ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ АНИЗОТРОПНОЙ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

М.М. АЛИЕВ

Альметьевский государственный нефтяной институт (АГНИ)

Б.Г. АЛЕКСЕЕВ, И.Н. ФАЙЗРОВА

ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»

В теории предельного равновесия сыпучей среды представляют интерес не только плоские, но и осесимметричные задачи. Общий метод их решения для изотропной среды, на основе условия полного предельного равновесия, принадлежит В.Г. Березанцеву [1]. Расчет оснований сложенной из анизотропной неоднородной сыпучей среды рассмотрен в работе [2].

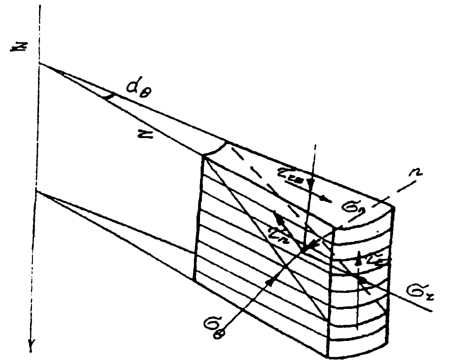

Рис. 1. Схема сыпучей среды

Рассмотрим осесимметричную задачу в случае анизотропной сыпучей среды. Пусть ось симметрии рассматриваемого тела вращения совпадает с осью z цилиндрической системы координат r, z, θ (рис. 1). Заданные нагрузки обладают осевой симметрией, а ось z ортогонально плоскости напластования сыпучей среды. Очевидно, что в этом случае, компоненты напряжения не будут зависеть от полярного угла θ, а деформация среды будет осесимметричной.

Анизотропия рассматриваемой среды определяется тем, что вдоль любой площадки, образующей некоторый угол ψ с плоскостью напластования сопротивление среды сдвигу $c(\psi)$ больше, чем сопротивление сдвигу по плоскостям напластования.

В плоскости rz условие предельного равновесия на площадке скольжения представляет собой условие равенства касательного напряжения силам сопротивления сдвигу в виде

$$\tau_n(\psi) = \sigma_n(\psi)\mathrm{tg}\rho + c(\psi); \qquad (1)$$

Положение опасных площадок скольжения определяется из условия экстремума

$$\max\{\tau_n(\psi) - c(\psi) - \sigma_n(\psi)\mathrm{tg}\rho\} = 0; \qquad (2)$$

где

$$\tau_n(\psi) = 0{,}5(\sigma_r - \sigma_z)\sin 2\psi - \tau_{rz}\cos 2\psi,$$

$$\sigma_n(\psi) = 0{,}5(\sigma_r + \sigma_z) + 0{,}5(\sigma_r - \sigma_z)\cos 2\psi + \tau_{rz}\sin 2\psi.$$

Таким образом, условие предельного равновесия будет подобным условию в случае плоской деформации среды, поэтому приведем окончательные результаты.

Аналитическое выражение условия предельного напряженного состояния имеет вид

$$(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2 = \{4[\sigma\,\mathrm{tg}\rho + c(\psi)]^2 + [c']^2\}\cos^2\rho; \qquad (3)$$

где $2\sigma = \sigma_r + \sigma_z$, $c = c(\psi)$, $c' = \dfrac{c}{\psi}$.

Компоненты напряжения определяются по формулам

$$\sigma_{r,z} = \sigma \pm \{[\sigma\,\mathrm{tg}\rho + c(\psi)]\sin(2\psi - \rho) + 0{,}5c'\cos(2\psi - \rho)\}\cos\rho; \qquad (4)$$

$$\tau_{rz} = -\{[\sigma\,\mathrm{tg}\rho + c(\psi)]\cos(2\psi - \rho) + c'\sin(2\psi - \rho)\}\cos\rho; \qquad (5)$$

Пусть сопротивление среды сдвигу в плоскости rz изменяется согласно закону

$$c(\psi) = c_0\cos^2\psi + c_{90}\sin^2\psi; \qquad (6)$$

где c_0, c_{90} – сопротивление среды сдвигу, соответственно, поперек и вдоль напластования.

Исключая ψ из условия (3) с помощью (4) и (5) получим другую форму условия предельного равновесия рассматриваемой среды.

$$(\sigma_r-\sigma_z)^2+4\tau_{rz}^2+(c_0-c_{90})\{4\tau_{rz}+2(\sigma_r-\sigma_z)\mathrm{tg}\rho+(c_0-c_{90})\}\cos^2\rho=\mu^2(\sigma)\cos^2\rho\,; \quad (7)$$

В главных напряжениях условие (7) имеет вид

$$\sigma_1-\sigma_3=\left\{\left[\mu^2(\sigma)-(c_0-c_{90})^2\cos^2(2\alpha-\rho)\right]^{\frac{1}{2}}-(c_0-c_{90})\sin(2\alpha-\rho)\right\}\cos\rho\,; \quad (8)$$

Для плоской задачи это условие вместе с уравнениями равновесия является достаточным для ее решения в напряжениях.

В случае осесимметричной задачи при использовании концепции полной пластичности следует предположить, что условие предельного равновесия выполняется также, либо в плоскости $\sigma_1\sigma_2$, либо в плоскости $\sigma_2\sigma_3$.

Условие предельного равновесия в плоскостях $\sigma_1\sigma_2$ и $\sigma_2\sigma_3$ могут быть получены аналогично (8).

$$\sigma_1-\sigma_2=\left\{\left[(\sigma_1+\sigma_2)\mathrm{tg}\rho+(c_n+c_2)\right]^2-(c_n-c_2)^2\cos^2\rho\right\}^{\frac{1}{2}}\cos\rho-\frac{1}{2}(c_n-c_2)\sin2\rho\,; \quad (9)$$

$$\sigma_2-\sigma_3=\left\{\left[(\sigma_2+\sigma_3)\mathrm{tg}\rho+(c_n+c_2)\right]^2-(c_n-c_2)^2\cos^2\rho\right\}^{\frac{1}{2}}\cos\rho-\frac{1}{2}(c_n-c_2)\sin2\rho\,; \quad (10)$$

где c_n – максимальное значение сопротивления среды сдвигу в соответствующих плоскостях главных напряжений. Эта характеристика связана с c_0 и c_{90} соотношением:

$c_n=c_0\sin^2\alpha+c_{90}\cos^2\alpha$.

Условимся, что между главными напряжениями существует соотношение $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\sigma_3$.

В случае совместного выполнения условий (8) и (9) перемещение среды будет направлена от оси симметрии, а в случае одновременного выполнения (8) и (9) – к оси симметрии.

Для изотропной среды такой подход известен как концепция полной пластичности (для пластической среды), или же концепция полного предельного равновесия (для сыпучей среды), который характеризуется совпадением промежуточного по величине главного нормального напряжения с одним из двух других.

При $c_0=c_{90}=c$ (изотропная среда) из условий (8) и (9) следует $\sigma_2=\sigma_3$ а из условий (8) и (10) следует $\sigma_2=\sigma_1$.

Очевидно можно принять, что кольцевое напряжение во всех случаях является средним главным напряжением, т.е $\sigma_\theta=\sigma_2$.

В случае перемещения среды от оси, кольцевое напряжение будет определяться из условия (9)

$$\begin{gathered}\sigma_\theta=\sigma_2=\sigma_1(1+2\mathrm{tg}^2\rho)+2c_{90}\mathrm{tg}\rho-\\ -\left\{\left[2\sigma_1\mathrm{tg}\rho+2c_n\sin^2\rho+(c_n+c_{90})\cos^2\rho\right]^2-(c_n-c_{90})^2\cos^4\rho\right\}^{\frac{1}{2}}\sec\rho\end{gathered}\,; \quad (11)$$

а в случае перемещения среды к оси – из условия (10):

$$\begin{gathered}\sigma_\theta=\sigma_2=\sigma_3(1+2\mathrm{tg}^2\rho)+2c_{90}\mathrm{tg}\rho-\\ -\left\{\left[2\sigma_3\mathrm{tg}\rho+2c_n\sin^2\rho+(c_n+c_{90})\cos^2\rho\right]^2-(c_n-c_{90})^2\cos^4\rho\right\}^{\frac{1}{2}}\sec\rho\end{gathered}\,; \quad (12)$$

Подставляя (4), (5) и (11) или (12) в дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрических координатах r,z,θ.

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta)=0\,,$$

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}\tau_{rz}=\gamma\,,$$

получим основную систему уравнений предельного равновесия анизотропной сыпучей среды:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma}{\partial r}+\mathrm{tg}(\psi-\rho)\frac{\partial\sigma}{\partial z}+\mu(\sigma)\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}+\mathrm{tg}(\psi-\rho)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]=A\\&\frac{\partial\sigma}{\partial r}-\mathrm{ctg}\psi\frac{\partial\sigma}{\partial z}+\mu(\sigma)\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}-\mathrm{ctg}\psi\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]=B\end{aligned}\right\};\qquad(13)$$

где

$$A=\frac{1}{\cos(\psi-\rho)\cos\rho}\left[(\sigma_\theta-\sigma_r)\frac{1}{r}\cos\psi-\tau_{rz}\frac{1}{r}\sin\psi+\gamma\sin\psi\right],$$

$$A=\frac{1}{\sin\psi\cos\rho}\left[(\sigma_\theta-\sigma_r)\frac{1}{r}\sin(\psi-\rho)+\tau_{rz}\frac{1}{r}\cos(\psi-\rho)-\gamma\cos(\psi-\rho)\right].$$

Введем новые функции ξ и η, связанные с σ и ψ зависимостями

$$\left.\begin{aligned}&\xi=0{,}5\mathrm{ctg}\,\rho\ln\frac{\mu(\sigma)}{c_0}+\psi,\\&\eta=0{,}5\mathrm{ctg}\,\rho\ln\frac{\mu(\sigma)}{c_0}-\psi.\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

Решая совместно систему (14) получим

$$\mu(\sigma)=c_0\exp[2\mathrm{tg}\,\rho(\xi+\eta)],$$

$$\text{или } \sigma=0{,}5\mathrm{ctg}\,\rho\{c_0\exp[2\mathrm{tg}\,\rho(\xi+\eta)]-(c_0+c_{90})\},\qquad(15)$$

$$\psi=0{,}5(\xi-\eta).$$

Подставляя (14) в (13) получим систему в следующем виде

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\xi}{\partial r}+\mathrm{tg}(\psi-\rho)\frac{\partial\xi}{\partial z}=\frac{1}{\mu(\sigma)}A\\&\frac{\partial\xi}{\partial r}-\mathrm{ctg}\psi\frac{\partial\eta}{\partial z}=\frac{1}{\mu(\sigma)}B\end{aligned}\right\};\qquad(16)$$

Система (16) относится гиперболическому типу и имеет два семейства вещественных характеристик, дифференциальные уравнения которых определяются соотношениями

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\mathrm{tg}(\psi-\rho),\quad \frac{\partial\xi}{\partial r}=\frac{1}{\mu(\sigma)}A;\qquad(17)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=-\mathrm{ctg}\psi,\quad \frac{\partial\eta}{\partial z}=\frac{1}{\mu(\sigma)}B;\qquad(18)$$

Уравнения (17) относятся к первому, а уравнения (18) – ко второму семейству характеристик.

Общее замкнутое решение этих уравнений получить не представляется возможным, поэтому их или решают численным методом или же аналитически, при определенных допущениях.

Приведем уравнения (17) и (18) к каноническому виду.

Обозначим $s_1=s_1(r,z)$ и $s_2=s_2(r,z)$ – уравнения характеристик соответственно первого и второго семейства (5.1.19). Каноническая форма (17) и (18) будет иметь вид:

$$\frac{\partial z}{\partial s_2}-\mathrm{tg}(\psi-\rho)\frac{\partial r}{\partial s_2}=0;\quad \frac{\partial\xi}{\partial s_2}=\frac{1}{\mu(\sigma)}A\frac{\partial r}{\partial s_2}\qquad(19)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s_1}+\mathrm{ctg}\psi\frac{\partial r}{\partial s_1}=0;\quad \frac{\partial\eta}{\partial s_1}=\frac{1}{\mu(\sigma)}B\frac{\partial r}{\partial s_1}\qquad(20)$$

Совместное решение уравнений (17) и (18) позволяет получить предельное напряженное состояние среды и очертания линий скольжения.

Библиографический список

1. Березанцев В.Г. Осесимметричная задача предельного равновесия сыпучей среды. М., Гостехиздат, 1952.
2. Алиев М.М. , Алексеев Б.Г., Файзрова И.Н. Предельное напряженное состояние анизотропной сыпучей среды, угол внутреннего трения которой является функцией координат. // Извести вузов. Строительство № 7- Новосибирск-2001г-с 17-21.