На правах рукописи

Кукушкина Евгения Викторовна

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2004

Работа выполнена на кафедре теоретической механики Уральского государственного университета им. А.М. Горького

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Долгий Ю.Ф.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Кипнис М.М.

доктор физико-математических наук,
профессор Максимов В.И.

Ведущая организация:

Удмуртский государственный университет

Защита состоится "_22_"__декабря__ 2004 года в _15_ч._00_мин. на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при Уральском государственном университете им. А.М. Горького по адресу:
620083, г.Екатеринбург, пр.Ленина, 51, комн.248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета им. А.М. Горького.

Автореферат разослан "_20_"__ноября___ 2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук,
профессор _____________ Пименов В.Г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Интерес к разностным уравнениям с дискретным аргументом стимулируется вопросами математического моделирования в различных областях естествознания и проблемами теоретического обоснования вычислительных алгоритмов. Фундаментальные основы теории этих уравнений изложены в монографиях А.О. Гельфонда, А. Халаная и Д. Векслера, Д.И. Мартынюка, И.В. Гайшуна, А.М. Самарского. Исследования разностных уравнений с дискретным аргументом продолжаются и в наши дни. Развитие теории разностных уравнений с непрерывным аргументом стимулируется потребностями математического моделирования и проблемами, связанными с нахождением решений функциональных уравнений, которые возникают в ходе изучения различных математических объектов. Исследования разностных уравнений установили их тесную связь с дифференциально-разностными уравнениями. Основные положения теории этих уравнений изложены в монографиях Н.В. Азбелева, В.П. Максимова и Л.Ф. Рахматуллиной, Р. Беллмана и К.Л. Кука, В.Б. Колмановского и В.Р. Носова, Н.Н. Красовского, А.Д. Мышкиса, Дж. Хейла, Л.Э. Эльсгольца и С.Б. Норкина, С.Н. Шиманова. Поэтому терминология и методология исследования последних уравнений была использована для разностных уравнений. Наиболее изученным объектом являются разностные уравнения с постоянными отклонениями аргументов. Им посвящены работы А.Б. Антоневича, М.Г. Близорукова, М.М. Кипниса, В.Г. Курбатова, А.А. Миролюбова, Г.П. Пелюха, Е.Ю. Романенко, М.А. Солдатова, А.Н. Шарковского, J.M. Ferreira и других авторов. Для данного класса систем получены условия существования решений разной степени гладкости, найдены представления общего решения линейной неоднородной системы и разработаны методы исследования устойчивости. Разностные уравнения с переменными отклонениями аргументов называют также функциональными уравнениями. Проблема существования и представления решений для них является достаточно сложной. Она изучалась в работах Л.П. Кучко, В.В. Митюшева, Г.П. Пелюха, M. Kuczma и других. Разностные уравнения с распределенными отклонениями аргументов изучены плохо. В настоящей работе мы называем их функционально-разностными по аналогии с функционально-дифференциальными уравнениями. Такие объекты привлекали внимание исследователей в ходе изучения математических моделей, описываемых интегральными уравнениями Вольтерры и функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа.

В работах J. Hale и D. Henry установлена связь линейных стационарных функционально-разностных уравнений с теорией сильно непрерывных полугрупп и доказано утверждение, позволяющее делать заключение об устойчивости нулевого решения на основе анализа расположения корней характеристического уравнения.

Объектом исследования настоящей работы является линейная система функционально-разностных уравнений.

Цель работы. Предложить методы построения общего решения линейной системы функционально-разностных уравнений в стационарном и нестационарном случаях. Полученные результаты использовать при исследовании устойчивости рассматриваемых систем.

Методы исследования. Методы исследования данной работы основаны на результатах таких направлений науки, как теория разностных и функционально-дифференциальных уравнений, функциональный анализ и теория устойчивости движения. При нахождении аналитического представления общего решения системы функционально-разностных уравнений основным является результат о виде линейного непрерывного оператора в пространстве непрерывных функций. При исследовании устойчивости решений основными являются понятия эволюционного оператора и оператора монодромии.

Научная новизна. Результаты, представленные в диссертации, являются новыми и позволяют находить решения начальной задачи Коши для систем функционально-разностных уравнений, а также устанавливать условия устойчивости решений этих уравнений. На защиту выносятся следующие результаты:

1) установлены условия существования и единственности непрерывных решений начальной задачи Коши для стационарных и нестационарных систем функционально-разностных уравнений;

2) получены аналитические представления общих решений стационарных и нестационарных систем функционально-разностных уравнений;

3) разработаны методы нахождения функциональных зависимостей, определяющих аналитические представления общих решений;

4) в функциональном пространстве состояний введены понятия эволюционного оператора, оператора монодромии и доказаны общие утверждения об устойчивости решений функционально-разностных систем;

5) найдены условия устойчивости решений для некоторых классов функционально-разностных систем.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для исследования конкретных функционально-разностных уравнений, в том числе на устойчивость, и дальнейшего развития теории функционально-разностных уравнений, а также в качестве лекций специального курса.

Апробация работы. Основные результаты работы обсуждались и докладывались на 4-й международной конференции молодых ученых и студентов "Актуальные проблемы современной науки"(Самара, 2003); Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения–XIII"(2002), "Понтрягинские чтения – XIV"(2003), "Понтрягинские чтения – XV"(2004); XXVI конференции молодых ученых математико–механического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2004); Всероссийской конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач"(Екатеринбург, 2004); семинаре кафедры теоретической механики математико-механического факультета УрГУ им. А.М. Горького (Екатеринбург, 1998-2004).

Публикации. Основные результаты диссертации представлены в работах [1]–[9].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 92 наименования, общий объем – 112 страниц печатного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении сделан краткий обзор литературы по теме диссертации, обоснована актуальность исследуемой проблемы и изложены основные результаты данной работы.

Глава 1 посвящена изучению линейных систем стационарных функционально-разностных уравнений

$$x(t) = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(\vartheta)\, x(t+\vartheta) + h(t), \tag{1}$$

где $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, матричная функция η имеет ограниченную вариацию на $[-r, 0]$, $\eta(0) = \eta(-0) = 0$.

В настоящей главе описаны основные идеи и методы, используемые при построении общего решения линейной неоднородной системы функционально-разностных уравнений в стационарном варианте. При реализации их в нестационарном варианте в главе 2 технические построения усложняются и суть этих идей и методов становится менее прозрачной. Стационарность позволяет также описать дополнительные свойства решений функционально-разностных уравнений.

В параграфе 1.1 доказана теорема о существовании и единственности решения начальной задачи Коши для системы (1). Метод доказательства традиционен для эволюционных систем. Он использует принцип сжатых отображений и вольтерровость по А.Н. Тихонову оператора, определяющего правую часть системы (1). Наличие условия согласования требует специального преобразования исходной системы.

В стационарном случае можно получить большую гладкость решений при $h \in \mathbb{C}^m([0,+\infty), \mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathbb{C}^m([-r,0], \mathbb{R}^n)$, если наложить следующие условия согласования

$$\varphi^{(k)}(0) = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(\vartheta)\, \varphi^{(k)}(\vartheta) + h^{(k)}(0), \quad 0 \le k \le m. \tag{2}$$

Предложение 1.1. *Пусть h и φ – m-раз непрерывно дифференцируемые функции, выполнены условия согласования (2), матричная функция η имеет ограниченную вариацию на $[-r,0]$ и $\eta(0) = \eta(-0) = 0$. Тогда существует единственное m-раз непрерывно дифференцируемое решение системы (1).*

В параграфе 1.2 получено представление решений стационарных функционально-разностных уравнений. При нахождении этого представления используется вид линейного непрерывного оператора в пространстве непрерывных функций.

В параграфе 1.3 получены уравнения для нахождения функций S и T, определяющих представление общего решения линейных стационарных уравнений. При нахождении функций S и T, путем подстановки представления решения в уравнение (1), в ходе вычисления появляются интегралы Лебега-Стилтьеса, что значительно осложняет техническую сторону проблемы. В работе предлагается при нахождении S и T использовать системы с гладкими h и решения с гладкими φ. Это позволяет проводить вычисления, используя интегралы Римана-Стилтьеса.

В **главе 2** исследуются линейные системы нестационарных функционально-разностных уравнений

$$x(t) = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta)\, x(t+\vartheta) + h(t), \tag{3}$$

где $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $h \in \mathbb{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$; матричная функция $\eta(t,\cdot)$ при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-r,0]$, $\eta(t,0) = 0$.

Для указанной системы изучается начальная задача Коши в пространстве непрерывных функций. Пусть начальный момент $t_0 \in \mathbb{R}$ и начальная функция $\varphi \in \mathbb{C}\left([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n\right)$. Функция $x \in \mathbb{C}\left([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n\right)$ является решением начальной задачи Коши, если для нее равенство (3) выполняется тождественно на полуоси $(t_0, +\infty)$ и $x(t) = \varphi(t)$ при $t \in [t_0 - r, t_0]$.

Для существования непрерывного решения начальной задачи Коши необходимо, чтобы выполнялось условие согласования

$$\varphi(t_0) = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t_0, \vartheta)\, \varphi(t_0 + \vartheta) + h(t_0). \tag{4}$$

Условие (4) при заданной функции h накладывает ограничения на выбор начальной функции φ.

В параграфе 2.1 доказана теорема об условиях существования и единственности решения начальной задачи Коши для системы (3).

Теорема 2.1. *Пусть* $h \in \mathbb{C}\left([t_0, +\infty), \mathbb{R}^n\right)$, $\varphi \in \mathbb{C}\left([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n\right)$, *выполнено условие согласования (4) и*

1) функция $\operatorname*{var}\limits_{z \in [-r, 0]} \eta(t, z)$ *ограничена на любом отрезке числовой оси,*

2) отображение $t \to \eta(t, -r)$ *непрерывно на числовой оси,*

3) для любого $\tau \in \mathbb{R}$ *отображение* $t \to \int_{t-r}^{\tau} \eta(t, s - t)\, ds$ *непрерывно на любом отрезке числовой оси,*

4) $\operatorname*{var}\limits_{z \in [-\Delta, 0]} \eta(t, z) \to 0$ *при* $\Delta \to 0$ *равномерно по* t *на любом конечном отрезке числовой оси.*

Тогда начальная задача Коши для системы (3) имеет единственное непрерывное решение.

Приведены примеры, в которых показана существенность требований теоремы 2.1 относительно зависимости η от t.

В параграфе 2.2 получено представление решения начальной задачи Коши для системы нестационарных функционально-разностных уравнений (3).

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда непрерывное решение начальной задачи Коши системы (3) допускает представление*

$$x(t) = \int_{t_0 - r}^{t_0} dT(t, s, t_0)\, \widetilde{\varphi}(s) + \int_{t_0}^{t} dS(t, s)\, \widetilde{h}(s) + \left(V(t, t_0) + I_n\right) \varphi(t_0), \tag{5}$$

где $t \geq t_0$, $\widetilde{\varphi}(s) = \varphi(s) - \varphi(t_0)$, $s \in [t_0 - r, t_0]$; $\widetilde{h}(t) = h(t) - h(t_0)$, $t \geq t_0$; $T(t, t_0 - r, t_0) = 0$ *при* $t \geq t_0$; $T(t_0, s, t_0) = 0$ *при* $s \in [t_0 - r, t_0]$; $S(t, s) = 0$ *при* $t \leq s$; *при любом* $\tau > t_0$ *выполняются неравенства* $\sup\limits_{t \in [t_0, \tau)} \mathop{var}\limits_{t_0 - r \leq s \leq t_0} T(t, s, t_0) < \infty$, $\sup\limits_{t \in [t_0, \tau]} \mathop{var}\limits_{t_0 \leq s \leq t} S(t, s) < \infty$, *при любом*

$\tau > t_0$ и любом $0 \le r' < r$ функции $\int_{t_0}^{\tau} S(t,s)\,ds$ и $\int_{t_0-r}^{t_0-r'} T(t,s,t_0)\,ds$ непрерывны по t на полуинтервале $[t_0,\infty)$; $V(t_0,t_0)=0$ и функция $V(t,t_0)$ непрерывна по t на полуоси $[t_0,\infty)$.

В параграфе 2.3 получены уравнения для нахождения функций S, T и V. При выполнении условий теоремы 2.1 функция S является решением уравнения

$$S(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-r}^{0} d_{\vartheta}\eta(t,\vartheta)\int_{t}^{\tau} S(t+\vartheta,s)\,ds - I_n, \quad t>\tau,$$

с начальным условием $S(t,\tau)=0$ при $t\le\tau$.

Установлена связь между функциями S и V:

$$V(t,t_0) = -S(t,t_0)\,\eta(t_0,-r) - \int_{t_0}^{t} dS(t,s)\,\eta(s,-r), \quad t>t_0,$$

и между функциями S и T:

$$T(t,s,t_0) = \frac{\partial}{\partial s}\int_{t_0}^{s+r} dS(t,\xi)\int_{-r}^{s-\xi}\left[\eta(\xi,\vartheta)-\eta(\xi,-r)\right]d\vartheta +$$
$$+S(t,t_0)\left(\eta(t_0,s-t_0)-\eta(t_0,-r)\right), \quad t>t_0, \quad s\in[t_0-r,t_0].$$

Получены уравнения для функции T из представления (5):

$$T(t,\tau,t_0) = \frac{d}{d\tau}\int_{-r}^{0} d_{\vartheta}\eta(t,\vartheta)\int_{t_0-r}^{\tau} T(t+\vartheta,s,t_0)\,ds +$$
$$+\left[\eta(t_0,-r)-\eta(t_0,\tau-t_0)\right], \quad \tau\in[-r,0], \quad t\ge t_0+r,$$

$$T(t,\tau,t_0) = \frac{d}{d\tau}\int_{-r}^{0} d_{\vartheta}\eta(t,\vartheta)\int_{-r}^{\tau} T(t+\vartheta,s,t_0)\,ds + \eta(t,-r)-\eta(t,\tau),$$
$$\tau\in(-r,t-r), \quad t\in(t_0,t_0+r),$$

$$T(t,\tau,t_0) = \frac{d}{d\tau}\int_{-r}^{0} d_{\vartheta}\eta(t,\vartheta)\int_{-r}^{\tau} T(t+\vartheta,s,t_0)\,ds + \eta(t,\tau-r)-\eta(t,\tau),$$
$$\tau\in(t-r,0), \quad t\in(t_0,t_0+r).$$

Изменение порядка дифференцирования и интегрирования в формулах для нахождения S и T обосновано в следующих случаях:

1) η – абсолютно непрерывная функция аргумента ϑ;

2) η – ступенчатая функция аргумента ϑ с конечным числом точек разрыва;

3) η представима в виде суммы абсолютно непрерывной и ступенчатой функций.

Условия корректной продолжимости решения системы однородных функционально-разностных уравнений на всю числовую ось изучаются в параграфе 2.4.

В параграфе 2.5 устанавливается связь системы функционально-разностных уравнений с системой функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов.

Утверждение 2.10. *Пусть почти при всех $s,\ t \in \mathbb{R}$ существует производная $\dfrac{d\eta\left(t,s-t\right)}{dt}$ $\left(\dfrac{d\eta\left(t,s-t\right)}{dt} = \dfrac{\partial\eta\left(t,z\right)}{\partial t}\ |_{z=s-t} - \dfrac{\partial\eta\left(t,z\right)}{\partial z}\ |_{z=s-t}\right)$, измеримая и локально ограниченная по совокупности аргументов в области $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, а также существует матрица $\left(I_n+\eta\left(t,-r\right)\right)^{-1}$. Тогда решение начальной задачи Коши $x\left(t,t_0,\varphi\right)$, $t \geq t_0-r$, системы (3) при $h=0$ с абсолютно непрерывной начальной функцией φ, для которой выполняется условие согласования (4), является локально абсолютно непрерывной функцией на $[t_0-r,+\infty)$ и удовлетворяет при $t>t_0$ системе дифференциальных уравнений нейтрального типа*

$$\dot{x}\left(t\right)=\frac{\partial\eta\left(t,-r\right)}{\partial t}\left(I_n+\eta\left(t,-r\right)\right)^{-1}\int_{t-r}^{t}\left(I_n+\eta\left(t,s-t\right)\right)\dot{x}\left(s\right)ds-$$
$$-\int_{t-r}^{t}\frac{d\eta\left(t,s-t\right)}{dt}\dot{x}\left(s\right)ds+\int_{t-r}^{t}d\eta\left(t,s-t\right)\dot{x}\left(s\right).$$

Глава 3 посвящена исследованию устойчивости систем функционально-разностных уравнений. В параграфе 3.1 рассматривается стационарная система функционально-разностных уравнений (1) при $h=0$. Она порождает сильно непрерывную полугруппу операторов $\{\mathbb{T}\left(t\right),\quad t\geq 0\}$. Определен инфинитезимальный оператор данной полугруппы операторов и его спектр.

Теорема[1]. *Если функция η не имеет сингулярной части, то для экспоненциальной устойчивости системы (1) при $h=0$ по отношению к возмущениям из $\widetilde{\mathbb{C}}$ необходимо и достаточно, чтобы существовало $\delta>0$, для которого корни характеристического уравнения* $\det\left(\int_{-r}^{0}d\eta\left(\vartheta\right)e^{\lambda\vartheta}-I_n\right)=0$ *лежали в области* $\{\lambda\colon\ \mathrm{Re}\,\lambda\leq-\delta,\quad\lambda\in\mathbf{C}\}$.

Функция η не имеет сингулярной части, если $\int_{-r}^{0}d\eta\left(\vartheta\right)\varphi\left(\vartheta\right) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k\varphi\left(-r_k\right)+\int_{-r}^{0}A\left(\vartheta\right)\varphi\left(\vartheta\right)d\vartheta$, где $0<r_k\leq r$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k<\infty$ и A – интегрируемая по Лебегу функция на $[-r,0]$.

[1] Henry D. Linear autonomous neutral functional differential equations // J. Diff. Eq. 1974. V.15. N 1. P.106–128.

В этой теореме накладываются ограничения на функцию η. Если отказаться от этих ограничений, то можно доказать аналогичную теорему для возмущений начальных функций из множества $D\left(\mathcal{A}^2\right)$.

Для систем функционально-разностных уравнений, приведенных в конце параграфа, найдены области устойчивости. При построении областей устойчивости использовался метод Д-разбиения, а при компьютерной реализации этого метода – пакет Maple.

Параграф 3.2 посвящен исследованию устойчивости нестационарных систем функционально-разностных уравнений (3) при $h = 0$.

В качестве элемента решения будем рассматривать его отрезок $x_t(\vartheta, t_0, \varphi_{t_0}) = x(t+\vartheta, t_0, \varphi_{t_0})$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $t \geq t_0$. Этот элемент $x_t \in \widetilde{\mathbb{C}}_t([-r, 0], \mathbb{R}^n) = \left\{x_t : \ x_t \in \mathbb{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n), \quad x_t(0) = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t, \vartheta) x_t(\vartheta)\right\}$. Его можно рассматривать как образ элемента φ_{t_0} при некотором отображении:

$$x_t(\vartheta, t_0, \varphi_{t_0}) = (\mathbb{T}(t, t_0)\varphi_{t_0})(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad t \geq t_0,$$

где $\mathbb{T}(t, t_0) : \ \widetilde{\mathbb{C}}_{t_0}([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to \widetilde{\mathbb{C}}_t([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

Теорема 3.5. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Для устойчивости системы (3) при $h = 0$ необходимо и достаточно, чтобы* $\sup\limits_{t > t_0} \|\mathbb{T}(t, t_0)\| < \infty$.

Для асимптотической устойчивости системы (3) при $h = 0$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{t \to \infty} \|\mathbb{T}(t, t_0)\| = 0$.

Для экспоненциальной устойчивости системы (3) при $h = 0$ необходимо и достаточно, чтобы существовали положительные числа K и α, такие что $\|\mathbb{T}(t, t_0)\| \leq K e^{-\alpha(t - t_0)}, \quad t \geq t_0$.

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и существует такое $t_1 > t_0$, что $\sup\limits_{t \geq t_1} \operatorname*{var}\limits_{\vartheta \in [-r, 0]} \eta(t, \vartheta) < 1$. Тогда система (3) при $h = 0$ экспоненциально устойчива.*

В параграфе 3.3 исследуется устойчивость периодических нестационарных систем функционально-разностных уравнений, когда η – ω-периодическая функция по первому аргументу с периодом $\omega \geq r$. Эволюционные операторы таких систем обладают свойством:

$$\mathbb{T}(t + n\omega, t_0) = \mathbb{T}(t, t_0)\, \mathbb{T}^n(t_0 + \omega, t_0), \ t \geq t_0,$$

где n – целое положительное число. Оператор монодромии $U(t_0) = \mathbb{T}(t_0 + \omega, t_0) : \ \widetilde{\mathbb{C}}_{t_0}([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to \widetilde{\mathbb{C}}_{t_0}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ является ограниченным.

Представление оператора $U(t_0)$ задается формулой

$$(U(t_0)\varphi_{t_0})(\vartheta) = \int_{-r}^{0} dT(t_0+\omega+\vartheta, t_0+\xi, t_0)\varphi_{t_0}(\xi) +$$
$$+ (V(t_0+\omega+\vartheta, t_0) - T(t_0+\omega+\vartheta, t_0, t_0) + I_n)\varphi_{t_0}(0), \quad -r \le \vartheta \le 0.$$

Теорема 3.8. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Периодическая система (3) при $h = 0$ экспоненциально устойчива, если радиус спектра оператора монодромии меньше единицы.*

Исследованы некоторые классы периодических систем функционально-разностных уравнений.

Для системы

$$x(t) = B(t)\,x(t-\tau),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, B – ω-периодическая матрица, элементы которой являются непрерывными функциями, $\det B(t) \neq 0$, *$t \in \mathbb{R}$, $\tau = \frac{\omega}{m}$, где m – натуральное число*, найдены спектральное и регулярное множества оператора монодромии. Указаны необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения.

Для скалярного уравнения

$$x(t) = b(t)\,x(h(t)),$$

где b – ω–периодическая функция с непрерывной производной, $b(t) \neq 0$, $h(t) = t - \tau(t)$, $t \in \mathbb{R}$, τ – непрерывная ω–периодическая функция, $0 < \tau(t) < \omega$ и имеет непрерывную производную $\dot{\tau}(t) < 1$ при $0 < t < \omega$, $\tau(0) = \omega$, $\dot{\tau}(+0) < 0$, $\dot{\tau}(-0) > 0$, построен оператор монодромии, а для него – спектральное и резольвентное множества. Для экспоненциальной устойчивости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы $|b(0)| < 1$.

Рассмотрена система

$$x(t) = B(t)\,x(h(t)), \tag{6}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, B – непрерывная ω-периодическая матричная функция, $\det B(t) \neq 0$ *при $t \in [0, \omega]$, $h(t) = t - \tau(t)$, τ – абсолютно непрерывная ω-периодическая функция с почти всюду ограниченной производной, $0 < \tau(t) \le \omega$, $\dot{\tau}(t) < 1$.*

Для произвольного начального момента t_0 указано представление оператора монодромии

$$(U\varphi)(\vartheta) = D(\vartheta)\,\varphi(u(\vartheta)),\ \vartheta \in [h(t_0), t_0],$$

где

$$D(\vartheta) = \begin{cases} B(\vartheta)\ldots B\left(h^{(m-2)}(\vartheta)\right),\ \vartheta \in [h(t_0), \vartheta_0), \\ B(\vartheta)\ldots B\left(h^{(m-1)}(\vartheta)\right),\ \vartheta \in [\vartheta_0, t_0], \end{cases}$$

$$u(\vartheta)=\left\{\begin{array}{c} h^{(m-1)}(\omega+\vartheta),\ \vartheta\in[h(t_0),\vartheta_0),\\ h^{(m)}(\omega+\vartheta),\ \vartheta\in[\vartheta_0,t_0],\end{array}\right.$$

и $\vartheta_0=h^{(-m+1)}(t_0)-\omega$, m – некоторое натуральное число, $h^{(k)}$ (k – целое число) – k-я итерация функции h. Пусть существует такое действительное число t_0, что $u^{(2)}(\vartheta_0)=\vartheta_0$. Предполагается, что собственные числа матрицы $Q(\vartheta_0)=D(\vartheta_0)D(u(\vartheta_0))$ имеют различные модули. Занумеруем их в порядке возрастания модулей, то есть $|\rho_1|<...<|\rho_n|$. С помощью методики работы[2] доказано утверждение.

Утверждение 3.3. *Пусть B – непрерывная ω-периодическая матричная функция,* $\det B(t)\neq 0$ *при* $t\in[0,\omega]$, $h(t)=t-\tau(t)$, τ *– абсолютно непрерывная ω-периодическая функция с почти всюду ограниченной производной,* $0<\tau(t)\leq\omega$, $\dot\tau(t)<1$, $u^{(2)}(\vartheta_0)=\vartheta_0$, $\vartheta_0=h^{(-m+1)}(t_0)-\omega$. *Тогда значения $\rho\in C$: $|\rho_k|<|\rho|<|\rho_{k+1}|$, $1\leq k<n$, $|\rho|<|\rho_1|$, $|\rho|>|\rho_n|$ являются регулярными точками оператора U. Значения $\rho\in C$: $|\rho|=|\rho_k|$, $\rho\neq\rho_k$, $1\leq k\leq n$, являются точками остаточного спектра оператора U.*

Для экспоненциальной устойчивости системы (6) необходимо и достаточно, чтобы $|\rho_n|<1$.

В параграфе 3.4 исследуется устойчивость динамических процессов в математической модели производства товаров, предложенной в работе[3]. Модель описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} &m(t)=\int_{a(t)}^{t}\alpha(\tau,t)\,y(\tau)\,m(\tau)\,d\tau,\\ &p(t)=\int_{a(t)}^{t}m(\tau)\,d\tau,\quad t>t_0.\end{aligned}\tag{7}$$

Значение $m(t)$ определяет в момент времени t скорость изменения количества новых продуктов; $a(t)$ – некий временной порог: все продукты, созданные ранее этого порога, в момент t не используются, а созданные после этого срока, используются на 100%; $y(t)$ – распределительная функция; $p(t)$ – количество функционирующих продуктов в момент времени t. Коэффициент $\alpha(\tau,t)$ характеризует скорость создания новых продуктов в момент t в расчете на единицу этих продуктов для момента τ. В системе (7) y, p, α – заданные непрерывные неотрицательные функции в областях $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ соответственно.

Под решением системы (7) понимается совокупность непрерывных функций m и a, определенных на полуинтервале $[t_0-r,+\infty)$, $r>0$, и удовлетворяющих системе (7) при $t>t_0$. На начальном множестве $[t_0-r,t_0]$

[2]Долгий Ю.Ф. Свойства оператора монодромии периодической системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Изв. вузов. Математика. 1988. N 9. С.23–30.

[3]Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983.

функции m и a задаются специальным образом. Предполагается также, что для любого решения удовлетворяются условия $m(t) > 0$, $r \geq t - a(t) > 0$ при $t \in [t_0 - r, +\infty)$.

Пусть задано некоторое непрерывное решение $m_0(t), a_0(t)$, $t \in [t_0 - r, +\infty)$ системы (7). Предполагаем, что $\inf\limits_{t \geq t_0 - r} m_0(t) > 0$, $a_0(t) = t - \tau_0(t)$, где $\inf\limits_{t \geq t_0 - r} \tau_0(t) > 0$, $\sup\limits_{t \geq t_0 - r} \tau_0(t) \leq r$. При изучении устойчивости этого решения используется система линейного приближения для возмущенного движения

$$\overline{m}(t) = \int_{a_0(t)}^{t} \left[\alpha(\tau, t)\, y(\tau) - \alpha(a_0(t), t)\, y(a_0(t))\right] \overline{m}(\tau)\, d\tau, \tag{8}$$

$$\overline{a}(t) = \frac{1}{m_0(a_0(t))} \int_{a_0(t)}^{t} \overline{m}(\tau)\, d\tau. \tag{9}$$

Система (8), (9) может быть описана в форме (3) при $h = 0$, если положить $x = (\overline{m}, \overline{a})^{\top}$, $\eta_{11}(t, \tau) = \int_t^{\tau + t} \left[\alpha(s, t)\, y(s) - \alpha(a_0(t), t)\, y(a_0(t))\right] ds$, $-\tau_0(t) \leq \tau \leq 0$, $\eta_{11}(t, \tau) = \eta_{11}(t, -\tau_0(t))$, $-r \leq \tau < -\tau_0(t)$, $\eta_{12}(t, \tau) = 0$, $-r \leq \tau \leq 0$, $\eta_{22}(t, \tau) = \frac{1}{m_0(a_0(t))}\tau$, $-\tau_0(t) \leq \tau \leq 0$, $\eta_{22}(t, \tau) = \eta_{22}(t, -\tau_0(t))$, $-r \leq \tau < -\tau_0(t)$, $\eta_{21}(t, \tau) = 0$, $-r \leq \tau \leq 0$.

Здесь выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения начальной задачи Коши. Уравнение (8) можно рассматривать независимо от уравнения (9). Для решения системы (8), (9) имеет место неравенство

$$|\overline{a}(t)| \leq \frac{r}{\inf\limits_{t \geq t_0 - r} m_0(t)} \sup_{t \geq t_0 - r} |\overline{m}(t)|, \quad t > t_0.$$

Тогда из устойчивости, асимптотической или экспоненциальной устойчивости уравнения (8) по отношению к возмущениям из пространства $\widetilde{\mathbb{C}}([-r, 0], \mathbb{R})$ следует соответствующая устойчивость системы (8), (9) по отношению к возмущениям из пространства $\widetilde{\mathbb{C}}\left([-r, 0], \mathbb{R}^2\right)$. Поэтому в дальнейшем рассматривается задача устойчивости для уравнения (8).

Утверждение 3.4. *Пусть задано некоторое непрерывное решение* $m_0(t)$, $a_0(t)$, $t \in [t_0 - r, +\infty)$, $\inf\limits_{t \geq t_0 - r} m_0(t) > 0$, $\inf\limits_{t \geq t_0 - r} \tau_0(t) > 0$, $\sup\limits_{t \geq t_0 - r} \tau_0(t) \leq r$.

Тогда уравнение (8) экспоненциально устойчиво по отношению к возмущениям начальных функций из пространства $\widetilde{\mathbb{C}}([-r, 0], \mathbb{R})$, *если существует* $T > t_0$, *для которого*

$$\sup_{t \geq T} \int_{t - \tau_0(t)}^{t} \left[\alpha(s, t)\, y(s) - \alpha(t - \tau_0(t), t)\, y(t - \tau_0(t))\right] ds < 1.$$

Далее рассматривается стационарная модель, когда $y(t) = y_0 = const$, $p(t) = p_0 = const$, $\alpha(\tau, t) = \alpha(\tau - t)$, $-\infty < \tau \le t < +\infty$, $\alpha(s) = \alpha_0 - \alpha_1 s$, $s \le 0$, $\alpha_0, \alpha_1 > 0$. Характеристическое уравнение стационарной модели имеет вид

$$\frac{\mu}{\lambda^2}\left(e^{-\lambda r} - 1\right) + \frac{\mu r}{\lambda} + 1 = 0, \quad \lambda \neq 0, \quad \mu = \alpha_1 y_0.$$

Найдены области устойчивости, при построении которых использовался метод Д-разбиения, а при компьютерной реализации этого метода – пакет Maple.

Рассмотрена периодическая модель, когда $\alpha(\tau, t) = \mu = const > 0$, $p(t) = p_0 = const > 0$, $t \in \mathbb{R}$, y – непрерывная положительная $r-$периодическая функция, тождественно не равная постоянной. Система уравнений (7) имеет решение $m_0(t) = \dfrac{p_0}{r}$, $a_0(t) = t - r$, $t \in \mathbb{R}$.

Получен следующий результат: ненулевое число $\rho \in C$ является собственным числом оператора монодромии уравнения (8) тогда и только тогда, когда число $z = \rho^{-1} \neq 1$ является собственным числом краевой задачи

$$J\frac{dx}{d\vartheta} = (H_1(\vartheta, \mu) + zH_2)\, x, \quad x(-r) = zx(0), \tag{10}$$

где $x = (x_1, x_2)^\top$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_1(\vartheta, \mu) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\mu dy(\vartheta)/d\vartheta \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Phi(\vartheta, z, \mu)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, – фундаментальная матрица системы (10), $\Phi(-r, z, \mu) = I_2$, $z \in C$, $\mu > 0$, I_2 – единичная матрица. Характеристическое уравнение краевой задачи (10) имеет вид

$$D(z, \mu) = z^2 - 2zA(z, \mu) + 1 = 0, \tag{11}$$

где $A(z, \mu) = (\varphi_{11}(0, z, \mu) + \varphi_{22}(0, z, \mu))/2$, $\Phi(\vartheta, z, \mu) = \|\varphi_{ij}(\vartheta, z, \mu)\|_1^2$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $z \in C$, $\mu > 0$. Значения параметра μ, при которых корни характеристического уравнения (11) пересекают единичную окружность, определяются из уравнения

$$A(-1, \mu) = -1, \quad \mu > 0. \tag{12}$$

Теорема 3.13. *Пусть наименьший положительный корень $\mu = \mu_*$ уравнения (12) простой. Тогда при $0 < \mu < \mu_*$ уравнение (8) экспоненциально устойчиво по отношению к возмущениям из пространства $\widetilde{\mathbb{C}}[-r, 0]$, а при $\mu > \mu_*$ неустойчиво.*

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Кукушкина Е.В. Существование решения линейной системы функционально-разностных уравнений // Современные методы теории краевых задач. Материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения – XIII". Воронеж. 2002. С.90.

2. Долгий Ю.Ф., Кукушкина Е.В. Представления решений стационарных функционально-разностных уравнений // Изв. Уральск. ун-та. 2002. N 22. Вып.4. С.62–80.

3. Долгий Ю.Ф., Кукушкина Е.В. Общий вид решения нестационарной системы функционально-разностных уравнений // Изв. вузов. Математика. 2003. N 7. С.27–34.

4. Кукушкина Е.В. Существование и единственность решения линейной системы функционально-разностных уравнений // Современные методы теории краевых задач. Материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения – XIV". Воронеж. 2003. С.71–72.

5. Кукушкина Е.В., Долгий Ю.Ф. Представления решений нестационарных функционально-разностных уравнений // Актуальные проблемы соврем. науки. Естеств. науки. Математика. Труды 4-й международной конф. молодых ученых и студентов. Самара. 2003. С.46–48.

6. Кукушкина Е.В. Общий вид решения нестационарной системы функционально-разностных уравнений // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2004. N 2. С.1–34.

7. Кукушкина Е.В. О продолжимости решений системы функционально-разностных уравнений // XXVI Конференция молодых ученых мат.-мех. ф-та МГУ им. М.В. Ломоносова. Тез. докл. Москва. 2004. С.68.

8. Кукушкина Е.В. Устойчивость стационарных систем функционально-разностных уравнений // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тез. докл. Всероссийской конференции. Екатеринбург. 2004. С.182–183.

9. Кукушкина Е.В. Об устойчивости периодических систем функционально-разностных уравнений // Современные методы теории краевых задач. Материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения – XV". Воронеж. 2004. С.126.

Подписано в печать 16.11.04. Формат 60×80 1/16.
Бумага типографская. Усл. печ. л. 1.
Тираж 100 экз. Заказ N _19_. Печать офсетная.
Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 137,
копицентр "Копирус"