

На правах рукописи

Мельников Николай Борисович

**Вариационные методы в прикладных  
динамических системах**

05.13.18 – математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре оптимального управления Факультета вычислительной математики и кибернетики ФГОУ ВПО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова».

Официальные оппоненты: *доктор физико-математических наук,  
профессор Демидов Александр Сергеевич*  
*доктор физико-математических наук,  
профессор Ухоботов Виктор Иванович*  
*доктор физико-математических наук,  
профессор Шориков Андрей Фёдорович*

Ведущая организация: *Институт математики и механики  
УрО РАН, г. Екатеринбург*

Защита состоится «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г. в \_\_\_\_\_ часов на заседании диссертационного совета Д 212.286.10 при ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького», расположенном по адресу: 620000, Екатеринбург, пр. Ленина 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького» .

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Учёный секретарь

диссертационного совета,

*доктор физико-математических наук,*

*профессор*

*Пименов В. Г.*

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы.** Прогресс в вычислительной технике, в том числе использование высокопроизводительных параллельных компьютеров, стимулирует активное развитие моделей, которые давали бы количественные оценки характеристик, относящихся к системе в целом, на основе детального описания отдельных объектов. Примерами таких моделей являются «первопринципные» модели в магнетизме металлов, модели общего экономического равновесия и модели общей циркуляции океана и атмосферы (см., напр., [1–3]). Модели указанного типа используются для определения равновесных характеристик систем, а также флуктуаций в окрестности положения равновесия, и являются альтернативой (полу)эмпирическим моделям, которые, несмотря на возможности качественного анализа, имеют ограниченные предсказательные возможности из-за сложности описываемых процессов.

Однако, даже при стремительном росте вычислительных возможностей, полное описание динамики целого ряда перечисленных систем остаётся невозможным или неэффективным вследствие большого числа участвующих объектов (см., напр., § 2 в [4]). Это приводит к необходимости использовать методы усреднения, принципы построения которых определяются типом взаимодействия между объектами в системе. Взаимодействие может быть явным, как гравитационное притяжение между телами в классической задаче многих тел или кулоновское отталкивание между электронами в квантовой задаче многих тел, а может быть неявным, вытекающим из балансовых соотношений для агентов в моделях общего экономического равновесия или отдельных блоков в моделях общей циркуляции. Тем не менее, общим является тот факт, что точный вид и методы вычисления соответствующих средних, обычно определяются на основе тех или иных вариационных принципов. Это приводит к рассмотрению агрегированных динамических систем. Задачи ка-

качественного анализа решений, восстановления параметров и управления по данным наблюдений в таких динамических системах активно изучаются в настоящий момент (см., напр., [5–12]).

**Цель диссертационной работы** состоит, во-первых, в разработке вариационных методов усреднения (агрегирования) в системах многих объектов с взаимодействием и разработке численных методов, нацеленных на практическое использование при решении соответствующих систем уравнений, во-вторых, в демонстрации работоспособности предложенных методов и, в-третьих, в разработке методов качественного анализа траекторий агрегированных динамических систем.

**Методы исследования.** В работе используются методы классической и квантовой теории возмущений, метод функционального интегрирования, принцип минимума свободной энергии, метод функций Грина, гармонический анализ, теория бифуркаций, методы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, теория дифференциальных включений и распределений Гурса, различные формы принципа максимума Понтрягина, условия второго порядка оптимальности особых экстремалей, теория двойственности вариационных задач, методы численной оптимизации.

**Научная новизна** предложенного в диссертации подхода состоит в том, что он позволяет в рамках детального (микроскопического, микроэкономического и т. п.) описания системы большого числа взаимодействующих объектов эффективно вычислять интегральные характеристики, относящиеся ко всей системе в целом (намагниченность, совокупный спрос и т. п.) с учётом динамики, которая может отражать квантовые эффекты, изменение демографических факторов и др.

**Практическая значимость.** Результаты диссертации, представляющей собой теоретическое исследование, имеют широкие возможности практических приложений и используются в настоящий момент в магнетизме

металлов, экономике энергоресурсов и физике океана и атмосферы (см., напр., [13–15]).

Эффективность теоретических результатов, изложенных в диссертации, продемонстрирована автором в расчётах магнитных характеристик металлов и сплавов при различных температурах в рамках динамической теории спиновых флуктуаций, при получении количественных оценок влияния демографических факторов на спрос на энергоносители и выбросы парниковых газов в рамках модели Population-Environment-Technology (PET), а также при анализе устойчивости процессов циркуляции по отношению к изменению внешних условий.

Предложенные автором численные методы позволили значительно улучшить количественное согласие с экспериментом для магнитных характеристик металлов при высоких температурах и значительно уменьшить время счёта многорегиональной модели прогнозирования спроса на энергоресурсы и выбросов углерода iPET (<http://www.cgd.ucar.edu/ccr/iam/research/>).

Написанные автором модули программ на языке Fortran и в среде Mathematica используются для проведения расчётов в Институте физики металлов УрО РАН, Национальном центре исследований атмосферы (Боулдер, США), Национальной ассоциации по океану и атмосфере (Сиэтл, США) и Международном институте прикладного системного анализа (Лаксенбург, Австрия).

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:**

1. Дано математическое обоснование гауссовой аппроксимации в теории произвольного случайного поля, флуктуирующего в пространстве и «времени». При помощи принципа минимума свободной энергии получены формулы для среднего и матрицы ковариации оптимального гауссового приближения. Предложен метод частичного гауссового усреднения, позволяющий учесть члены высокого порядка свободной энергии в оптимальной гауссовой аппрок-

симации флуктуирующего поля.

2. На основе оптимальной гауссовой аппроксимации и её обобщений получен метод вычисления функциональных интегралов по внешнему полю, учитывающий динамику и нелокальность флуктуаций. Этот метод успешно применён для математического обоснования расчётов в теории спиновых флуктуаций. В частности, получены формулы для фурье-образов флуктуирующего поля и функций Грина. С их помощью доказана формула, связывающая свободную энергию с функцией Грина системы во внешнем поле. Доказаны соотношения между корреляционными функциями спиновой плотности и флуктуирующего обменного поля.

3. Проведён качественный анализ решений системы нелинейных интегральных уравнений, определяющей оптимальную гауссову аппроксимацию в теории спиновых флуктуаций. Доказана диагональность квадратичной формы оптимальной гауссовой аппроксимации в импульсно-«частотном» представлении. Проведено подробное доказательство формул для вычисления сумм по термодинамическим «частотам» в виде контурных интегралов, которые лежат в основе численной процедуры. Проведён сравнительный анализ используемых численных методов. Эффекты различных приближений теории продемонстрированы в расчётах магнитных свойств конкретных металлов и сплавов в рамках программного комплекса «MAGPROP».

4. Для динамических моделей общего экономического равновесия разработан и реализован в виде программного модуля вариационный метод вычисления параметров потребительского сектора на основе усреднения исходных данных относительно неоднородных групп потребителей. Метод реализован и использован для расчётов в рамках экономико-энергетической модели PЕТ. Показано, что рассчитанные характеристики для репрезентативного агента с усреднёнными параметрами находятся в хорошем согласии с совокупными характеристиками нескольких различных групп потребителей. Проведён

анализ устойчивости результатов в широком диапазоне изменения значимых параметров модели. Кроме того, указан класс динамических моделей общего экономического равновесия, для которого задача об усреднении решается точно. В этом классе получены явные формулы для параметров репрезентативного агента.

5. Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей процесс двойной диффузии, получено достоточное условие на функцию переноса, обеспечивающее существование предельного цикла. Показано, что этот цикл появляется в системе в результате мягкой потери устойчивости положения равновесия при сглаживании скачкообразно меняющейся функции переноса (негладкий аналог бифуркации Андронова-Хопфа). Подобные блочные системы используются, в частности, для изучения качественного характера температурно-солёностной циркуляции в океане и её устойчивости по отношению к изменению внешних параметров.

6. Для управляемой системы, описываемой распределением Гурса, доказано, что достаточно малый участок любой особой траектории первого порядка доставляет слабый минимум задачи быстрогодействия. Более того, произвольная сингулярная кривая является особой траекторией, и любой — не обязательно малый — участок этой траектории доставляет слабый минимум. Отметим, что если особое управление оказалось граничным, то минимум в задаче является одновременно и сильным.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях: Intern. Conference “Kolmogorov and contemporary mathematics” in commemoration of the centenary of A. N. Kolmogorov, 2003 (Moscow, Russia); Workshop on Hamiltonian Dynamical Systems, 2004 (Montreal, Canada); IASA Workshop “Biologizing Control Theory” 2005, (Laxenburg, Austria); Intern. Seminar “Control Theory and Theory of Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations” CGS-2005,

dedicated to 60th anniversary of A. I. Subbotin (Ekaterinburg, Russia); IIASA Intern. Conference “Learning and Climate Change” 2006 (Laxenburg, Austria); Intern. Conference on Dynamical Systems and Differential Equations DSDE–2006 (Suzdal, Russia); Intern. Congress of Mathematicians ICM-2006 (Madrid, Spain); Intern. school-symposium “Analysis, modeling, control, development of economical systems” 2007 (Sevastopol, Ukraine); V Intern. Conference on Dynamic Systems and Applications DSA–2007 (Atlanta, USA); VII Intern. Conference on Differential Equations EQUADIFF–2007 (Vienna, Austria); Intern. conference “Analysis and singularities”, dedicated to the 70th anniversary of V. I. Arnold, 2007 (Moscow, Russia); Intern. winter school on theoretical physics “Kourovka–2008” (Novouralsk, Russia); Intern. Conference “Differential Equations and Topology” 2008, dedicated to the 100th anniversary of L. S. Pontryagin (Moscow, Russia); Moscow Intern. Symposium of Magnetism 2008 (Moscow, Russia); Intern. Conference “Algorithmic Analysis of Unstable Problems” AAUP-2008, dedicated to the centenary of V. K. Ivanov (Ekaterinburg, Russia); Intern. Conference on Magnetism ICM-2009 (Karlsruhe, Germany); Intern. Conference “Actual Problems of Stability and Control Theory” APSCT–2009 (Ekaterinburg, Russia); IV Euro-Asian Symposium “Trends in MAGnetism” EASTMAG–2010 dedicated to the centenary of S. V. Vonsovsky (Ekaterinburg, Russia); VI Intern. Conference on Differential and Functional Differential Equations DFDE–2011 (Moscow, Russia).

Материалы диссертации неоднократно докладывались на Ломоносовских и Тихоновских чтениях факультета ВМК МГУ, на научных семинарах Международного института прикладного системного анализа (Лаксенбург, Австрия), факультета математики и статистики университета Джорджии (Атланта, США) и отдела теоретической и математической физики Института физики металлов УрО РАН.

Результаты диссертации докладывались на научных семинарах: «Мате-

математическая теория оптимального управления и теория дифференциальных включений» Математического института им. В.А. Стеклова РАН (предс. акад. Ю.С. Осипов), «Экономический рост: математические модели и методы» ВМК МГУ (предс. акад. А.В. Кряжимский), семинаре отдела динамических систем ИММ УрО РАН (рук. чл.-корр. В.Н. Ушаков), «Оптимальное управление: математическая теория и прикладные задачи» ВМК МГУ (рук. проф. Н.Л. Григоренко), «Математическая экономика» ЦЭМИ РАН (рук. акад. В.М. Полтерович), семинаре кафедры вычислительных методов УрГУ (рук. проф. В.Г. Пименов) и семинаре отдела теории приближения функций ИММ УрО РАН (рук. чл.-корр. Ю.Н. Субботин).

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 44 печатных работах, из них 17 статей в рецензируемых журналах [A1]–[A17], 5 статей в рецензируемых сборниках [A18]–[A22] и свидетельство об отраслевой регистрации электронного ресурса [A23] (всего 17 публикаций из перечня ВАК).

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, 4 глав и библиографии. Общий объём диссертации 222 страница, из них 203 страницы текста, включая 15 рисунков. Библиография включает 158 наименований на 19 страницах.

## Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

**В первой главе** для произвольной физической величины, описываемой оператором  $A$ , рассматривается задача о приближённом вычислении среднего значения

$$\langle A \rangle = \left( \text{Tr} e^{-H'/T} \right)^{-1} \text{Tr} \left[ A e^{-H'/T} \right], \quad (1)$$

где  $H' = H'_0 + H_I$  — гамильтониан системы, состоящей из  $N_e$  электронов во внешнем электростатическом поле периодической кристаллической решетки,  $T$  — температура в энергетических единицах.

При помощи операторов рождения и уничтожения  $a_{ni\sigma}^\dagger$  и  $a_{ni\sigma}$  одноэлектронных состояний Ванье в § 1.1 получено выражение для слагаемого  $H_I$ , которое отвечает за взаимодействие (утверждения 1.1–1.3):

$$H_I = \sum_j \left( \frac{u_0}{4} n_j^2 - u \mathbf{s}_j^2 \right).$$

Здесь  $n_j = \sum_{\nu\sigma} a_{\nu j\sigma}^\dagger a_{\nu j\sigma}$  и  $\mathbf{s}_j = \sum_{\nu\sigma\sigma'} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right)_{\sigma\sigma'} a_{\nu j\sigma}^\dagger a_{\nu j\sigma'}$  — операторы заряда и спина на узле  $j$  ( $\nu$  пробегает  $N_d$  вырожденных полос,  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  или  $\pm 1$  — спиновый индекс), а  $u_0$  и  $u$  — электронные константы взаимодействия.

Применительно к теории спиновых флуктуаций изложен метод функционального интегрирования (§ 1.2), являющийся одним из наиболее продуктивных методов решения квантовой задачи многих тел в физике конденсированного состояния (см., напр., [1]). В основе метода лежит преобразование Стратоновича-Хаббарда [16, 17], которое заменяет парное взаимодействие частиц на взаимодействие частиц со случайным внешним полем  $V = (V_1(\tau), V_2(\tau), \dots)$ , флуктуирующем в пространстве  $j$  и «времени»  $\tau \in [0, 1/T]$ .

**Утверждение 1.4.** Пусть  $A$  — эрмитов оператор, отвечающий некоторой физической величине в системе с переменным числом частиц. Тогда среднее (1) может быть представлено в виде среднего по конфигурациям

$$\langle A \rangle = \int A(V) p(V) DV \equiv \langle A(V) \rangle, \quad (2)$$

где квантостатистическое среднее  $A(V)$  и плотность вероятности  $p(V)$  определены формулами

$$A(V) = \text{Tr} \left[ AT_\tau \exp \int_0^{1/T} \left( \Omega_1(V) - H'(V) \right) d\tau \right],$$

$$p(V) = \left( \int \exp \left( - (F_0(V) + \Omega_1(V)) / T \right) DV \right)^{-1} \exp \left( - (F_0(V) + \Omega_1(V)) / T \right).$$

Здесь  $F_0(V) = T \int_0^{1/T} \sum_j (u^{-1} \mathbf{V}_j^2(\tau) - u_0^{-1} (V_j^0(\tau))^2) d\tau$  — энергия поля;

$$\Omega_1(V) = -T \ln \text{Tr} \left[ T_\tau \exp \left( - \int_0^{1/T} H'(V) d\tau \right) \right] \quad (3)$$

— термодинамический потенциал системы невзаимодействующих частиц при наличии поля  $V$ ;

$$H'(V) = H'_0 + 2 \sum_j \left( V_j^0(\tau) \rho_j^0(\tau) + \mathbf{V}_j(\tau) \boldsymbol{\rho}_j(\tau) \right) \quad (4)$$

— гамильтониан невзаимодействующей системы, где

$$\rho_j = \rho_j^0 \sigma^0 + \boldsymbol{\rho}_j \boldsymbol{\sigma}, \quad \rho_j^\mu = \frac{1}{2} \text{Sp} (\sigma^\mu \rho_j), \quad \mu = 0, x, y, z,$$

— одноузельная матрица плотности ( $\sigma^\alpha$  — матрицы Паули,  $\alpha = x, y, z$ , и  $\text{Sp}$  обозначает след по спиновым индексам);  $T_\tau$  — оператор хронологизации по «времени»  $\tau$ , а  $DV$  указывает на функциональное интегрирование.

Явный вид выражения для термодинамического потенциала  $\Omega_1(V)$  в случае гамильтониана Хаббарда даёт следующая

**Теорема 1.1.** Пусть гамильтониан системы  $H'(V)$  задан выражением (4).

Тогда

$$\Omega_1(V) = -T \ln \text{Tr} \exp(-H'_0/T) - T \text{Tr} \ln G^0 + T \text{Tr} \ln G(V), \quad (5)$$

где функция Грина  $G(V)$  невзаимодействующих электронов во внешнем поле даётся выражением

$$G(V)_{\nu jj'\sigma\sigma'}(\tau, \tau') = - \frac{\text{Tr} \left[ T_{\tau} a_{\nu j\sigma}(\tau) a_{\nu j'\sigma'}^{\dagger}(\tau') T_{\tau} \exp \left( - \int_0^{1/T} H'(V) d\tau'' \right) \right]}{\text{Tr} T_{\tau} \exp \left( - \int_0^{1/T} H'(V) d\tau'' \right)}.$$

Ещё одним приложением утверждения 1.4 является

**Теорема 1.2.** *Условие сохранения числа электронов может быть записано в виде*

$$N_e = T \text{Tr} \bar{G},$$

где средняя функция Грина  $\bar{G} = \langle G(V) \rangle$  вычисляется по формуле

$$\bar{G}_{\nu jj'\sigma\sigma'}(\tau, \tau') = \int G(V)_{\nu jj'\sigma\sigma'}(\tau, \tau') p(V) DV(\tau'').$$

Одним из основных достоинств функционально-интегрального подхода в теории спиновых флуктуаций является возможность свести вычисление спиновых моментов и корреляционных функций к вычислению соответствующих величин для внешнего обменного поля. Этот приём проиллюстрирован на примере среднего и парных корреляторов (§ 1.3).

**Утверждение 1.5.** *Средний спиновый момент  $\langle \hat{s}_j \rangle \equiv Z^{-1} \text{Tr}(\hat{s}_j e^{-\hat{H}/T})$  может быть вычислен по формуле*

$$\langle \hat{s}_j^{\alpha} \rangle = -u^{-1} \langle V_j^{\alpha}(\tau) \rangle, \quad \alpha = x, y, z. \quad (6)$$

**Утверждение 1.6.** *Спиновый коррелятор*

$$\langle \Delta \hat{s}_j(\tau) \Delta \hat{s}_{j'}(\tau') \rangle \equiv Z^{-1} \text{Tr}(\Delta \hat{s}_j(\tau) \Delta \hat{s}_{j'}(\tau') e^{-\hat{H}/T})$$

может быть вычислен по формуле

$$\langle \Delta s_j^{\alpha}(\tau) \Delta s_{j'}^{\alpha'}(\tau') \rangle = \frac{1}{u^2} \langle \Delta V_j^{\alpha}(\tau) \Delta V_{j'}^{\alpha'}(\tau') \rangle - \frac{T}{2u} \delta_{jj'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta(\tau - \tau'). \quad (7)$$

Для локального спинового момента

$$s_L \equiv \left( \frac{1}{N_a} \sum_j T \int_0^{1/T} \langle \mathbf{s}_j^2(V) \rangle d\tau \right)^{1/2},$$

где  $N_a$  — число атомов, доказанные утверждения дают

**Следствие 1.1.** *Имеет место формула*

$$s_L = \frac{1}{u} \left( \bar{V}^2 + \langle \Delta \mathbf{V}^2 \rangle - \frac{3uT}{2} \right)^{1/2},$$

где среднеквадратичная флуктуация вычисляется по формуле

$$\langle \Delta \mathbf{V}^2 \rangle = \frac{1}{N_a} \sum_{j\alpha} T \int_0^{1/T} \langle (\Delta V_j^\alpha(\tau))^2 \rangle d\tau.$$

Ещё одной важной магнитной характеристикой, которую удаётся вычислить, используя формулы (6) и (7), является магнитная восприимчивость  $\bar{\chi}_{\mathbf{q}}^\alpha(\omega)$ , которая определяется формулой Кубо (см., напр., [18]):

$$\bar{\chi}_{\mathbf{q}}^\alpha(\omega) = i \int_0^\infty \langle [\Delta \hat{s}_{\mathbf{q}}^\alpha(t), \Delta \hat{s}_{-\mathbf{q}}^\alpha] \rangle e^{i\omega t} dt. \quad (8)$$

При помощи аналитического продолжения функции (8) установлена связь величин  $\tilde{\chi}_{\mathbf{q}m}^\alpha \equiv \tilde{\chi}_{\mathbf{q}}^\alpha(i\omega_m)$ ,  $\omega_m = 2m\pi T$ , с коррелятором в импульсно-«частотном» (Фурье) представлении. А именно, доказана следующая

**Теорема 1.3.** *Динамическая восприимчивость  $\tilde{\chi}_{\mathbf{q}m}^\alpha$  может быть вычислена по формуле*

$$\tilde{\chi}_{\mathbf{q}m}^\alpha = -\frac{T}{2} \langle \Delta \hat{s}_{\mathbf{q}m}^\alpha \Delta \hat{s}_{-\mathbf{q}-m}^\alpha \rangle = \frac{1}{u^2} \langle \Delta V_{\mathbf{q}m}^\alpha \Delta V_{-\mathbf{q}-m}^\alpha \rangle - \frac{T}{2u}.$$

Функция Грина  $G(V)$  в формуле (5) для термодинамического потенциала  $\Omega_1(V)$  может быть выражена через оператор внешнего поля  $V$  и нулевую функцию Грина  $G^0$  с помощью уравнения Дайсона (см., напр., [18])

$$G = G^0 + G^0 V G.$$

Относительно операторов  $V$  и  $G^0$  доказано следующее

**Утверждение 1.7.** *Матрицы нулевой функции Грина и внешнего поля  $V$  в узельно-«временном» представлении имеют вид*

$$G_{jj'}^0(\tau, \tau') = G_{j-j'}^0(\tau - \tau'), \quad V_{jj'}(\tau, \tau') = V_j(\tau)\delta_{jj'}\delta(\tau - \tau'),$$

*а в импульсно-«частотном» (Фурье) представлении имеют вид*

$$G_{\mathbf{k}\mathbf{k}'nn'}^0 = G_{\mathbf{k}n}^0\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{nn'}, \quad V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'nn'} = V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}',n-n'}.$$

Из данного утверждения видно, что матрицы  $V$  и  $G^0$  не могут быть одновременно диагонализированы ни в исходном, ни в фурье-представлении. Поэтому непосредственное применение формулы (5) невозможно и требует подходящих приближений. Интегралы по зарядовому полю  $V_j^0(\tau)$  в формуле (2) вычисляются методом перевала, который заменяет флуктуирующее поле его средним значением  $\langle V \rangle \equiv \bar{V}$ . Вместе с тем для количественного описания спиновых флуктуаций  $\mathbf{V}_j(\tau)$  приближение среднего поля оказывается недостаточным.

Вычисление функциональных интегралов по обменному полю  $\mathbf{V}_j(\tau)$  проводится при помощи метода гауссовой аппроксимации, который учитывает динамику и нелокальность флуктуаций (§ 1.4). От термодинамического потенциала  $\Omega_1(V)$  делается переход к свободной энергии  $F_1(V) = \Omega_1(V) + \mu N_e$ , где  $\mu$  — химический потенциал. В основе математического обоснования метода лежит принцип минимума свободной энергии [19], записанный в следующей форме.

**Теорема 1.4.** *Пусть  $F(V)$  — свободная энергия системы во внешнем флуктуирующем поле,  $F^{\text{mod}}(V)$  — аппроксимирующая её «модельная» свободная энергия и*

$$\mathcal{F} = -T \ln \int \exp(-F(V)/T) DV, \quad \mathcal{F}^{\text{mod}} = -T \ln \int \exp(-F^{\text{mod}}(V)/T) DV$$

— полные свободные энергии соответствующих систем. Тогда имеет место неравенство

$$\mathcal{F} \leq \mathcal{F}^{\text{mod}} + \langle F(V) - F^{\text{mod}}(V) \rangle_{\text{mod}}, \quad (9)$$

где среднее вычисляется по формуле

$$\langle \dots \rangle_{\text{mod}} = \left( \int \exp(-F^{\text{mod}}(V)/T) DV \right)^{-1} \int (\dots) \exp(-F^{\text{mod}}(V)/T) DV.$$

**Определение.** Оптимальной на классе функций  $F^{\text{mod}}(V)$  назовем аппроксимацию, которая доставляет минимум правой части неравенства (9).

**Утверждение 1.8.** Аппроксимация оптимальная на классе функций  $F_{\text{mod}}(V)$  определяется уравнением

$$\langle F(V) - F_{\text{mod}}(V) \rangle_{\text{mod}} \langle \delta F_{\text{mod}}(V) \rangle_{\text{mod}} - \left\langle (F(V) - F_{\text{mod}}(V)) \delta F_{\text{mod}}(V) \right\rangle_{\text{mod}} = 0.$$

В классе квадратичных функций  $F^{(2)}(V) = \text{Tr}(\Delta V^\dagger A \Delta V)$ ,  $A^\dagger = A > 0$ , доказана

**Теорема 1.5.** Оптимальная гауссова аппроксимация свободной энергии задаётся системой нелинейных интегральных уравнений

$$\left\langle \frac{\partial F(V)}{\partial V} \right\rangle_{(2)} = 0, \quad A = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 F(V)}{\partial V^2} \right\rangle_{(2)}, \quad (10)$$

где среднее  $\langle \dots \rangle_{(2)}$  вычисляется с гауссовой плотностью вероятности

$$p^{(2)}(V) = \left( \int \exp(-F^{(2)}(V)/T) DV \right)^{-1} \exp(-F^{(2)}(V)/T). \quad (11)$$

Оптимальная гауссова аппроксимация (10) использует лишь линейный и квадратичный члены в разложении свободной энергии  $F(V) = F_0(V) + F_1(V)$  и эффективна при не слишком больших флуктуациях  $\Delta V$  внешнего поля.

Поскольку универсального метода вычисления функциональных интегралов за пределами гауссовых квадратур не существует, нами предложен

метод учёта членов высокого порядка в свободной энергии (§ 1.5). Метод использует частичное гауссово усреднение, которое строится при помощи теоремы Вика (см., напр., [20]). На практике достаточно применить эту процедуру к слагаемым третьего и четвёртого порядка в разложении свободной энергии (утверждение 1.9):

$$F(V) \approx T \operatorname{Tr} \left( \frac{\tilde{V} \Delta V}{UT} + G(\tilde{V}) \Delta V + G(\tilde{V}) \underbrace{\Delta V G(\tilde{V}) \Delta V}_{\text{скальляр}} G(\tilde{V}) \Delta V \right) \quad (12)$$

$$+ \frac{1}{2} T \operatorname{Tr} \left( \frac{\Delta V^2}{UT} + G(\tilde{V}) \Delta V G(\tilde{V}) \Delta V + 3G(\tilde{V}) \underbrace{\Delta V G(\tilde{V}) \Delta V}_{\text{скальляр}} G(\tilde{V}) \Delta V G(\tilde{V}) \Delta V \right),$$

где  $U = N_d u$ , а «спаривание» (скобка снизу) означает усреднение:

$$(\dots \underbrace{\Delta V \dots \Delta V}_{\text{скальляр}} \dots) = \int (\dots \Delta V \dots \Delta V \dots) p^{(2)}(V) DV.$$

Применение теоремы 1.5 к квадратичному выражению (12) даёт оптимальное гауссово приближение с плотностью вероятности вида (11).

В результате сделанной перенормировки первое соотношение (10) преобразуется к виду

$$\bar{V}_z = -u(1 + \eta) N_a^{-1} T \operatorname{Tr} \bar{G}^z, \quad (13)$$

где  $\bar{V}_z \equiv N_a^{-1} \bar{V}_{00}^z$  — величина среднего обменного поля, а

$$\eta = \frac{1}{2N_a N_d} \frac{\pi T}{W} \operatorname{Tr} \left( \bar{G} \Delta V \underbrace{\bar{G} \Delta V}_{\text{скальляр}} \right) \quad (14)$$

— поправочный коэффициент ( $W$  — ширина энергетической полосы). Вид функции  $F^{(2)}(V)$  в фурье-представлении даёт следующее

**Утверждение 1.10.** *Оптимальная квадратичная аппроксимация  $F^{(2)}(V)$  в фурье-представлении приводится к главным осям:*

$$F^{(2)}(V) = \sum_{\mathbf{q}m\alpha} \left( u^{-1} - \chi_{\mathbf{q}m}^\alpha \right) |\Delta V_{\mathbf{q}m}^\alpha|^2 \equiv \sum_{\mathbf{q}m\alpha} A_{\mathbf{q}m}^\alpha |\Delta V_{\mathbf{q}m}^\alpha|^2. \quad (15)$$

Здесь магнитная восприимчивость  $\chi_{\mathbf{q}m}^\alpha \equiv \chi_{\mathbf{q}}^\alpha(i\omega_m)$  даётся формулой

$$\chi_{\mathbf{q}m}^\alpha = -\frac{1}{2} (1 + 3\eta) T \sum_{\mathbf{k}n} \sum_{\gamma_1 \gamma_2} \bar{G}_{\mathbf{k}n}^{\gamma_1} \bar{G}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}, n-m}^{\gamma_2} \operatorname{Sp}(\sigma^{\gamma_1} \sigma^\alpha \sigma^{\gamma_2} \sigma^\alpha), \quad \gamma_1, \gamma_2 = 0, z.$$

Для практического вычисления макроскопических характеристик реальных металлов бесконечная цепочка нелинейных уравнений, к которой приводят формулы (13)–(15), является излишне сложной. Кроме того, несмотря на неявный учёт взаимодействия флуктуаций поля  $V$  в гауссовой аппроксимации за счет членов высокого порядка свободной энергии, флуктуации  $\Delta V_{\mathbf{q}m}^\alpha$  все ещё статистически независимы, что приводит к их слишком быстрому росту с температурой.

Целью локального приближения (§ 1.6) является учёт пространственных и динамических корреляций и одновременно дальнейшее упрощение вычислительной схемы за счет перехода к переменным, усредненным на узел. В основе вычисления сумм по «частотам» лежит метод аналитического продолжения, который позволяет при определённых условиях заменить суммы интегралами.

**Теорема 1.6.** *Для суммы по чётным «частотам»  $\omega_m = 2m\pi T$  имеет место формула*

$$T \sum_m h(i\omega_m) = \frac{1}{\pi} \int B(\varepsilon) \operatorname{Im} h(\varepsilon + i0) d\varepsilon,$$

где  $B(\varepsilon) = (\exp(\varepsilon/T) - 1)^{-1}$  — функция Бозе.

**Теорема 1.7.** *Для суммы по нечётным «частотам»  $\omega_n = (2n+1)\pi T$  имеет место формула*

$$T \sum_n h(i\omega_n) = \frac{1}{\pi} \int f(\varepsilon) \operatorname{Im} h(\varepsilon - i0) d\varepsilon,$$

где  $f(\varepsilon) = [\exp((\varepsilon - \mu)/T) + 1]^{-1}$  — функция Ферми.

В результате уравнение (13) приобретает вид

$$\bar{V}_z = -u(1 + \eta) \frac{1}{2\pi} \int \operatorname{Im}(g_\uparrow - g_\downarrow) f d\varepsilon,$$

где одноузельная средняя функция Грина  $g_\sigma(\varepsilon)$  вычисляется по формуле

$$g_\sigma(\varepsilon) = g^0(\varepsilon - \sigma\bar{V}_z - \Delta\Sigma_\sigma(\varepsilon, \sigma\bar{V}_z)).$$

Здесь  $g^0(\varepsilon) = \int \nu(\varepsilon')/(\varepsilon - \varepsilon') d\varepsilon'$ , где  $\nu(\varepsilon)$  — немагнитная плотность электронных состояний, а  $\Delta\Sigma_\sigma(\varepsilon, \sigma\bar{V}_z)$  — флуктуационная добавка к собственно-энергетической части, которая получается из уравнения когерентного потенциала

$$\Delta\Sigma = \langle [1 - (\Delta V - \Delta\Sigma)g]^{-1} \Delta V \rangle$$

во втором порядке теории возмущений по  $\Delta V$  и бесконечном порядке по  $\bar{V}_z$ . Поправочный коэффициент (14) вычисляется по формуле

$$\eta = -\frac{\pi}{WN_d} \sum_{\alpha} \dot{\chi}_L^{\alpha}(0) \langle |\Delta V_{\alpha}|^2 \rangle,$$

где  $\dot{\chi}_L^{\alpha}(0)$  — локальная восприимчивость в гауссовом приближении:

$$\dot{\chi}_L^{\alpha}(0) = -\frac{N_d}{\pi} \sum_{\gamma_1 \gamma_2} \int \text{Im } g^{\gamma_1}(\varepsilon) g^{\gamma_2}(\varepsilon) \text{Sp}(\sigma^{\gamma_1} \sigma^{\alpha} \sigma^{\gamma_2} \sigma^{\alpha}) f(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Для среднеквадратичных флуктуаций получается выражение

$$\langle \Delta V_{\alpha}^2 \rangle = \frac{u}{\pi N_a} \sum_{\mathbf{q}} \int_0^{\infty} \left( B(\varepsilon) + \frac{1}{2} \right) \text{Im} \frac{1}{1 - U \chi_{\mathbf{q}}^{\alpha}(\varepsilon)} d\varepsilon.$$

Наконец, учёт однородных флуктуаций (ОФ) в одноузельной средней функции Грина делается при помощи усреднения по величине среднего поля.

В результате получается нелинейная система относительно четырёх неизвестных. При помощи методов теории особенностей исследован качественный характер температурной зависимости решения и его устойчивость. Изложены численные методы решения этой системы и проведено сравнение результатов расчёта с экспериментом (§ 1.7).

В качестве объекта для иллюстрации предложенных методов в диссертации рассмотрен инварный сплав  $\text{Fe}_{0.65}\text{Ni}_{0.35}$  в связи с имевшимися ранее проблемами при квантостатистическом описании его магнитных свойств (см., напр., [21]). Рис. 1 показывает, что гауссова аппроксимация (ГА) даёт хорошее согласие с экспериментом для среднего момента  $m(T)$  в широком

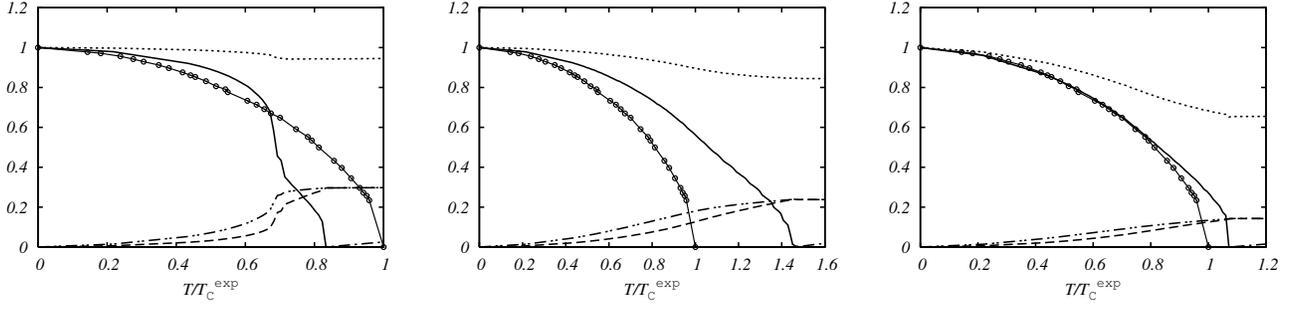


Рис. 1. Намагниченность  $m(T)/m(0)$  (— расчёт,  $\ominus\ominus\ominus$  эксперимент [22]), среднеквадратичные флуктуации  $\langle \Delta V_x^2 \rangle'(T)$  ( $-\cdot\cdot-$ ) и  $\langle \Delta V_z^2 \rangle'(T)$  ( $- - -$ ) в единицах квадрата среднего обменного поля  $\bar{V}_z^2(0)$ , обратная парамагнитная восприимчивость  $\chi^{-1}(T)$  ( $-\cdot\cdot-$ ) в единицах  $T_C^{\text{exp}}/\mu_B^2$ , и локальный магнитный момент  $m_L(T)/m(0)$  ( $\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ ) инвариантного сплава  $\text{Fe}_{0.65}\text{Ni}_{0.35}$ , рассчитанного в ГА (слева), ПГА (в середине) и ПГА+ОФ (справа) как функции приведённой температуры  $T/T_C^{\text{exp}}$ .

интервале температур, но при высоких температурах, вопреки эксперименту, происходит резкий скачок. Учёт членов высокого порядка свободной энергии  $F(V)$  в рамках перенормированной гауссовой аппроксимации (ПГА) исправляет характер температурной зависимости в области высоких температур: получаем фазовый переход второго рода и выпуклую вверх кривую  $m(T)$ . Наконец, учёт однородных флуктуаций (ОФ) в функции Грина  $\tilde{g}_\sigma(\varepsilon)$  вместе с локальными флуктуациями даёт хорошее согласие при всех температурах.

Результаты первой главы опубликованы в работах [A9]–[A14], [A20], [A39]–[A42], [A44] и [A45]. Все математические результаты в указанных работах принадлежат диссертанту. В комплексе программ “MAGPROP” [A23] для расчёта магнитных свойств переходных металлов и сплавов в рамках теории спиновых флуктуаций диссертантом написаны программные модули, реализующие перенормировку среднего поля и спиновой восприимчивости, и программный модуль, реализующий учёт равномерных флуктуаций в одноузельной средней функции Грина.

**Во второй главе** исследуются методы агрегирования потребительских характеристик в динамических моделях общего экономического равновесия.

Общая структура и особенности моделей данного типа описаны в § 2.1.

Указан класс динамических моделей общего экономического равновесия с линейно-логарифмическими функциями полезности  $U^i$  и производственными функциями  $f_j$  типа Кобба-Дугласа, допускающий точное решение задачи агрегирования (§ 2.2). В этом классе построена функция полезности  $U$  репрезентативного потребителя, спрос которого  $c_{jt} = c_{jt}(p_{jt}, m)$  на  $j$ -ый продукт равен совокупному спросу неоднородных потребителей  $\sum_i c_{jt}^i(p_{jt}, m^i)$ , как функция цен  $p_{jt}$  и совокупного благосостояния  $m = \sum_i m^i$ . Использован метод Негиши, который состоит в решении нелинейной системы уравнений конкурентного равновесия с функцией полезности  $U = \sum_i \nu^i U^i$  при условии, что трансфертные платежи  $t^i(\boldsymbol{\nu})$  равны нулю:

$$t^i(\boldsymbol{\nu}) \equiv m^i(\boldsymbol{\nu}) - \sum_{jt} p_{jt}(\boldsymbol{\nu}) c_{jt}^i(\boldsymbol{\nu}) = 0,$$

для всех  $i$ . Функция полезности репрезентативного агента  $U$  в данном случае также является линейно-логарифмической функцией, причём каждый параметр эластичности  $\mu_j$  равен среднему значению соответствующих параметров эластичности  $\mu_j^i$  неоднородных потребителей с весами Негиши  $\nu^i$ . Получены явные формулы, определяющие зависимость весов Негиши  $\nu^i$  от параметров модели, включая параметры производственного сектора (теорема 2.1). Для определения равновесных величин при фиксированных  $p_{jt}$  и  $m$  ищется решение оптимальное по Парето при помощи метода динамического программирования (леммы 2.1 и 2.2).

В моделях с функциями постоянной эластичности нелинейная система уравнений, описывающая конкурентное равновесие, не может быть решена аналитически. В § 2.3 рассматривается класс функций полезности постоянной эластичности на бесконечном промежутке времени вида

$$U(\mathbf{c}) = \frac{1}{\psi} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t n_t \left( \sum_j (\mu_j c_{jt})^\rho \right)^{\frac{\psi}{\rho}}, \quad (16)$$

где  $c_{jt}$  — объём потребления  $j$ -го товара на душу населения в момент времени  $t$ , а  $n_t$  — число людей в группе в момент  $t$ , являющееся заданной функцией времени; коэффициент дисконтирования  $\beta \in (0, 1)$ , межвременной коэффициент замещения  $\psi \in (-\infty, 1)$ ,  $\psi \neq 0$ , коэффициент замещения между товарами  $\rho \in (-\infty, 1)$ ,  $\rho \neq 0$ , и коэффициент предпочтения  $j$ -го товара  $\mu_j \in (0, 1)$  являются параметрами. Значения  $\mu_j$ , не зависящие от времени, можно определить на основе вариационного принципа по имеющимся данным в начальный момент (утверждение 2.2 и следствие 2.1).

Предложен метод усреднения потребительских характеристик, который позволяет учесть изменение во времени коэффициентов предпочтения  $\mu_{jt}$  и производительности труда  $l_t$ . Рассмотрены приложения к конкретному типу многосекторных моделей, описанному в § 2.4, которые используются для количественных оценок спроса на энергоносители и выбросы углерода [23]. В оптимизационной задаче, отвечающей  $i$ -ой группе потребителей доказано, следующее

**Утверждение 2.4.** Уравнение, описывающее динамику величин потребления  $c_{ijt}$ , может быть записано в виде

$$\frac{q_t \bar{c}_{it}^{\psi-1}}{\bar{p}_{it}} = \beta \left( \frac{(1-\delta)q_{t+1} + (1-\phi_{i,t+1})r_{t+1}}{\bar{p}_{i,t+1}} \right) \bar{c}_{i,t+1}^{\psi-1}. \quad (17)$$

где  $r_t$  и  $q_t$  — стоимость капитала и инвестиций,  $\phi_{it}$  — налоги,  $\delta$  — коэффициент устаревания капитала, а композиционные индексы цен  $p_{jt}$  и потребления  $c_{ijt}$  вычисляются по формулам

$$\bar{p}_{it} = \left( \sum_j \left( \frac{p_{jt}}{\mu_{ijt}} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} \quad \bar{c}_{it} = \left( \sum_j (\mu_{ijt} c_{ijt})^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}. \quad (18)$$

Вместе с уравнением, описывающим динамику капитала, и балансовыми соотношениями, условия оптимальности для потребительского и производственного секторов и правительства образуют нелинейную систему, которая определяет конкурентное равновесие.

Эффективность метода усреднения определяется зависимостью результатов от степени усреднения (т.е. от числа рассматриваемых в модели групп потребителей). Нами проведено сравнение значений совокупных характеристик, вычисленных в модели РЕТ с репрезентативным агентом (одна группа с усредненными характеристиками) и с несколькими группами, которые обладают разными характеристиками.

Данные указывают, что наибольшая неоднородность потребителей наблюдается в развивающихся странах, поэтому расчёты проводились по реальным данным для Индии [24]. В случае с независимыми от времени производительностью и коэффициентами предпочтения, калиброванными по начальным данным ( $\mu_0$  и  $l_0$ ), величины совокупного спроса на потребительские товары и энергоносители в модели с репрезентативным агентом и несколькими группами могут иметь значительные различия: в 1.5–2 раза (см. рис. 2). В случае с независимыми от времени коэффициентами предпочтения, но зависящей от времени производительностью ( $\mu_0$  и  $l_t$ ) различия существенно уменьшаются, но тем не менее могут достигать 25%. Наконец, в случае, когда и производительность, и коэффициенты предпочтения учитывают зависимость от времени ( $\mu_t$  и  $l_t$ ), различия становятся незначительными (в пределах 1%). Выводы устойчивы к изменению значимых параметров в интервалах допустимых значений.

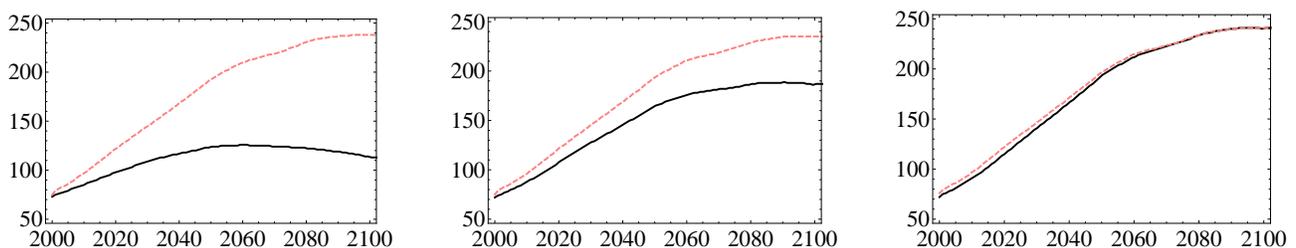


Рис. 2. Потребительский спрос на энергоресурсы в млрд. долл. США 2000 года репрезентативного агента (чёрный) и совокупный спрос шести неоднородных групп (пунктир) для Индии с  $\mu_0$  и  $l_0$  (слева),  $\mu_0$  и  $l_t$  (в середине) и  $\mu_t$  и  $l_t$  (справа).

Таким образом, предложенный метод позволяет расширить область применимости репрезентативного агента на широкий класс динамических многосекторных моделей с меняющимися во времени неоднородными характеристиками потребителей.

Результаты второй главы опубликованы в работах [A2, A15, A16, A19, A21, A28, A29, A43]. Все математические результаты принадлежат диссертанту. Кроме того, диссертантом реализованы в виде программных модулей численные методы расчёта потребительских характеристик по исходным данным в рамках программного комплекса PET (код на языке Фортран-90 и описание доступны на сайте <http://www.cgd.ucar.edu/ccr/iam/research/>).

**В третьей главе** изучаются бифуркации в семействах периодических решений динамических систем, отвечающих блочным моделям циркуляции и ограниченной задаче трёх тел.

Качественный анализ блочных моделей температурно-солёностной циркуляции проводился в ряде работ (см. обзор [3]), однако аналитически в этих моделях была изучена лишь бифуркация типа седло-узел. В работе [25] численно показано, что двойная диффузия в таких моделях может приводить к неустойчивому положению равновесия с предельным циклом вокруг него. В безразмерных координатах соответствующая система дифференциальных уравнений на плоскости может быть записана в виде

$$\dot{x} = 1 - x - q(z)x, \quad \dot{y} = \delta(1 - y) - q(z)y, \quad (19)$$

где  $z = -x + ry$ ,  $r > 1$  и  $0 < \delta < 1$ , а  $q(z)$  — липшицева неубывающая неотрицательная функция, положительная при неотрицательных значениях своего аргумента. Систему (19) рассматриваем в единичном квадрате  $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , который является положительно инвариантной областью данной системы. Более того, любая траектория, начинающаяся на границе квадрата  $\Pi$ , входит внутрь его за конечное время.

В § 3.1 описана структура модели и доказаны существование и единственность положения равновесия системы (19). Получены необходимые условия того, что это положение равновесия является гиперболическим неустойчивым (§ 3.2). Достаточные условия дают утверждение 3.4. и следующая

**Теорема 3.1.** *При  $1 < r < 1/\delta$  положение равновесия  $(\hat{x}, \hat{y})$  системы (19) с непрерывной функцией переноса  $q(z)$  является гиперболическим репеллером, если эта функция дифференцируема в точке  $\hat{z}$ , такой что  $q(\hat{z}) < q_{\min}$ , и выполнено неравенство  $q'(\hat{z})\hat{z} < -1 - \delta - 2q(\hat{z})$ .*

В § 3.3 показано, что есть предельный цикл, который стягивается в точку, когда функция  $q(z)$  стремится к ступенчатой функции:  $q(z) = 0$ ,  $z < 0$ , и  $q(z) = \sigma$ ,  $z \geq 0$ . Решение предельной разрывной системы понимается в смысле Филиппова [26], как пара абсолютно непрерывных функций  $(x = x(t), y = y(t))$ , удовлетворяющих дифференциальному включению  $(\dot{x}, \dot{y}) \in F(x, y)$  п.в., где  $F(x, y)$  — минимальное замкнутое выпуклое множество, содержащее все пределы правой части  $f$  системы при  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (x, y)$  и  $\tilde{x} \neq r\tilde{y}$ . Вне линии разрыва системы правая часть включения односточна, а на самой этой линии выпуклая оболочка пределов  $f$  при подходах из полуплоскостей  $z = -x + ry < 0$  и  $z = -x + ry > 0$  не содержит касательных к линии разрыва скоростей за исключением самой точки покоя. Следовательно, нет траекторий, движущихся вдоль линии разрыва, за исключением самой точки покоя. Далее определяется тип точки равновесия.

**Теорема 3.2.** *Пусть  $(\delta r - \delta)/(1 - r\delta) < \sigma$ . Тогда система (19) со скачком в правой части имеет единственное положение равновесия, и это положение равновесия топологически эквивалентно устойчивому фокусу.*

Топологически фазовый портрет сохраняется, если допустить ненулевые правую и левую производные функции  $q$  в нуле.

**Теорема 3.3.** *Пусть  $1 < r < 1/\delta$  и  $q(z)$  — кусочно дифференцируемая функция переноса, непрерывная вне нуля, а в нуле имеющая скачок такой, что*

$q(0-) < \delta(r-1)/(1-r\delta) < q(0+)$ . Тогда система (19) имеет единственную неподвижную точку, и эта точка топологически эквивалентна устойчивому фокусу. Более того, 2-струя отображения последования не зависит от значений односторонних производных функции  $q(z)$  в точке скачка.

Наконец, пусть  $q_\mu(\cdot)$  — однопараметрическое семейство функций, которые удовлетворяют предположениям теорем 3.1 и 3.2 и сходятся поточечно при  $\mu \rightarrow 0+$  к функции  $q(\cdot)$  разрывной в нуле. Если менять  $\mu$  в обратном направлении, начиная с разрывной системы при  $\mu = 0$ , бифуркация будет сходна с мягкой потерей устойчивости положения равновесия для плоских систем, частный случай которой описывается теоремой Андронова-Хопфа (см., напр., [27]). Отметим, что в нашем случае механизм бифуркации отличается: предельный цикл сглаженной системы здесь возникает благодаря «мнимым» аттракторам системы со скачком в правой части.

В § 3.4 обсуждается применение блочных моделей для описания глобального углеродного цикла. Описан вариационный метод идентификации параметров модели по данным наблюдений. В последних двух параграфах излагается метод изучения невырожденных бифуркаций параметрических семейств периодических решений дифференциальных уравнений, а также теория возмущений порождающих решений ограниченной задачи трёх тел.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [A1], [A3], [A6]–[A8], [A18], [A24]–[A27], [A30] и [A31]. В работе [A6] диссертанту принадлежит теорема 3. В работе [A7] диссертанту принадлежат предложение 4 и теоремы 2 и 3. В работах [A3, A8] диссертанту принадлежат математические результаты. Кроме того, в рамках программного комплекса ISAM, диссертантом написан программный модуль для вычисления параметров агрегированной модели циркуляции углерода.

**В четвёртой главе** рассматриваются управляемые системы, заданные распределениями Гурса.

Распределение  $D$  коранга  $d \geq 2$  на многообразии  $M$  размерности  $m \geq 4$  ( $D(q)$  — подпространство постоянной размерности в  $T_q M$  при каждом  $q \in M$ ) называется распределением Гурса, если  $D^{i+1} = D^i + [D^i, D^i]$ ,  $D^1 = D$ , является распределением при каждом  $i = 1, \dots, d$ , и выполнено условие  $\dim D^{i+1} = \dim D^i + 1$ . Через  $[X, Y]$ ,  $X, Y \in D$ , обозначаем коммутатор векторных полей из  $D$ . Набор  $(\dim D^1(q), \dots, \dim D^d(q))$  называется большим вектором роста распределения  $D$  (не обязательно Гурса) в точке  $q \in M$ . Малым вектором роста распределения  $D$  в точке  $q \in M$  называется набор  $(\dim D_1(q), \dots, \dim D_d(q))$ , где  $D_{i+1} = D_i + [D, D_i]$  ( $i = 1, \dots, d$ ,  $D_1 = D$ ). В точке общего положения распределения Гурса большой и малый вектора роста совпадают и равны  $(r, r + 1, r + 2, \dots, m)$ ,  $r = m - d$ . Точки, в которых это условие не выполнено называются особыми ( $\dim D^i \geq \dim D_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , верно в любой точке).

Распределение  $\text{Span}(f_0, f_1)$ , порожденное парой векторных полей

$$\begin{aligned} f_0(q) &= (v_0 \cos \theta_0, v_0 \sin \theta_0, v_1 \sin(\theta_1 - \theta_0), \dots, v_n \sin(\theta_n - \theta_{n-1}), 0), \quad (20) \\ v_i &= \prod_{j=i+1}^n \cos(\theta_j - \theta_{j-1}), \quad i = \overline{0, (n-1)}, \quad v_n = 1, \\ f_1(q) &= (0, \dots, 0, 1), \end{aligned} \quad (21)$$

является распределением Гурса на  $\mathbb{R}^2 \times (\mathcal{S}^1)^{n+1}$  и моделирует все возможные особенности произвольного распределения Гурса коранга  $n + 1$  [28].

Соответствующая управляемая система  $\dot{q} = v f_0(q) + u f_1(q)$  описывает кинематическую модель движения тягача с  $n$  прицепами, если принять, что  $(x, y)$  — евклидовы координаты *последнего* прицепа,  $\theta_i$  — угол между  $(n-i)$ -м прицепом и осью  $Ox$ ,  $\theta_n$  — угол между тягачом и осью  $Ox$ . Особенности распределения  $\text{Span}(f_0, f_1)$  — это такие положения системы, что некоторая пара прицепов (кроме последней) находится под прямым углом друг к другу:  $\cos(\theta_k - \theta_{k-1}) = 0$ ,  $k = 2, \dots, n$  (см. [29] и цитированную там литературу).

Зеликиным (2001) была высказана гипотеза о том, что особенности распределения (20)–(21) могут быть описаны как особые траектории, доставляющие минимум в задаче оптимального управления  $T \longrightarrow \min, \dot{q} = f_0(q) + u f_1(q), q(0) = a, q(T) = b, |u| \leq \omega$ . При помощи явного построения поля экстремалей [30] Долгалёвой (2005) была доказана оптимальность (сильный минимум) малых участков одной из  $n - 1$  таких особенностей. Диссертантом доказано, что достаточно малый участок любой особой траектории первого порядка соответствующей задачи доставляет слабый минимум (теорема 4.1). Более того, произвольная особенность указанного 2-распределения Гурса является особой траекторией, и любой ее участок — не обязательно малый — доставляет слабый минимум задачи (теорема 4.2).

Исходная задача быстродействия преобразуется к задаче на фиксированном отрезке введением дополнительной переменной:

$$\mathcal{J} = z(0) \longrightarrow \min, \quad \dot{z} = 0, \quad \dot{q} = z(f_0(q) + u f_1(q)) \quad t \in [0, t_1]. \quad (22)$$

Полученная задача исследуется на минимум среди всех абсолютно непрерывных  $n$ -мерных вектор-функций  $q(t)$  и измеримых скалярных функций  $u(t)$ . Слабый минимум в задаче (22) задаётся нормой  $|z| + \|x\|_C + \|u\|_\infty$ ; сильный минимум задаётся полунормой  $|z| + \|x\|_C$ .

Траектория задачи (22) обозначена через  $\hat{w}(t) = (\hat{z}(t), \hat{q}(t), \hat{u}(t))$ ,  $t \in [0, t_1]$  (не ограничивая общности, считается  $\hat{z} = 1, t_1 = \hat{T}$ ). Набором множителей Лагранжа называется пара  $\lambda = (\psi, \alpha_0)$ , где липшицева функция  $\psi(t)$  — решение сопряженной системы  $\dot{\psi} = -\psi \hat{f}'_0$  и число  $\alpha_0 \geq 0$  ( $\|\psi\|_C + \alpha_0 \neq 0$ ) таковы, что выполняется условие максимума:

$$\max_{|u| \leq \omega} H[\lambda](\hat{z}, \hat{q}, u) = H[\lambda](\hat{z}, \hat{q}, \hat{u}) = \psi(f_0(\hat{q}) + \hat{u} f_1(\hat{q})) = \frac{\alpha_0}{\hat{T}} \geq 0. \quad (23)$$

Траектория  $\hat{w}$  задачи (22) называется особой, если управление не входит в условие максимума:  $\psi \hat{f}'_1 = 0$ . Порядок особой траектории  $\hat{w}$  равен единице,

если  $\psi[\widehat{f_0, f_1}] = 0$  и  $\psi[f_1, \widehat{[f_0, f_1]}] \neq 0$ .

**Лемма 4.1.** Пусть  $\hat{w}$  — особая траектория задачи (20)–(22) и особое управление внутреннее:  $|\hat{u}| < 1$ . Тогда вторая вариация имеет вид  $\Omega[\lambda](\bar{w}) = -\int_0^{\hat{T}} \left( 2\bar{z}\psi\hat{f}'_0\bar{q} + \psi(\hat{f}''_0\bar{q}, \bar{q}) \right) dt$ , где  $\dot{\bar{z}} = 0$ ,  $\bar{z} \leq 0$  и  $\dot{\bar{q}} = \bar{z} \left( \hat{f}_0 + \hat{u}\hat{f}_1 \right) + \hat{f}'_0\bar{q} + \bar{u}\hat{f}_1$ ,  $\bar{q}(0) = \bar{q}(T) = 0$  — допустимые вариации.

Траектория называется регулярной (нормальной), если существует такой набор множителей Лагранжа  $\lambda = (\psi, \alpha_0)$ , что  $\alpha_0 \neq 0$ . Этот набор определяется функцией  $\psi(t)$  однозначно.

Преобразование Гоха на регулярной особой траектории задачи (20)–(22) может быть записано в виде:  $(\bar{q}, \bar{u}) \mapsto (\bar{\xi}, \bar{v})$ , где  $\bar{\xi} = \bar{q} - \bar{v}\hat{f}_1$ ,  $\dot{\bar{v}} = \bar{u}$ ,  $\bar{v}(0) = 0$ .

**Лемма 4.2.** Пусть  $\hat{w}$  — регулярная особая траектория. Тогда в переменных Гоха допустимые вариации задаются системой  $\dot{\bar{\xi}} = \hat{f}'_0\bar{\xi} - \bar{v}\widehat{[f_0, f_1]}$ ,  $\bar{\xi}(0) = 0$ , и вторая вариация имеет вид

$$\Omega[\psi](\bar{w}) = \int_0^{\hat{T}} \left( -\psi(\hat{f}''_0\bar{\xi}, \bar{\xi}) + 2\bar{v}\psi[\widehat{f_0, f_1}]\bar{\xi} + \bar{v}^2\psi[f_1, \widehat{[f_0, f_1]}] \right) dt. \quad (24)$$

При помощи условий второго порядка [31] доказаны следующие

**Теорема 4.1.** Малые участки любой особой траектории первого порядка доставляют слабый минимум в задаче (20)–(22).

**Теорема 4.2.** Пусть  $\gamma$  — допустимая траектория задачи (20)–(22), принадлежащая поверхности  $\Gamma_k = \{\cos(\theta_k - \theta_{k-1}) = 0\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , и  $\omega > 1$ . Тогда  $\gamma$  является особой траекторией первого порядка и доставляет слабый минимум в задаче (20)–(22).

В случае  $\omega = 1$  кривая  $\gamma \subset \Gamma_n$  доставляет сильный минимум, кривые  $\gamma \subset \Gamma_k$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , как и в теореме 2, доставляют слабый минимум.

В § 4.1 собраны необходимые утверждения, касающиеся задачи быстрого действия для произвольной системы со скалярным управлением, линейно входящим в систему. В § 4.2 рассмотрена кинематическая модель тягача с  $n$

прицепами, приведены необходимые определения и факты, касающиеся распределений Гурса, и даны, доказательства основных результатов (теорем 4.1 и 4.2). В последнем параграфе доказывается оптимальность особых траекторий, отвечающих прямолинейным движениям.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [А4, А5, А10, А34, А32, А33, А38]; среди них работ, выполненных в соавторстве, нет.

Автор признателен чл.-корр. С. М. Асееву, проф. Н. Л. Григоренко, проф. М. И. Зеликину и чл.-корр. В. Н. Ушакову за поддержку и проявленный интерес к работе.

## Список публикаций

- А1. Мельников Н. Б. Локализация невырожденных бифуркаций периодических решений ограниченной задачи трех тел // Вестн. МГУ, Сер. 15 ВМК. 2005. Т. 2. С. 33–38.
- А2. Мельников Н. Б. Существование и единственность функции цены в многомерной модели Рамсея // Вестник МГУ, сер. 15 ВМК. 2005. Т. 3. С. 53–56.
- А3. Melnikov N. B., O'Neill B. C. Learning about the carbon cycle from global budget data // Geophys. Res. Lett. 2006. Vol. 33. P. L02705 (4 pp.).
- А4. Мельников Н. Б. Экстремальные свойства особенностей распределения Гурса // Успехи математич. наук. 2006. Т. 61, № 4. С. 191–192.
- А5. Мельников Н. Б. Оптимальность сингулярных кривых в задаче о тягаче с  $n$  прицепами // Современная математика. Фундаментальные направления. 2006. Т. 19. С. 114–130.

- A6. Давыдов А. А., Мельников Н. Б. Бифуркация Андронова–Хопфа в простых моделях двойной диффузии // Успехи математич. наук. 2007. Т. 62, № 2. С. 175–176.
- A7. Давыдов А. А., Мельников Н. Б. Мягкая потеря устойчивости в блочной модели океанической циркуляции с турбулентными потоками // Труды Математич. инст. им. В. А. Стеклова. 2007. Т. 259. С. 10–19.
- A8. O’Neill B. C., Melnikov N. B. Learning about parameter and structural uncertainty in carbon cycle models // Climatic change. 2008. Vol. 89. P. 23–44.
- A9. Reser B. I., Melnikov N. B. Problem of temperature dependence in the dynamic spin-fluctuation theory for strong ferromagnets // J. Phys.: Condens. Matter. 2008. Vol. 20. P. 285205 (10 pp.).
- A10. Melnikov N. B. Optimality of rectilinear motions in the problem of a tractor with  $n$  trailers // J. Mathem. Sciences. 2009. Vol. 158, no. 2. P. 249–254.
- A11. Reser B. I., Grebennikov V. I., Melnikov N. B. Temperature Hysteresis in the Dynamic Spin-Fluctuation Theory for Strong Ferromagnets // Solid State Phenom. 2009. Vol. 152–153. P. 579–582.
- A12. Reser B. I., Melnikov N. B., Grebennikov V. I. Beyond Gaussian approximation in the spin-fluctuation theory of metallic ferromagnetism // J. Phys.: Confer. Ser. 2010. Vol. 200. P. 012163 (4 pp.).
- A13. Melnikov N. B., Reser B. I., Grebennikov V. I. Spin-fluctuation theory beyond Gaussian approximation // J. Phys. A: Math. Theor. 2010. Vol. 43. P. 195004 (19pp).

- A14. Мельников Н. Б., Резер Б. И. Оптимальное гауссово приближение в теории флуктуирующего поля // Труды Математич. инст. им. В. А. Стеклова. 2010. Т. 271. С. 159–180.
- A15. Melnikov N. B., O’Neill B. C., Dalton M. G. Consumer aggregation in dynamic general equilibrium models with CES utility functions // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 289–296.
- A16. Мельников Н. Б., О’Нилл Б. К., Дальтон М. Г. Учёт неоднородности потребителей в динамических моделях общего экономического равновесия // Математич. теория игр и её приложения. 2010. Т. 2, № 4. С. 52–73.
- A17. Melnikov N. B., Reser B. I., Grebennikov V. I. Extended dynamic spin-fluctuation theory of metallic magnetism // J. Phys.: Condens. Mater. 2011. Vol. 23. P. 276003 (11 pp.).
- A18. Мельников Н. Б. Сингулярные возмущения однократных порождающих орбит ограниченной задачи трех тел // Нелинейная динамика и управление. Вып. 4 / Под ред. С. В. Емельянова, С. К. Коровина. М.: Физматлит, 2004. С. 295–308.
- A19. Melnikova I., Filinkov A., Melnikov N. Price models and equations for the interest rates term structure // Intern. school-symposium “Analysis, modeling, control, development of economical systems”. Sevastopol, Ukrain: 2007. P. 224–228.
- A20. Melnikov N. B., Reser B. I. Instability analysis for the system of nonlinear equations of the dynamic spin-fluctuation theory // Proceedings of Dynamic Systems and Applications. Vol. 5. Atlanta GA, USA: Dynamic Publishers, Inc., 2008. P. 312–316.

- A21. Мельников Н. Б. Непрерывная деформация модели Рамсея к модели с перекрывающимися поколениями // Труды 6-ой всероссийской конф. «Математич. моделирование и краевые задачи». Т. 2. Самара: СамГТУ, 2009. С. 107–110.
- A22. Мельников Н. Б., О'Нилл Б. К., Дальтон М. Г. Учёт неоднородности потребительских предпочтений в моделях экономического роста // Проблемы динамического управления. Вып. 5. / Под ред. Ю. С. Осипова, А. В. Кряжимского. М.: ВМК МГУ, 2010. С. 166–179.
- A23. Резер Б.И. Мельников Н.Б. Программный комплекс "MAGPROP" для расчета магнитных свойств переходных металлов и сплавов в рамках теории спиновых флуктуаций. Отраслевой фонд электронных ресурсов науки и образования. Свидетельство об отраслевой регистрации электронного ресурса № 17257 от 12.07.2011 г.
- A24. Мельников Н. Б. Сингулярные возмущения некоторых порождающих периодических орбит ограниченной задачи трех тел: Деп. ВИНТИ 2257–В2003. М.: МГУ, 2003. (15 с.).
- A25. Melnikov N. Robust stabilization of atmospheric carbon within a family of uncertain carbon cycle dynamics: Interim Report IR-04-053. Laxenburg, Austria: IIASA, 2004. (12 pp.).
- A26. Kryazhimskiy A., Melnikov N. A robust stabilization technique for uncertain models of global carbon cycle // Applied Analysis and Synthesis of Complex Systems / Ed. by T. Sawaragi, K. Tsuchiya, M. Makowski. Interim Report IR-04-072. Laxenburg, Austria: 2004. P. 100–105.
- A27. Davydov A. A., Melnikov N. B. Existence of self-sustained oscillations

in an ocean circulation box model with turbulent fluxes: Interim Report IR-06-049. Laxenburg, Austria: IIASA, 2006. (5 pp.).

A28. Melnikov N. B., Sanderson W. Intergenerational transfers as a link between overlapping generations and Ramsey models: Interim Report IR-07-013. Laxenburg, Austria: IIASA, 2007. (10 pp.).

A29. Melnikov N. B., O'Neill B. C., Dalton M. G. Accounting for the household heterogeneity in general equilibrium models: Interim Report IR-09-051. Laxenburg, Austria: IIASA, 2009. (22 pp.).

A30. Мельников Н. Б. Особенности  $2D$ -многообразия периодических решений ограниченной задачи трех тел // Тезисы всероссийск. конф. «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» / ИММ УрО РАН. Екатеринбург: 2004. С. 199–200.

A31. Мельников Н. Б. Сингулярные возмущения периодических решений ограниченной задачи трех тел // Тезисы всероссийск. конф. «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» / ИММ УрО РАН. Екатеринбург: 2004. С. 354–355.

A32. Melnikov N. B. Optimal singular trajectories for the Goursat distribution // Abstr. Intern. Confer. on Dynamical Systems and Differential Equations / VIGU. Vladimir, Russia: 2006. P. 281–283.

A33. Мельников Н. Б. Оптимальные особые траектории неголономных систем // Progr. и аннот. докл. научн. семинара «Математическая теория оптимального управления и теория дифференциальных включений» / Математич. инст. им. В. А. Стеклова. Москва: 2006. С. 30–31.

A34. Melnikov N. B. Optimality for horizontal paths in the singular locus of

the Goursat distribution // Abstr. Intern. Congress of Mathematicians / European Math. Union. Madrid, Spain: 2006. P. 545.

- A35. Давыдов А. А., Мельников Н. Б. Бифуркация рождения цикла в системе ОДУ с разрывной правой частью // Progr. и аннот. докл. научн. семинара «Математическая теория оптимального управления и теория дифференциальных включений» / Математич. инст. им. В. А. Стеклова. Москва: 2006. С. 15–16.
- A36. Davydov A. A., Melnikov N. B. Limit cycle oscillations in thermohaline circulation box model with turbulent fluxes // Abstracts EQUADIFF / TU. Vienna, Austria: 2007. P. 94.
- A37. Davydov A. A., Melnikov N. B. Limit cycle bifurcation in thermohaline convection box-model // Abstracts of Intern. Confer. “Analysis and singularities” / Steklov Mathematical Institute. Moscow, Russia: 2007. P. 133–134.
- A38. Мельников Н. Б. Особые оптимальные траектории распределений Гурса // Конкурс научных работ молодых учёных МГУ им. М.В. Ломоносова: Сборник рефератов / Под ред. Фомичёв В.В. Ильин А.В. М.: МГУ, 2007. С. 26–28.
- A39. Резер Б. И., Мельников Н. Б. Анализ неустойчивости системы нелинейных уравнений теории спиновых флуктуаций с приложением к инварианту  $\text{Fe}_{0.65}\text{Ni}_{0.35}$  // XXXII Международная зимняя школа физиков-теоретиков «Коуровка», тезисы докладов / ИФМ УрО РАН. Новоуральск, Свердловская обл.: 2008. С. 69.
- A40. Reser B. I., Grebennikov V. I., Melnikov N. B. Temperature hysteresis singularities of hysteresis type in the dynamic spin-fluctuations theory // Ab-

stracts of Moscow International Symposium of Magnetism / MSU. Moscow, Russia: 2008. P. 529–530.

- A41. Melnikov N. B., Reser B. I., Grebennikov V. I. Singularities of hysteresis type in the dynamic spin-fluctuations theory // Abstracts of Intern. Confer. “Differential equations and Topology” / MSU. Moscow, Russia: 2008. P. 269–270.
- A42. Melnikov N. B., Reser B. I. Numerical solution of nonlinear systems in the dynamic spin-fluctuations theory // Abstracts of Intern. Confer. “Algorithmic analysis of unstable problems” / IMM RAS. Ekaterinburg, Russia: 2008. P. 249–250.
- A43. Melnikov N. B., O’Neill B. C., Dalton M. G. Aggregation in dynamic equilibrium models of economic growth with CES functions // Abstracts of Intern. Confer. “Actual Problems of Stability and Control Theory” / IMM RAS. Ekaterinburg, Russia: 2009. P. 176–178.
- A44. Reser B. I., Melnikov N. B., Grebennikov V. I. Beyond Gaussian approximation in the spin-fluctuation theory // Abstracts of Intern. Confer. on Magnetism / KIT. Karlsruhe, Germany: 2009. P. 224.
- A45. Melnikov N. B., Reser B. I., Grebennikov V. I. Dynamic Spin-Fluctuation Theory beyond Gaussian Approximation with Application to FeNi Invar // Abstract of Intern. Confer. EASTMAG-2010: Nanospintronics / Inst. Metal Phys. RAS. Ekaternburg, Russia: 2010. P. 150.

## **Цитированная литература**

1. Мория Т. Спиновые флуктуации в магнетиках с коллективизированными электронами. М.: Мир, 1988.

2. Kehoe T. Computation and multiplicity of equilibria // Ed. by W. Hildenbrand, H. Sonnenschein. North-Holland, 1991. Vol. IV of Handbook of Mathematical Economics. P. 2049–2144.
3. Whitehead J. A. Thermohaline ocean processes and models // Ann. Rev. Fluid Mech. 1996. Vol. 27. P. 89–113.
4. Кон В. Электронная структура вещества — волновые функции и функционалы плотности // Успехи физич. наук. 2002. Т. 172. С. 336–348.
5. Асеев С. М., Кряжимский А. В., Тарасьев А. М. Принцип максимума Понтрягина и условия трансверсальности для одной задачи оптимального управления на бесконечном интервале // Труды Математич. института им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 233. С. 71–88.
6. Kurzhanski A.V., Varaiya P. On reachability under uncertainty // SIAM J. Control. 2002. Vol. 41, no. 1. P. 181–216.
7. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 11. С. 3–161.
8. Demidov A. S., Moussaoui M. An inverse problem originating from magneto-hydrodynamics // Inverse Problems. 2004. Vol. 20, no. 1. P. 137–154.
9. Kryazhimskiy A., Maksimov V. On exact stabilization of an uncertain dynamical system // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. Vol. 12. P. 125–144.
10. Нелинейная динамика. Сборник статей, посвящённый 80-летнему юбилею акад. Н.Н. Красовского // Современная математика. Фундаментальные направления / Под ред. Р.В. Гамкрелидзе. Т. 26. 2005.

11. Vasin V. V., Griбанov K. G., Zakharov V. I., et al. Regular methods of solution of ill-posed problems for remote sensing of Earth atmosphere using high-resolution spectrometry // Proc. SPIE. Vol. 6580. 2006. P. 65800T.
12. Дифференциальные уравнения и топология. Сборник статей, посвящённый 100-летию со дня рождения акад. Л.С. Понтрягина // Труды Математич. института им. В. А. Стеклова / Под ред. Е.Ф. Мищенко. Т. 268, 271. 2008.
13. Datta S.N., Panda A. All-temperature magnon theory of ferromagnetism // J. Phys.: Condens. Matter. 2009. Vol. 21. P. 336003 (14 pp.).
14. O'Neill B. C., Dalton M., Fuchs R. et al. Global demographic trends and future carbon emissions // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 2010. Vol. 107, no. 41. P. 17521–17526.
15. Eliseev A. V., Mokhov I. I. Carbon cycle–climate feedback sensitivity to parameter changes of a zero-dimensional terrestrial carbon cycle scheme in a climate model of intermediate complexity // Theor. Appl. Climatol. 2007. Vol. 89. P. 9–24.
16. Стратонович Р. Л. Об одном методе вычисления квантовых функций распределения // ДАН СССР. 1957. Т. 115, № 6. С. 1097–1100.
17. Hubbard J. Calculation of Partition Functions // Phys. Rev. Lett. 1959. Vol. 3, no. 2. P. 77–78.
18. Kim D. J. New perspectives in magnetism of metals. New York: Kluwer Academic, 1999.
19. Feynman R. P. Slow electrons in a polar crystal // Phys. Rev. 1955. Vol. 97. P. 660–665.

20. Зинн-Жюстен Ж. Континуальный интеграл в квантовой механике. М.: Физматлит, 2006.
21. Reser B. I. Magnetic properties of Fe–Ni invar calculated in the dynamic non-local approximation of the spin fluctuation theory // J. Phys.: Condens. Matter. 2004. Vol. 16. P. 361–371.
22. Crangle J., Hallam G. C. The magnetism of face-centered cubic and body-centered cubic iron-nickel alloys // Proc. R. Soc. A. 1963. Vol. 272. P. 119–132.
23. Dalton M., O’Neill B., Prskawetz A. et al. Population aging and future carbon emissions in the United States // Energy economics. 2008. Vol. 30. P. 642–675.
24. Zigova K., Fuchs R., Jiang L. et al. Household survey data used in calibrating the Population-Environment-Technology model: Interim Report IR–09–046. Laxenburg, Austria: IIASA, 2009. (26 pp.).
25. Welander P. A simple heat-salt oscillator // Dynamics of Atmosphere and Oceans. 1982. Vol. 6. P. 233–242.
26. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
27. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 2-е изд. Ижевск: РХД, 2000.
28. Montgomery R., Zhitomirskii M. Geometric approach to Goursat flags // Ann. Inst. Poincaré Anal. Non Linéaire. 2001. Vol. 12, no. 4. P. 459–493.
29. Bellaïche A., Jean F., J.-J. Risler. Geometry of Nonholonomic Systems // Ed. by J.-P. Laumond. Springer, 1998. Vol. 229 of Lect. Notes in Information and Control Sciences. P. 55–91.

30. Zelikin M. I., Borisov V. F. Theory of Chattering Control. Boston: Birkhäuser, 1994.
31. Dmitruk A.V. Quadratic order conditions of a local minimim for singular extremals in a general optimal control problem // Procs. Symp. Pure Math. “Differential Geometry and Control” / Ed. by Ferreyra G. et al.; AMS. Vol. 64. 1999. P. 163–198.