

## Калибровочная теория взаимодействия элементарных частиц

*Л. Д. Фаддеев*

Важнейшим достижением самого фундаментального раздела физики – теории элементарных частиц – стало создание единой теории взаимодействий, основанной на калибровочном принципе эквивалентности. Это стало возможным благодаря взаимному влиянию больших коллективов физиков-экспериментаторов в области физики высоких энергий, групп теоретиков-феноменологов и небольшой компании абстрактных теоретиков, разрабатывающих математические подходы.

Физика всегда была в той или иной мере связана с геометрией. В XIX в. Лобачевский и Риман предсказывали, что законы физики получают окончательную формулировку в геометрических понятиях. Однако впервые геометрия вошла в физику существенным образом в теории тяготения Эйнштейна, созданной в 1916 г. Этому предшествовало изменение понимания роли локальных полей и структуры пространства-времени, начатое Максвеллом и нашедшее окончательную формулировку в специальной теории относительности Лорентца–Пуанкаре–Эйнштейна в самом начале XX в. В теории тяготения Эйнштейна гравитационное поле описывается псевдоримановым тензором, задающим метрику пространства-времени и удовлетворяющим уравнениям Эйнштейна – Гильберта. Так фундаментальные понятия геометрии естественно вошли в описание фундаментального физического поля – поля тяготения.

После этого успеха, естественно, возникло стремление геометризовать все физические поля. Будущая теория получила название «единая теория поля» до того, как она была создана. Вся история развития физики элементарных частиц и высоких энергий в XX в. связана с приближением к построению этой универсальной теории. Эта история изобиловала драматическими поворотами, и можно только сожалеть, что понять внутренний смысл и красоту этого развития может лишь узкий круг профессионалов.

Помимо теории тяготения Эйнштейна, решающее влияние на построение единой теории поля оказало создание квантовой механики. Хотя сам Эйнштейн надеялся, что геометризация теории поля сама по себе заменит квантование, которое он, по непонятным субъективным

причинам не принимал, развитие теории поля связано с именами пионеров новой квантовой теории – Дирака, Паули, Гейзенберга, Иордана, Фока, Ферми.

Оглядываясь назад, мы хорошо понимаем, что в 20–50-х гг. экспериментальная база в области элементарных частиц была очень узка. Достаточно напомнить, что в 20-х гг. в список элементарных частиц входили лишь электрон, протон и квант света – фотон. 30-е гг. прибавили нейтрон, гипотетическое нейтрино и  $\mu$ -мезон. Уже это поставило вопрос о полевом описании ядерных сил и взаимодействия, ответственного за радиоактивный распад. Однако серьезные усилия в данной области начали предприниматься лишь после создания квантовой электродинамики Томонагой, Швингером и Фейнманом в самом конце 40-х гг.

Формулировка электродинамики, пригодная для квантования, использует вектор-потенциал  $A_\mu(x)$  и комплексные функции  $\Psi_\alpha(x)$  для описания электромагнитного поля и заряженных частиц. В этом описании содержатся излишние степени свободы, например, общая для всех заряженных полей фаза. Преобразование

$$\Psi_\alpha(x) \rightarrow \varepsilon^{-i\theta(x)} \Psi_\alpha(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta$$

связывает физически эквивалентные конфигурации. Например, тензор

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

определяющий электрическое и магнитное поля  $E_i, H$ :

$$E_i = F_{0i}, \quad H_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikj} F_{kj}$$

инвариантен по отношению к этому преобразованию.

Указанное преобразование принято называть калибровочным, следуя Г. Вейлю. В русской литературе часто используют наглядный термин «градиентное преобразование», следуя В. Фоку. Оба автора хорошо понимали геометрический смысл этого преобразования и его аналогию с координатными преобразованиями или локальными лорентцевыми вращениями в теории тяготения. Отличие от последних состоит в том, что комплексное пространство, ассоциированное с заряженными полями, не имеет никакого отношения к пространству-времени. Поэтому Г. Вейль назвал электродинамику общей теорией относительности в зарядовом пространстве.

К сожалению, эти соображения, сформулированные в конце 20-х гг., не стали широко известны. Поэтому новому поколению теоретиков в 50-х гг. пришлось начинать с чистого листа.

Мы подошли к появлению фундаментальной работы С. Н. Янга и Р. Миллса 1954 г., в которой были введены поля, названные теперь полями Янга – Миллса. В это время уже стало ясно, что элементарные частицы имеют дополнительные характеристики помимо спина и электрического заряда. Первой такой характеристикой стал изотопический спин, ассоциированный с парой нуклонов протон – нейтрон или с тремя сортами  $\pi$ -мезонов. Пространство электрического заряда – одномерное комплексное линейное пространство – заменено здесь двумерным и трехмерным соответственно. Преобразование изотопического спина, обобщающее фазовые преобразования комплексных заряженных полей, образуют унитарную группу  $SU(2)$ , а пространства для нуклонов и  $\pi$ -мезонов соответствуют двумерному и трехмерному представлениям этой группы.

Эта картина естественно привела Янга и Миллса к обобщению градиентных преобразований электродинамики на следующие:

$$\Psi \rightarrow g^{-1}(x)\Psi, \quad A_\mu(x) \rightarrow g^{-1}A_\mu g + g^{-1}\partial_\mu g.$$

Здесь участвует векторное поле  $A_\mu$ , имеющее значения в алгебре Ли группы  $SU(2)$ , так что

$$A_\mu = \sum_a^3 A_\mu^a T^a,$$

где  $T^a$  – матрицы представления этой алгебры Ли, например, матрицы Паули

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

для двумерного представления. Далее поле  $\Psi(x)$  относится к частице, обладающей изотопическим спином. Наконец,  $g(x)$  – произвольная функция со значениями в представлении группы  $SU(2)$ , отвечающими полю  $\Psi(x)$ .

Векторное матричнозначное поле  $A_\mu(x)$  называется полем Янга – Миллса и является естественным аналогом электромагнитного поля. Однако тут есть и существенное отличие: аналог тензора  $F_{\mu\nu}$  теперь зависит от  $A_\mu$  нелинейным образом

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu];$$

последнее слагаемое в правой части есть коммутатор  $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  матриц  $A_\mu$  и  $A_\nu$ . В общем положении он отличен от нуля. В силу этого аналог лагранжиана Максвелла

$$L_{YM} = \text{tr} F_{\mu\nu}^2,$$

где  $\text{tr}$  означает след матрицы, содержит не только квадратичные по  $A_\mu$  члены, но также члены порядка 3 и 4. Это означает, что кванты поля Янга–Миллса, в отличие от фотонов, взаимодействуют друг с другом.

В этом смысле поле Янга–Миллса занимает промежуточное положение между электромагнитным полем, описываемым не взаимодействующими фотонами, и гравитационным полем Эйнштейна, кванты которого – гравитоны – взаимодействуют между собой. Основная роль этих трех полей состоит в том, что они переносят взаимодействие квантов материи, имеющих электрический заряд, изотопический спин и массу соответственно.

Внимательный читатель может спросить: неужели столь естественные объекты и формулы, как поле  $A_\mu$  и его калибровочное преобразование, не были известны математикам? Ответ здесь отрицательный. Действительно,  $A_\mu(x)$  дает одно из описаний так называемой связности в векторном расслоении. Эти объекты дифференциальной геометрии вошли в математику благодаря работам Э. Картана 30-х гг. и далее Экмана, Черна, Лихнеровича и других в конце 40-х гг. Однако не вызывает сомнения, что Янг и Миллс пришли к своему предложению независимо. Здесь мы видим еще один пример, когда важный математический формализм нашел свое адекватное приложение в теоретической физике.

Предложение Янга и Миллса несмотря на его красоту не вошло в арсенал теории элементарных частиц сразу же в 50-х гг. Причиной стала проблема массы его квантов. В соответствии с общими соображениями теории возмущений квантовой теории поля Янга – Миллса описывают три сорта безмассовых векторных частиц; в природе же есть место только для одного такого сорта частиц – фотонов. В. Паули, который по-своему знал формализм неабелевых калибровочных полей (альтернативное название полей Янга – Миллса), сразу же высказал свои возражения. Он выразил их в довольно резкой форме, когда молодой Янг делал доклад на семинаре Оппенгеймера в Принстонском институте высших исследований. Отрицательное отношение маститого оппонента было несомненным ударом для Янга, представлявшего

новое поколение физиков-теоретиков. Подчеркнем еще раз, что Паули знал математические возможности калибровочных полей, но отрицал их физическое значение на основании современной ему догмы.

В течение 15 лет идея Янга и Миллса занимала периферическое положение в физике элементарных частиц. Этому соответствовало общее разочарование в возможностях квантовой теории поля после того, как мезонная теория ядерных сил не привела к прогрессу и даже в самой квантовой электродинамике усилиями Ландау и его сотрудников были найдены противоречия. Роль квантовой теории поля была редуцирована к алгебре токов с приложениями в слабых взаимодействиях. В то же время интерес к идее Янга – Миллса поддерживался тем, что быстрый прогресс ускорителей и экспериментов на них привел к необычайному росту числа элементарных частиц и их характеристик. В классификации элементарных частиц возникли группы, обобщающие  $SU(2)$  изотопического спина, и соответствующие квантовые числа с экзотическими названиями «странность», «очарование» и т. д. Становилось ясным, что принцип калибровочной эквивалентности остается единственной возможностью для объединения в теории элементарных частиц.

В начале 60-х гг. выявилось еще одно осложнение в квантовой теории Янга – Миллса, даже если забыть о ее непосредственных физических приложениях. Произошло это в известной мере случайно. В конце 50-х гг. Фейнман – создатель диаграммной техники теории возмущений в квантовой электродинамике – занялся переносом своих методов на случай теории тяготения Эйнштейна. Он сделал это в ответ на запрос В. Вайскопфа. Фейнман обнаружил, что естественное обобщение диаграммной техники в классическом пределе (диаграммы типа деревьев) быстро приводит к известным ответам (перигелий Меркурия, отклонение световых лучей), вычисление которых традиционными методами было гораздо более сложным. Однако вычисление квантовых поправок (диаграммы с петлями) привело к неудовлетворительным результатам. Поскольку эти вычисления были очень трудоемкими, Фейнман по совету Гелмана решил набить руку на более простом примере поля Янга – Миллса. Противоречие между наивной диаграммной техникой и условиями калибровочной инвариантности и унитарности возникли и в этом примере. Фейнман разработал модифицированный подход, основанный на восстановлении петлевой диаграммы по диаграммам типа деревьев, полученным при рассечении петли. Он смог реализовать свой метод только для диаграмм с одной петлей и обнаружил замечательный факт: правильный ответ

получается из наивного результата после вычитания вклада фиктивной скалярной частицы, взаимодействующей с полем Янга – Миллса определенным образом.

В 1962 г. Фейнман рассказал о своих результатах на конференции по гравитации в Польше. Расшифровка магнитофонной записи этой лекции была опубликована в журнале «Acta Physica Polonica», который, к моему счастью, приходил в библиотеку Института им. В. А. Стеклова в Ленинграде. Чтение этой работы явилось одним из главных стимулов для начала моей работы над проблемой квантования полей Янга – Миллса. Но об этом чуть позже.

Работа Фейнмана не привлекла внимания сообщества специалистов по физике высоких энергий. Аудитория гравитационистов, которой она была представлена, в 60-х гг. практически не имела пересечений с этим сообществом. Исключением были Б. Де Витт, С. Дезер и И. Биланицкий-Бируля, присутствовавшие на докладе Фейнмана в Польше. Первый из них посвятил несколько лет обобщению подхода Фейнмана на случай диаграмм с двумя и более петлями. Его работа в конце концов привела к общей формулировке корректных правил теории возмущений для поля Янга – Миллса, включающей фиктивные частицы. Однако к тому времени появилась работа В. Попова и моя, где эти правила были получены очень просто на основании правильной интерпретации квантования методом континуального интеграла Фейнмана. Здесь уместно напомнить, что диаграммные правила были выведены Фейнманом при помощи континуального интеграла. Почему Фейнман сам не вернулся к источнику своих правил после того, как обнаружил их несостоятельность в наивной форме, остается для меня загадкой.

Я уже отметил, что польская лекция Фейнмана стала стимулом для меня заняться проблемой квантования полей Янга – Миллса. Другим не менее важным стимулом было чтение монографии Лихнеровича, посвященной теории связностей в векторных расслоениях. Из нее явно следовало, что поля Янга – Миллса имеют ясную геометрическую интерпретацию, что делает их не менее фундаментальными, чем поле тяготения Эйнштейна.

Итак, технической особенностью полей Янга – Миллса является принцип эквивалентности: поля, отличающиеся калибровочным преобразованием, описывают одну и ту же физическую конфигурацию. Формализм континуального интеграла дает самый адекватный подход для учета принципа эквивалентности – следует интегрировать по классам эквивалентных полей, а не по всем формальным конфигурациям.

Как только эта идея ясна, ее техническая реализация не представляет трудностей, что и было продемонстрировано Виктором Поповым и мною осенью 1966 г. Оказалось, что помимо традиционного фейнмановского функционала  $\exp\{iS\}$ , где  $S$  – действие, интеграл содержит дополнительный множитель, который можно интерпретировать как якобиан, возникающий при замене переменных интегрирования, при которой нефизические калибровочные степени свободы явно отделяются. В свою очередь, этот якобиан, в данном случае определитель дифференциального оператора, можно представить как интеграл по вспомогательным полям от функционала, также имеющего форму  $\exp\{iS_1\}$ . Таким образом, корректный функциональный интеграл содержит дополнительные переменные интегрирования и модифицированное действие  $S + S_1$ . Эти дополнительные переменные, не имеющие классического аналога, дали естественную интерпретацию фиктивным частицам Фейнмана. В настоящее время за ними закрепилось название «духи Фаддеева – Попова».

Описание этого подхода заняло всего лишь две страницы в журнале «Physics Letters», где наши результаты были опубликованы весной 1967 г. Для сравнения: вышедшая практически одновременно работа Де Витта, который развил первоначальный подход Фейнмана при помощи сложной комбинаторики, заняла десятки страниц в «Physical Review».

В 1967 г. поля Янга – Миллса все еще не занимали ведущего места в умах теоретиков. Однако успехи экспериментаторов, в частности обнаружение нейтральных токов, настоятельно требовали создания новых моделей для классификации элементарных частиц.

Насущной цели удовлетворяла модель Салама – Глэшау – Вейнберга для объединенного описания электромагнитных и слабых взаимодействий. Эта модель является естественным обобщением электродинамики, в котором поля материи содержат помимо электронного поля еще и поле для нейтрино. Соответствующий дублет естественно ассоциируется с полем Янга – Миллса для группы  $U(2)$  вместо абелева электромагнитного поля. Рассчеты в приближении диаграмм типа деревьев привели к примечательным корреляциям экспериментальных данных и предсказанию новых частиц –  $W$ - и  $Z$ -векторных мезонов и скалярной частицы Хиггса. Однако фундаментальное значение модель приобрела, когда было показано, что она определяет корректную теорию поля. В технических терминах это означает, что модель перенормируема. Это было сделано в начале 70-х гг. молодым голландцем Г. Хофтом, учитель которого М. Вельтман был одним из

немногих западных теоретиков, серьезно относившихся к полям Янга – Миллса в 60-х гг.

Дальше выяснилось, что помимо перенормируемости теория Янга – Миллса обладает еще одним замечательным свойством, получившим название «асимптотическая свобода». По моему мнению, наиболее важным следствием этого свойства стала «размерная трансмутация» (термин С. Коулмена), т. е. появление размерного параметра после квантования. В результате окончательно было снято возражение В. Паули, упомянутое выше. Спектр полей Янга – Миллса не содержит безмассовых заряженных векторных частиц. Подлинными кванты поля Янга – Миллса – глюоны – массивны.

История «асимптотической свободы» сама по себе драматична. В официальной историографии это открытие связывают с именами Гросса, Вильчека и Политцера.

Другое проявление «асимптотической свободы» – все еще не доказанное формально – состоит в «удержании кварков». Это означает, что силы, переносимые полями Янга – Миллса, растут при увеличении расстояния. Это явление стало основой теории сильных взаимодействий. Поля ядерной материи – кварки – обладают зарядовой характеристикой, получившей название «цвета». Пространство цветов трехмерно и соответствующие поля Янга – Миллса ассоциированы с группой  $SU(3)$ . Возникшая теория получила название «квантовая хромодинамика» и считается фундаментальной теорией ядерных сил.

Таким образом, калибровочный принцип эквивалентности и поля Янга – Миллса привели к значительному продвижению к единой теории поля. Возникшая объединенная теория слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий, получившая название «Стандартная Модель», является фундаментальной основой физики высоких энергий и элементарных частиц. Последние 20 лет XX в. принесли много примечательных экспериментальных подтверждений ее предсказаний. Я могу гордиться, что правила квантования полей Янга – Миллса, предложенные В. Поповым и мной, используются во всех расчетах Стандартной Модели. Наша история дает редкий пример, когда математические соображения, основанные главным образом на геометрии, предшествовали реальным физическим приложениям.

Стандартная Модель не стала последним словом в построении единой теории поля. Она не включает теорию тяготения, с которой началась геометризация физики в начале XX в. Популярная ныне теория струн и более общая (и мистическая)  $M$ -теория призваны заполнить этот пробел. Более того, в самой Стандартной Модели не все



понято. Исследование спектра частиц поля Янга–Миллса и доказательство удержания кварков еще не завершены. Нет сомнения, что эти по существу математические задачи будут определять развитие теории поля в начале XXI в.

А XX век закончился тем, что работа по квантовой теории поля Янга – Миллса получила высшее признание в виде Нобелевских премий, присужденных в 1999 г. М. Вельтману и Г. Хоофту и в 2004 г. Д. Гроссу, Ф. Вильчеку и Д. Политцеру.