = \eta_{6z}, \\ \psi(t_f) \text{ – свободно}, \\ t_f \text{ – считается заданным}. \end{cases} \tag{12}$$

Запишем Гамильтониан системы (8)

$$H = \lambda_3\eta_6 + \lambda_6(g_{\eta_3} - (P/m)\sin\psi) - \lambda_m\mu + \lambda_\psi U_\psi + \\ + \lambda_0(P/m)(1 - \cos\psi).$$

Система (8) с критерием оптимальности (9) и ограничением (10) относится к классу систем, возможно имеющих участки особого управления, так как управление U_ψ входит в гамильтониан линейно.

Система уравнений для сопряженных переменных имеет вид:

$$\begin{cases} d\lambda_0/dt = 0, \\ d\lambda_3/dt = 0, \\ d\lambda_6/dt = -\lambda_3, \\ d\lambda_m/dt = (P/m^2)(\lambda_0(1 - \cos\psi) - \lambda_6\sin\psi), \\ d\lambda_\psi/dt = (P/m)(\lambda_6\cos\psi - \lambda_0\sin\psi), \end{cases} \tag{13}$$

причем $\lambda_\psi(t_f) = 0$ в силу условий трансверсальности.

Экстремальное управление, при его существовании, представляется в виде:

$$U_\psi = \begin{cases} U_{gr}\mathrm{sign}(\lambda_\psi(t)), \text{ если } \lambda_\psi(t) \neq 0; \\ \text{особое управление, если } \lambda_\psi(t) \equiv 0. \end{cases}$$

Возьмем управление для системы (8) с критерием (9) со следующей структурой:

$$U_\psi = \begin{cases} U_{gr}\mathrm{sign}(-\lambda_6^0 - \mathrm{tg}\psi_0), \text{ если } t_0 \le t < t_{s\psi}; \\ \lambda_3^0 \cos^2(\mathrm{arctg}(-\lambda_6^0 + \lambda_3^0 \cdot (t - t_0))), \text{ если } t_{s\psi} \le t \le t_f. \end{cases} \tag{14}$$

Здесь и далее arctg означает главное значение функции, принимающей значение из интервала $[-\pi/2, \pi/2]$.

Ему соответствует следующий закон изменения угла $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi_0 + U_{gr}\mathrm{sign}(-\lambda_6^0 - \mathrm{tg}\psi_0)(t - t_0), \text{ если } t_0 \le t < t_{s\psi}; \\ \mathrm{arctg}(-\lambda_6^0 + \lambda_3^0 \cdot (t - t_0)), \text{ если } t_{s\psi} \le t \le t_f. \end{cases}$$

Особое оптимальное управление $U_\psi = \lambda_3^0 \cos^2 \psi$ будет удовлетворять ограничению (10), если $\left|\lambda_3^0\right| \le U_{gr}$.

Для того, чтобы управление (14) переводило систему (8) из состояния (11) в состояние (12), значения параметров $(\lambda_6^0, \lambda_3^0, t_{s\psi})$ должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{cases} \eta_{6z} = \eta_6^0 + g_{\eta_3} \cdot (t_f - t_0) - \int\limits_{t_0}^{t_{s\psi}} (P/m) \sin\psi(t) dt - \int\limits_{t_{s\psi}}^{t_f} (P/m) \sin\psi(t) dt, \\ \eta_{3z} = \eta_3^0 + \eta_6^0 (t_f - t_0) + g_{\eta_3} \frac{(t_f - t_0)^2}{2} - \int\limits_{t_0}^{t_{s\psi}} (P/m)(t_f - t) \sin\psi(t) dt - \\ - \int\limits_{t_{s\psi}}^{t_f} (P/m)(t_f - t) \sin\psi(t) dt, \\ \psi_0 + U_{gr}\mathrm{sign}(-\lambda_6^0 - \mathrm{tg}\,\psi_0)(t_{s\psi} - t_0) = \mathrm{arctg}(-\lambda_6^0 + \lambda_3^0 (t_{s\psi} - t_0)), \end{cases} \tag{15}$$

где $\sin\psi(t)$ в соответствии с законом управления (14) вычисляется по соотношениям

$$\sin\psi = \begin{cases} \sin(\psi_0 + U_{gr}\mathrm{sign}(-\lambda_6^0 - \mathrm{tg}\,\psi_0)(t - t_0)) \text{ при } t \in [t_0, t_{s\psi}), \\ \sin(\mathrm{arctg}(-\lambda_6^0 + \lambda_3^0 (t - t_0))) \text{ при } t \in [t_{s\psi}, t_f]. \end{cases}$$

Первое и второе уравнения системы (15) есть запись в интегральном виде первого и второго уравнений системы (8). Третье уравнение вытекает из условия непрерывности по углу $\psi(t)$ и,одновременно, это соотношение для определения моментов времени, в которые производная $d\lambda_\psi/dt$ обращается в ноль.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Управление (14) для системы (8) с критерием (9), ограничением (10) и краевыми условиями (11), (12) является допустимым и удовлетворяет необходимым условиям оптимальности принципа максимума Понтрягина и условию Кэлли, если параметры λ_6^0, λ_3^0, $t_{s\psi}$ есть решение системы (15), λ_3^0 удовлетворяет ограничению $\left|\lambda_3^0\right| \leq U_{gr}$, а $t_{s\psi}$ – наименьшее значение $t \in [t_0, t_f]$, при котором величина производной $d\lambda_\psi/dt$ обращается в ноль.*

Таким образом, определена структура оптимального программного управления боковым движением.

В целях получения представления $\sin\psi$ в виде линейной функции от параметров управления и, соответственно, более простых соотношений для нахождения параметров управления был введен упрощенный функционал для оценки потерь по кажущейся скорости из-за реализации бокового движения.

$$J_{p\psi} = \int\limits_{t_0}^{t_f} (P/m)\frac{1}{2}(1 + b/4 + (b)^2/8)\sin^2\psi d\tau, \tag{16}$$

где $b = 2(d_{gr})^2(\sqrt{2}-1)$, d_{gr} – верхняя граница возможных значений изменения синуса угла рыскания в полете ($|\sin\psi(t)| < d_{gr}$).

За счет использования упрощенного функционала могут возрасти потери по кажущейся скорости в плоскости орбиты. Оценка отличия точного функционала от упрощенного получена в теореме 3.

Теорема 3. *Для функционала J_ψ (9) и упрощенного функционала $J_{p\psi}$ (16), при выполнении по траектории полета условий $|\sin\psi(t)| < d_{gr}$, $0 \leqslant d_{gr} < 1$, $|\psi(t)| < \pi/2$, справедлива оценка:*

$$|J_\psi - J_{p\psi}| < (2^{-5}b^2 + 2^{-6}(b^3 + (d_{gr})^2 b^2) + 2^{-7}(d_{gr})^8\frac{5}{1-(d_{gr})^2})\int\limits_{t_0}^{t_f}(P/m)d\tau, \tag{17}$$

где $(t_0,\ t_f)$ – интервал рассматриваемого участка полета.

Для РН типа Союз-2 на участке полета третьей ступени выполняются ограничения $|\sin\psi| < 1/2$, $d_{gr} < 1/2$, $\int\limits_{t_0}^{t_f}(P/m)d\tau \leq 4000$ м/сек. В этих условиях замена точного функционала на приближенный приводит к потере по величине кажущейся скорости не более 5 м/сек (эквивалентно уменьшению выводимой массы РН на 15 кг).

Рассмотрим решение задачи определения структуры оптимального управления для системы (8) с упрощенным критерием (16).

Обозначим $k = 1/(1 + b/4 + b^2/8)$.

Гамильтониан системы (8) с критерием (16) запишется в виде:

$$H = \lambda_3\eta_6 + \lambda_6(g_{\eta_3} - (P/m)\sin\psi) - \lambda_m\mu + \lambda_\psi U_\psi + \lambda_0(P/m)k^{-1}(\sin^2\psi).$$

Возьмем управление для системы (8) с критерием (16) со следующей структурой:

$$U_\psi = \begin{cases} U_{gr}\mathrm{sign}(-k\lambda_6^0 - \sin\psi_0), \text{ если } t_0 \le t < t_{s\psi}; \\ \lambda_3^0 k/\cos(\arcsin(-k(\lambda_6^0 - \lambda_3^0\cdot(t-t_0)))), \text{ если } t_{s\psi} \le t \le t_f. \end{cases} \tag{18}$$

Ему соответствует следующий закон изменения угла $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi_0 + U_{gr}\mathrm{sign}(-k\lambda_6^0 - \sin\psi_0)(t-t_0), \text{ если } t_0 \le t < t_{s\psi}; \\ \arcsin(-k(\lambda_6^0 - \lambda_3^0\cdot(t-t_0))), \text{ если } t_{s\psi} \le t \le t_f. \end{cases}$$

Для вычисления $\psi(t)$ должно выполняться условие

$$|k(-\lambda_6^0 + \lambda_3^0\cdot(t-t_0))| < 1. \tag{19}$$

Управление (18) будет удовлетворять ограничению (10), если

$$\left|k\lambda_3^0/\sqrt{1-(d_{gr})^2}\right| \le U_{gr}. \tag{20}$$

Для того, чтобы управление (18) переводило систему (8) из состояния (11) в состояние (12), значения параметров $\{\lambda_6^0, \lambda_3^0, t_{s\psi}\}$ должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{cases} \eta_{6z} = \eta_6^0 + g_{\eta_3}\cdot(t_f - t_0) - \int\limits_{t_0}^{t_{s\psi}}(P/m)\sin\psi(t)dt - \int\limits_{t_{s\psi}}^{t_f}(P/m)\sin\psi(t)dt, \\ \eta_{3z} = \eta_3^0 + \eta_6^0(t_f - t_0) + g_{\eta_3}\frac{(t_f-t_0)^2}{2} - \int\limits_{t_0}^{t_{s\psi}}(P/m)(t_f - t)\sin\psi(t)dt - \\ -\int\limits_{t_{s\psi}}^{t_f}(P/m)(t_f-t)\sin\psi(t)dt, \\ \psi_0 - U_{gr}\mathrm{sign}(k\lambda_6^0 + \sin\psi_0)(t_{s\psi} - t_0) = -\arcsin(k\lambda_6^0 - k\lambda_3^0(t_{s\psi} - t_0)), \end{cases} \tag{21}$$

где $\sin\psi(t)$ в соответствии с законом управления (18) вычисляется по соотношениям

$$\sin\psi = \begin{cases} \sin(\psi_0 + U_{gr}\mathrm{sign}(-k\lambda_6^0 - \sin\psi_0)(t - t_0)) \text{ при } t \in [t_0, t_{s\psi}), \\ \sin(\arcsin(-k(\lambda_6^0 - \lambda_3^0(t - t_0)))) \text{ при } t \in [t_{s\psi}, t_f]. \end{cases}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Управление* (18) *для системы* (8) *с критерием* (16), *ограничением* (10) *и краевыми условиями* (11), (12) *является допустимым и удовлетворяет необходимым условиям оптимальности принципа максимума Понтрягина и условию Кэлли, если параметры* λ_6^0, λ_3^0, $t_{s\psi}$ *есть решение системы* (21), λ_3^0, λ_6^0 *удовлетворяет ограничениям* (19),(20), *а* $t_{s\psi}$ *– наименьшее значение* $t \in [t_0, t_f]$, *при котором величина производной* $d\lambda_\psi/dt$ *обращается в ноль.*

Считая управление боковым движением построенным, рассмотрим вопрос о структуре управления вертикальным движением. Система дифференциальных уравнений, описывающая вертикальное движение в рамках сформулированной задачи, берется в следующем виде:

$$\begin{cases} d\eta_2/dt = \eta_5, \\ d\eta_5/dt = g_{\eta_2} + (P/m)\sin\vartheta\cos\psi, \\ dm/dt = -\mu, \\ d\vartheta/dt = U_\vartheta. \end{cases} \tag{22}$$

Начальные условия на момент t_0: η_2^0, $\eta_5^0, m_0, \vartheta_0$ – известны.Терминальные параметры на момент условного окончания t_f: η_{2z}, η_{5z} – заданы, $\vartheta(t_f)$ – свободно, t_f – считается формально заданным. Интервал управления $[t_0,t_f]$ фиксирован. Значение t_f соответствует принятому при рассмотрении бокового движения. Имеется ограничение на управление вида $|U_\vartheta| \le U_{gr}$.

В качестве критерия оптимальности берется функционал

$$J_\vartheta = \int_{t_0}^{t_f} (1 - \cos\vartheta)(P/m)\cos\psi d\tau \to \min_{U_\vartheta}. \tag{23}$$

Значение функционала J_ϑ равно потере кажущейся скорости по оси $O\eta_1$ из-за реализации вертикального движения по переводу РН из начального состояния $(t_0, \eta_2^0, \eta_5^0)$ в конечное $(t_f, \eta_{2z}, \eta_{5z})$.

Выбранный функционал (23) обеспечивает набор максимума значения действительной скорости вдоль оси $O\eta_1$. Решение по структуре управления вертикальным движением получается на основании теоремы 2. Повторяя выкладки, аналогичные проведенным при анализе бокового движения, получим оптимальное управление, если оно существует, в виде

$$U_\vartheta = \begin{cases} U_{gr}\mathrm{sign}(\lambda_\vartheta(t)), \text{если } \lambda_\vartheta(t) \neq 0, \\ \text{особое управление, если } \lambda_\vartheta(t) \equiv 0. \end{cases}$$

Обозначим момент перехода с начального разворота на участок особого управления через $t_{s\vartheta}$. Тогда значение синуса от программного угла тангажа, непосредственно входящего в уравнение изменения линейных координат (22), можно найти по соотношениям

$$\sin\vartheta = \begin{cases} \sin(\vartheta_0 + U_{gr}\mathrm{sign}(\lambda_5^0 - \mathrm{tg}\,\vartheta_0)(t - t_0)), \text{ если } t_0 \leq t < t_{s\vartheta}, \\ \lambda_5(t)/\sqrt{1 + (\lambda_5(t))^2}, \text{ если } t_{s\vartheta} \leq t \leq t_f, \end{cases}$$

где $\lambda_5(t) = \lambda_5^0 - \lambda_2^0(t - t_0)$ – решение сопряженной системы уравнений для системы (22).

Значение $t_{s\vartheta}$ в силу непрерывности изменения угла $\vartheta(t)$ находится из соотношения

$$\vartheta_0 + U_{gr}\mathrm{sign}(\lambda_5^0 - \mathrm{tg}\,\vartheta(t))(t_{s\vartheta} - t_0) = \mathrm{arctg}(\lambda_5^0 - \lambda_2^0(t_{s\vartheta} - t_0)).$$

Таким образом, определена структура управления вертикальным движением ракеты-носителя.

Система дифференциальных уравнений, описывающая горизонтальное движение, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} d\eta_1/dt = \eta_4, \\ d\eta_4/dt = g_{\eta_1} + (P/m)\cos\vartheta\cos\psi, \\ dm/dt = -\mu. \end{cases}$$

Начальные условия на момент t_0: η_1^0, η_4^0, m_0 – заданы. Конечные условия: η_{1z}, η_{4z} – заданы. Угловые программы $\vartheta(t), \psi(t)$ считаем известными функциями времени. Время окончания выведения t_f не задано и рассматривается как параметр управления. Вторым управляющим параметром для достижения краевых условий берется значение приведенной широты точки выведения. Момент выдачи команды на выключение ДУ третьей ступени определяется по достижении заданного значения тангенциальной скорости. Выбор параметра u_a (приведенной широты точки выведения) определяется из условия обеспечения выведения на орбиту. Одновременно с определением структуры оптимального управления проведена параметризация способа управления.

В ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВЕ изложены результаты построения вычислительного метода определения параметров управления для участка полета третьей ступени и описания комплекса программ, разработанного для решения задач построения управления.

Система уравнений движения третьей ступени РН с учетом построенной структуры управления записывается в виде:

$$\begin{cases} d\eta_1/dt = \eta_4, \\ d\eta_2/dt = \eta_5, \\ d\eta_3/dt = \eta_6, \\ d\eta_4/dt = g_{\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) + P/m \cos\vartheta \cos\psi, \\ d\eta_5/dt = g_{\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) + P/m \sin\vartheta \cos\psi, \\ d\eta_6/dt = g_{\eta_3}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) - P/m \sin\psi, \\ m(t) = m_0 - \mu(t - t_0), \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\psi(t) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\psi_0 + U_{gr}\operatorname{sign}(-\lambda_6^0 - \operatorname{tg}\psi_0)(t - t_0)), \text{ если } t_0 \le t < t_{s\psi}, \\ -\lambda_6^0 + \lambda_3^0(t - t_0), \text{ если } t_{s\psi} \le t \le t_f, \end{cases}$$
$$\operatorname{tg}\vartheta(t) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\vartheta_0 + U_{gr}\operatorname{sign}(\lambda_5^0 - \operatorname{tg}\vartheta_0)(t - t_0)), \text{ если } t_0 \le t < t_{s\vartheta}, \\ \lambda_5^0 - \lambda_2^0(t - t_0), \text{ если } t_{s\vartheta} \le t \le t_f. \end{cases}$$

Здесь t_f – момент окончания управления полетом. Начальные условия на момент t_0 считаются известными: $t_0, \eta_i^0 (i = 1, 2, .., 6), m_0, \vartheta_0, \psi_0$.

Вычисление $\sin x, \cos x$ через $\operatorname{tg}x$ проводится по соотношениям:
$\sin x = \operatorname{tg}x/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\cos x = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

Терминальные конечные краевые условия даются соотношениями (6).

Так как правые части системы не являются дифференцируемыми функциями по искомым переменным, то применять для отыскания величин параметров управления метод Ньютона нельзя.[16] В связи с этим в диссертационной работе был разработан специализированный итерационный метод поиска значений параметров $t_{s\psi}$, λ_6^0, λ_3^0, $t_{s\vartheta}$, λ_5^0, λ_2^0, t_f, u_a.

Существенное упрощение процесса определения параметров управления достигается, если компоненты вектора скорости $V_{gi} = \int_{t_0}^{t_f} g_{\eta i}(\eta_j(\tau))d\tau$ и радиус-вектора $r_{gi} = \int_{t_0}^{t_f} (t - \tau) g_{\eta i}(\eta_j(\tau))d\tau$, обусловленные действием гравитационных сил, вычислять с использованием начальных (η_i^0), конечных (η_{iz}) условий и взятого интервала управления (t_0, t_f) по улучшенному методу трапеций с использованием первых производных.

Методические погрешности вычисления интегралов от проекции гравитационного ускорения убывают по мере уменьшения оставшегося времени движения и становятся практически незначительными (менее $2 \cdot 10^{-3}$ м/сек по скорости, 1 м по координате) за 50 секунд до окончания участка выведения. Запишем систему для параметров, определяющих боковое движение, с учетом выбранной структуры управления, способа вычисления составляющих

[16] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Наука. 2003.

от гравитационных сил, в интегральном виде.

$$\begin{cases} \eta_{6z} = \eta_6^0 + V_{g_3} - \int\limits_{t_0}^{t_{s\psi}} (P/m)\sin(\psi_0 + U_{gr}\mathrm{sign}(-\lambda_6^0 - \mathrm{tg}\,\psi_0)(\tau - t_0))d\tau + \\ +\lambda_6^0 \int\limits_{t_{s\psi}}^{t_f} (P/m)\sqrt{1 + (\lambda_6^0 - \lambda_3^0(\tau - t_0))^2}d\tau - \lambda_3^0 \int\limits_{t_{s\psi}}^{t_f} \frac{(P/m)(\tau - t_0)}{\sqrt{1+(\lambda_6^0 - \lambda_3^0(\tau - t_0))^2}}d\tau, \\ \eta_{3z} = \eta_3^0 + \eta_6^0(t_f - t_0) + r_{g3} - (t_{s\psi} - t_0)\int\limits_{t_0}^{t_{s\psi}} (P/m)\sin(\psi_0 + \\ +U_{gr}\mathrm{sign}(-\lambda_6^0 - \mathrm{tg}\,\psi_0)(\tau - t_0))d\tau + \lambda_6^0 \int\limits_{t_{s\psi}}^{t_f} \frac{(P/m)(t_f - \tau)}{\sqrt{1+(\lambda_6^0 - \lambda_3^0(\tau - t_0))^2}}d\tau - \\ -\lambda_3^0 \int\limits_{t_{s\psi}}^{t_f} (P/m)(t_f - \tau)(\tau - t_0)/\sqrt{1 + (\lambda_6^0 - \lambda_3^0(\tau - t_0))^2}d\tau, \\ \psi_0 + U_{gr}\mathrm{sign}(-\lambda_6^0 - \mathrm{tg}\,\psi_0)(t_{s\psi} - t_0) = \mathrm{arctg}(-\lambda_6^0 + \lambda_3^0(t_{s\psi} - t_0)), \\ m(\tau) = m_0 - (\tau - t_0)\mu. \end{cases} \tag{24}$$

Будем решать систему (24) итерационным способом. Присвоим $\lambda_6^0, \lambda_3^0, t_{s\psi}$, входящим в систему (24) линейно, индекс i, а входящим нелинейно (под знаком функций) индекс i-1. В качестве начальных значений возьмем $\lambda_6^0(0) = 0$, $\lambda_3^0(0) = 0$, $t_{s\psi}(0) = t_0$. Для нахождения i-го приближения $(\lambda_6^0(i), \lambda_3^0(i), t_{s\psi}(i))$ получаем линейную систему. При практических вычислениях оказалось достаточно не более 10 итераций для получения коэффициентов программного управления с требуемой точностью.

Нахождение значений параметров управления $t_{s\psi}$, λ_6^0, λ_3^0 существенно упрощается, если для оценки потерь по кажущейся скорости использовать упрощенный функционал (16). В этом случае значения λ_6^0, λ_3^0 находятся из системы линейных уравнений. Значение $t_{s\psi}$ определяется из уравнения

$$t_{s\psi} = t_0 - \frac{\psi_0 + \arcsin(k(\lambda_6^0 - \lambda_3^0(t_{s\psi} - t_0)))}{U_{gr}\mathrm{sign}(-k\lambda_6^0 - \sin\psi_0)} \tag{25}$$

по методу сжатых отображений. В качестве нулевого приближения берется значение t_0. Итерационный процесс определения $t_{s\psi}$ будет сходиться, если значение производной от правой части соотношения (25) по $t_{s\psi}$ будет по модулю меньше 1, то есть выполняется неравенство $|k\lambda_3^0/U_{gr}\cos\psi| < 1$.[17] Вычисленные значения λ_6^0, λ_3^0 определяют физически реализуемое управление,

[17] Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной матетатики. М.: Наука. 1970.

если выполняется неравенство $|k(\lambda_6^0 - \lambda_3^0(t - t_0))| < 1$ для $t \in [t_0, t_f]$. Кроме того, третье уравнение в (21) при $|\psi| < \pi/2$ имеет единственное решение, что при линейности первого и второго уравнений системы (21) обеспечивает единственность ее решения. Таким образом, найденное управление (18) с найденными значениями параметров в рамках модельной задачи с функционалом (16) будет глобально оптимальным.

Уравнения для нахождения параметров вертикального движения λ_2^0, λ_5^0, $t_{s\vartheta}$ записываются и решаются аналогично уравнениям для бокового движения. За действующее кажущееся ускорение принимается $(P/m)\cos\psi$.

Для определения (u_a, t_f) будем использовать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \eta_{4z} = \eta_4^0 + V_{g_1}(t_f) + \int\limits_{t_0}^{t_f} (P/m)\cos\vartheta\cos\psi dt, \\ \eta_{1z} = \eta_1^0 + \eta_4^0(t_f - t_j) + r_{g_1}(t_f) + \int\limits_{t_0}^{t_f} (t_f - \tau)(\frac{P}{m})\cos\vartheta\cos\psi dt. \end{cases} \tag{26}$$

Систему (26) предлагается решать следующим образом.

Берем сетку из $N_u + 1$ (N_u – четное) возможных значений приведенных широт точки выведения: $u_j = u_0 + jdu$, $j = -N_u/2$, ..., -1, 0, 1, ..., $N_u/2$, где du – шаг по приведенной широте. Значение u_0 задается из физических соображений. В цикле по значениям u_j проводится определение t_f посредством решения первого уравнения системы (26) методом Ньютона, включая определение управления боковым и вертикальным движением (программ $\psi(t), \vartheta(t)$). Для первого шага значение t_f берется равным номинальному времени работы ДУ. Обозначим его через $t_f(u_j)$. Далее с использованием второго уравнения (26) вычисляется разность $d\eta_{1j} = \eta_{1z}(u_j) - \eta_1(t_f(u_j))$. Значение u_j, при котором достигается минимум $|d\eta_{1j}|$ и соответствующее ему значение t_f, принимаются за решение системы (26) u_a, t_f.

Определение и уточнение параметров управления проводится на активном участке полета третьей ступени в опорные моменты времени $t_j = t_0 + j\Delta t_3$, $j = 1, 2, ..$, где t_0 – начало участка, Δt_3 – шаг по опорным моментам времени, $t_j \le t_f - \Delta t_3$. Уточнение параметров управления прекращается за 30-40 сек. до окончания полета. Проведенные расчеты на траекториях выведения РН показали, что при значениях du=0.0003, $N_u = 60$, $\Delta t_3 = 10$ сек обеспечиваются требуемые точность построения программного движения и временные затраты на его нахождение.

Экспертная оценка построенного управления, проведенная ИММ УрО

РАН (эталонное управление строилось методом спуска в пространстве управлений с реализацией спуска на каждом шаге методом сопряженных градиентов), показала, что возможное увеличение выводимой массы РН при использовании эталонного управления не превышает 20 кг (0.2 % от ее значения)[17].

Для проведения работ по расчету коэффициентов управления полученной структуры и оценок точности построения программной траектории были разработаны два программных комплекса. Первый комплекс предназначен для нахождения коэффициентов управления и расчета программной траектории движения центра масс РН на атмосферном участке полета первой ступени. Второй комплекс - для нахождения параметров целевой орбиты, расчета коэффициентов управления и программной траектории на участке полета третьей ступени (конечный участок выведения РН). Программные комплексы созданы на языке высокого уровня Borland Pascal, включают в себя файлы основной программы, входящие в нее модули, текстовые файлы, содержащие исходные данные по условиям пуска, характеристики РН, признаки, задающие условия построения программной траектории, требования по точности пристрелки и число допустимых итераций.

Заключение.

1.Разработан способ нахождения параметров оскулирующей орбиты при ее задании высотами, отсчитываемыми от поверхности общеземного эллипсоида.

2. Определена структура управления и разработан вычислительный метод определения параметров управления для построения программного движения на атмосферном участке полета РН в условиях учета систематики скорости ветра и ограничений по угловым скоростям разворотов РН.

3. Решена задача построения оптимального управления движением РН на участке полета третьей ступени. Доказано, что управление выбранной структуры для модельной задачи удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Разработан вычислительный метод определения параметров управления установленной структуры.

Основные результаты работы опубликованы в рецензируемых научных журналах и изданиях, определенных ВАК:

[1] *Мазгалин Д.В.* Построение способа управления ракетой-носителем при использовании в качестве управления программных угловых скоростей разворотов.// Информационно-управляющие системы. 2010. № 3(46). - С. 21-29.

[17]Костоусова Е.К., Починский В.И. О задачах выведения ракеты-носителя на заданные эллиптические орбиты. Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 18 №3: ИММ УрО РАН. 2011.

[2] *Мазгалин Д.В., Починский В.И.* Метод определения азимута пуска и программы угла тангажа на атмосферном активном участке полета РН. // Вестник ЮУрГУ. Серия "Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника". 2010. - Вып. 12, № 22(198). - С. 47-50.

Другие публикации:

[3] *Кукушкин А.П., Мазгалин Д.В.* Структура оптимального управления при выведении полезной нагрузки на орбиту// Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 37-й Региональной молодежной конференции. – Екатеринбург: УрО РАН. 2006. – С. 335-340.

[4] *Мазгалин Д.В.* Построение программного управления боковым движением ракеты-носителя на участке полета последней ступени//Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 38-й Региональной молодежной конференции. – Екатеринбург: УрО РАН. 2007. – С. 301-306.

[5] *Мазгалин Д.В.* Построение программного движения РН на атмосферном участке полета. //Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 39-й Всероссийской молодежной конференции. – Екатеринбург: УрО РАН. 2008. – С. 275-281.

[6] *Мазгалин Д.В.* Построение эллиптической орбиты КА с заданными значениями высот относительно поверхности общеземного эллипсоида. // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 40-й Всероссийской молодежной конференции. – Екатеринбург: УрО РАН. 2009. – С. 241-246.

[7] *Мазгалин Д.В.* Способ построения программной траектории полета ракеты-носителя. // Наука и технологии: Материалы 32-й Всероссийской конференции. – Миасс: МСНТ. 2012. – С. 181-183.