С. ЗЕТЕЛЬ.

О построении некоторых правильных многоугольников.

Если две хорды пересекаются под прямым углом внутри круга, то сумма стягиваемых ими дуг должна быть не меньше 180^0. Это видно из следующих соображений. Пусть хорда AB стягивает дугу в a^0, а хорда CD — дугу в b^0, дуга BC пусть содержит x^0 (черт. 1). Дуга $AMD = 360^0 - (a + b) + x$. Так как угол BFD равен 90^0, то

$$\frac{360 - (a + b) + x + x}{2} = 90^0$$

$$\text{откуда } x = \frac{a + b - 180}{2} \quad (1)$$

Если $a + b = 180^0$, то дуга x равна нулю. Для существования угла x, необходимо, чтобы $a + b > 180$ (2).

Допустим, что хорда AB есть сторона правильного n—угольника, а хорда CD сторона правильного m—угольника, тогда согласно неравенству (2)

$$\frac{360}{n} + \frac{360}{m} \geq 180$$

$$\frac{2}{n} + \frac{2}{m} \geq 1$$

$$2m + 2n \geq mn$$

Пусть $n = x + 2$

» $m = y + 2$, тогда

$$2x + 4 + 2y + 4 \geq xy + 2x + 2y + 4$$

$$4 \geq xy$$

Равенство $4 = xy$ возможно при

x	1	2
y	4	2

Следовательно m и n равны

m	3	4
n	6	4

Итак, на окружности пересекаются под прямым углом две стороны квадрата и сторона правильного треугольника со стороной правильного шестиугольника.

Неравенство $4 > xy$ дает:

x	1	1	1
y	1	2	3

и

m	3	3	3
n	3	4	5

Итак, мы видим, что внутри круга сторона правильного треугольника может быть пересечена перпендикулярной ей стороной правильного треугольника, четыреугольника и пятиугольника. Других пересечений сторон правильных многоугольников внутри круга под прямым углом быть не может. Найдем величину дуги x (1) для каждого из этих пересечений.

1) $m = n = 3$

$$x = \frac{120 + 120 - 180}{2} = 30^0 \quad (4)$$

Если $AB = a_3$ и $CD = a_3$, то хорда BC равна a_{12}

2) $m = 3, \; n = 4$

$$x = \frac{120 + 90 - 180}{2} = 15^0 \quad (5)$$

Если $AB = a_3$ и $CD = a_4$, то $BC = a_{24}$

3) $m = 3, \; n = 5$

$$x = \frac{120 + 72 - 180}{2} = 6^0 \quad (6)$$

Если $AB = a_3$, а $CD = a_5$, то $BC = a_{60}$.

Каким образом пересечь данную хорду перпендикулярной стороной правильного треугольника?

Допустим, что $CD = a_3$, AB — любая хорда (черт. 2).

Построив $C_1 D_1$, симметричную CD относительно оси XY, имеем $OM = \frac{R}{2}$ (апофема правильного треугольника), $MM_1 = R$, значит и $NN_1 = R$. Следовательно, любая хорда AB, пересеченная под прямым углом стороной правильного треугольника равна $R + 2AN$. Отсюда следствие: если на любой хорде большей радиуса отложить радиус от одного конца хорды и через середину оставшегося отрезка провести перпендикулярную хорду, то эта последняя всегда равна $R\sqrt{3}$. Этот вывод позволяет, на основании равенств (4, 5, 6) легко построить a_{12}, a_{24}, a_{60}. При помощи двух сторон правильного треугольника, пересекающихся внутри круга под прямым углом, можно не только построить, но и вычислить a_{12} (черт. 3).

Если AB и CD стороны правильного треугольника, построенн. вышеуказанным способом, то $CN = BN = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1)$. CN можно считать радиусом окружности, в которой BC сторона вписанного квадрата, следовательно $BC = a_{12} = \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}$. Итак, сторона правильного двенадцатиугольника равна стороне квадрата в окружности радиуса $r = \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1)$.

Отсюда

$$R = \frac{2r}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2r(\sqrt{3} + 1)}{2} = r\sqrt{3} + r.$$

Пользуясь этим равенством можно построить правильный двенадцатиугольник по заданной стороне. Для этого достаточно около квадрата, сторона которого равна заданной стороне двенадцатиугольника описать окружность и к радиусу этой окружности r добавить $r\sqrt{3}$. Построение $r\sqrt{3}$ — стороны правильного треугольника вписанного в круг радиуса r — нам известно. Полученный отрезок $r\sqrt{3} + r$ есть радиус той окружности, в которой заданный отрезок равен стороне правильного вписанного двенадцатиугольника.

Рассматривая пересечение хорд под прямым углом внутри круга, можно получить ряд следствий, относящихся не только к построению правильных многоугольников. Допустим, что хорды AB и CD пересечены под прямым углом внутри круга. Тогда $AB = 2OM + 2AN$ (черт. 2), где OM — расстояние хорды от центра. Обозначим OM через d. Отсюда теорема: если на любой хорде большей $2d$ отложим отрезок, равный $2d$, и остаток разделим перпендикулярной хордой пополам, то вновь полученная хорда будет постоянной величины. Она равна $2\sqrt{R^2 - d^2}$. Применив этот вывод к треугольнику вписанному в круг, получим, что теорема: «расстояние ортоцентра от вершины треугольника равно удвоенному расстоянию противоположной стороны от центра описанного круга», может быть рассматриваема, как следствие выведенной зависимости между пересекающимися под прямым углом хордами. Действительно, если ABC (черт. 4)—вписанный в круг треугольник, то отложив удвоенное DK от точки D до точки F. (как известно, точка F есть ортоцентр), получим, что оставшийся отрезок BF равен 2OM.

Теперь рассмотрим пересечение двух секущих вне круга под прямым углом (черт, 5). Пусть хорда AN стягивает дугу в a^0, а хорда DK—дугу в b^0, тогда дуга AmD равна 360 a—b - x, так как угол AMD прямой, то

$$\frac{360-(a+b)-x-x}{2}=90$$

$$\text{откуда } x=\frac{180-(a+b)}{2} \qquad (7)$$

Таким образом, пересекаться вне круга под прямым углом могут секущие, части которых внутри круга стягивают дуги в сумме меньшие полуокружности. Если внутренние части секущих суть стороны правильных многоугольников, то

$$\frac{360}{m}+\frac{360}{n}\leqq 180$$

$$\text{и } 2n+2m\leqq mn$$

Пусть $n=x+2$

$m=y+2$

$$\text{Тогда } 2x+4+2y+4\leqq xy+2x+2y+4$$

$$\text{и } xy\geqq 4$$

Этому неравенству удовлетворяют любые целые значения x и y, за исключением следующих пар.

1) $x=y=1$

2) $x=2,\ y=1$

3) $x=1,\ y=3$,

при которых m и n равны

1) $m=n=3$

2) $m=4,\ n=3$

3) $m=5,\ n=3$

Таким образом, вне круга, за исключением указанных случаев, стороны любых двух многоугольников могут пересекаться под прямым углом. Рассмотрим некоторые из таких пересечений, напр., пересечение стороны треугольника со стороной правильного восьмиугольника. При таком пересечении дуга x равна:

$$x = \frac{180-(120+45)}{2} = 7,\ 5^0 \quad (8)$$

Хорда, стягивающая дугу x, есть сторона правильного 48-угольника. Пересечение стороны правильного треугольника со стороной правильного десятиугольника под прямым углом дает:

$$x = \frac{180-(120+36)}{2} = 12^\circ \quad (9)$$

Хорда, стягивающая дугу x — сторона правильного 30-угольника. Пересечение a_3 с a_{12} дает:

$$x = \frac{180-(120+30)}{2} = 15^\circ \quad (10)$$

Стягивающая дугу x хорда равна стороне 24-угольника. Для построения указанных многоугольников нужно пересечь данную секущую перпендикулярной ей стороной правильного треугольника. Допустим, что $AB = a_3$ (черт. 6) $OM = \frac{R}{2}$ (апофема правильного треугольника) $MM_1 = R$. $NN_1 = R = CD + 2\,CN$. Отсюда вывод: если на хорде меньшей радиуса отложить от одного конца хорды радиус и через середину отрезка между полученной от отложения радиуса точкой и второй конечной точкой хорды, восставить перпендикуляр, то часть его внутри круга равна $R\sqrt{3}$. Принимая во внимание сказанное ранее о пересечении хорды большей радиуса со стороной треугольника, заключаем, что этот вывод распространяется на хорду любой величины. Допустим, что на чертеже 6 AB есть любая хорда, расстояние которой от центра равно любой величине d, тогда выведенная теорема может быть обобщена: если на любой хорде отложить от конечной точки отрезок равный 2d и через середину отрезка между полученной от отложения точкой и другой конечной точкой хорды провести перпендикуляр, то часть его внутри круга—величина постоянная, равная $2\sqrt{R^2 - d^2}$

Рассмотрим полученную формулу при значениях $d = O$ и $d = R$. В первом случае получаем, что если любую хорду разделить перпендикулярно пополам, то перпендикуляр через середину есть диаметр. При $d = R$, имеем: если на любой хорде от конечной ее точки отложить диаметр и через середину отрезка между полученной точкой и другой конечной точкой провести перпендикуляр, то он будет касательной к данной окружности. Из чертежа 7 видно, что точка касания отстоит от данной хорды на расстоянии равном рассгоянию хорды от центра.

Рассмотрим применение выведенной теоремы и ее следствий к прямоугольному треугольнику. Из чертежа 8 видно, что каждый катет представляет двойное расстояние от центра описанного круга до другого катета (напр. $AC = 2OF$). Поэтому: если на катете или на гипотенузе отложить от конечной точки другой катет и через середину отрезка между полученной точкой и другой конечной точкой прямой, на которой произведено отложение, провести перпендикуляр, то часть его внутри круга равна неотложенному катету.. Если же на катете отложить гипотенузу, т. е. диаметр описанного круга (самый круг проводить не нужно) и отрезок между вершиной прямого угла и точкой полученной от отложения, разделить перпендикуляром пополам, то полученный перпендикуляр—касательная к окружности, описанной около прямоугольного треугольника.

Не вычерчивая окружности можно на касательной опредеделить точку касания. Она находится на расстоянии половины того катета, параллельно которому она проведена. Расстояние это откладывается от вершины прямого угла (черт. 9).

Выведенная теорема позволяет решить и такую задачу: заданы две конечные точки диаметра A и B и направление MN, перпендикулярно к которому следует провести касательную. (черт. 10). Можно провести касательную, не вычерчивая самой окружности и не определяя положение центра. Для этого из одной данной точки, скажем A, проводим прямую параллельную MN. Из другой данной точки опускаем на нее перпендикуляр BC. Точка C лежит на окружности (так как угол ACB прямой, а AB—диаметр). Затем от точки A откладываем по направлению AC диаметр AB. Через середину CD проводим перпендикуляр FL, который коснется окружности в точке E ($FE = \frac{1}{2}$ BC). Откладывая диаметр не только от точки A, но и от точки C и проделывая теже построения, получим вторую касательную F_1E_1.

Так как задача о проведении касательной под любым углом к заданному направлению может быть приведена к предыдущей (заменой заданного направления другим, к которому касательная перпендикулярна), то и эта задача может быть выполнена при наличии двух конечных точек диаметра без построения окружности и без определения центра.

Вернемся к рассмотрению равенства 7. Пусть вне круга пересекаются a_4 и a_5, тогда

$$x = \frac{180-(90+72)}{2} = 9^0 \quad (11)$$

Хорда стягивающая дугу в 9^0—сторона правильного 40-угольника. Для ее построения достаточно на стороне правильного пятиугольника отложить сторону квадрата (сторона квадрата равна своей удвоенной апофеме) и через середину отрезка равного разности между стороной квадрата и пятиугольника провести перпендикуляр, часть которого внутри круга равна стороне правильного 40-угольника.

Рассмотрим пересечение двух сторон правильных многоугольников с одинаковым числом сторон под прямым углом. Случай пересечения a_3 с a_3 мы уже рассмотрели при построении правильного двенадцатиугольника. Так как стороны квадрата пересекаются на окружности, то угол x равен нулю.

Пересечение под прямым углом двух пятиугольников, вписанных в круг, дает:

$$x = \frac{180-(72+72)}{2} = 18^0 \quad (12)$$

Хорда, стягивающая дугу в 18^0 есть a_{20}. Из чертежа 8 видно, что если $BC = a_5$, AB—диаметр, то $AC = 2OF$ (OF—средняя линия в треугольнике) Поэтому, если отложим на CB от точки C хорду AC и разность между CB и AC разделим перпендикуляром пополам, то получим a_{20}. Две стороны шестиугольника, пересекаясь под прямым углом дают

$$x = \frac{180-(60+60)}{2} = 30^0 \quad (13)$$

Стягивающая дугу x хорда равно a_{12}.

Интересно отметить, что стороны двух правильных треугольников, пересекающихся внутри круга под прямым углом, дали построение того же многоугольника, что и стороны двух шестиугольников, пересекающихся вне круга. Сторона квадрата, пересекая сторону шестиугольника, вне круга, дает

$$x = \frac{180-(90+60)}{2} = 15^0 \quad (14)$$

т. е. ту же дугу, что и сторона квадрата, пересекаясь со стороной треугольника внутри круга.

Допустим, что стор. некоторого n' угольн. стягив. дугу, равную a°
» » » » m' угольн. » » » b°
» » » » k' угольн. » » » $180\text{-}a^\circ$
» » » » p' угольн. » » » $180\text{-}b^\circ$
Первые две стороны пересекаются внутри круга под прямым

углом, третья и четвертая пересекаются таким же образом вне круга. Имеем для первых хорд:

$$x = \frac{(a + b) - 180}{2}$$

для вторых хорд

$$x_1 = \frac{180 - (180 - a + 180 - b)}{2} = \frac{a + b - 180}{2}$$

Следовательно: $x = x_1$

Итак, если хорды, стягивающие дуги a° и b°, пересекаясь внутри круга, определяют дугу x, то такую же дугу определяют, пересекаясь вне круга, хорды, стягивающие $180 - a^\circ$ и $180 - b^\circ$

Рассмотрим пересечение под прямым углом двух сторон правильного восьмиугольника

$$x = \frac{180 - 45 - 45}{2} = 45 \quad (15)$$

т. е. хорда дуги x есть тоже a_8. Действительно, если продолжить до пересечения две стороны восьмиугольника, сходящиеся у одной и той же стороны, то угол в пересечении будет прямой

Пересечение двух a_{10} дает:

$$x = \frac{180 - 36 - 36}{2} = 54^\circ \quad (16)$$

Пересечение двух a_{12} дает:

$$x = \frac{180 - 30 - 30}{2} = 60^\circ \quad (17)$$

Взаимно перпендикулярным пересечением хорд и секущих легко получить дуги в 6°. $9^\circ, 12^\circ, 15^\circ, 18^\circ$. Из следующих равенств видно, что этот ряд можно продолжить.

$$x = \frac{180 - 30 - 108}{2} = 21^\circ \text{ или } x = \frac{150 + 72 - 180}{2} = 21^\circ \quad (18)$$

$$x = \frac{180 - 60 - 72}{2} = 24^\circ \text{ или } x = \frac{120 + 108 - 180}{2} = 24^\circ \quad (19)$$

$$x = \frac{180 - 90 - 36}{2} = 27^\circ \text{ или } x = \frac{90 + 144 - 180}{2} = 27^\circ \quad (20)$$

Хорду, стягивающую дугу в 30°, построить легко (4, 13), Хорда. стягивающая дугу в 33°, при помощи легко строимых хорд, не получается, но возможно построить хорду, стягивающую дугу в 57°, дополпяющую данную до 90°

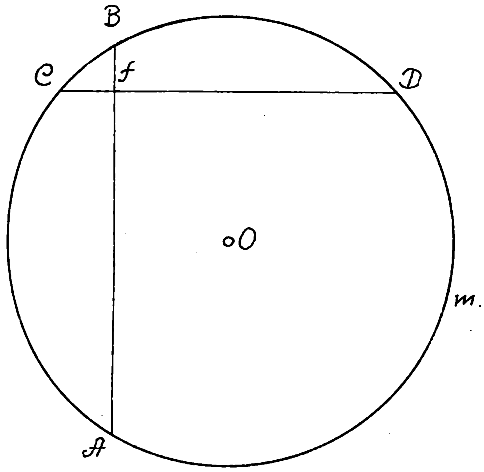
$$x = \frac{180 - 30 - 36}{2} = 57^\circ \quad \text{или} \quad \frac{150 + 144 - 180}{2} = 57^\circ \quad (21)$$

$$x = \frac{180 - 30 - 72}{2} = 39^\circ \quad \text{или} \quad \frac{150 + 108 - 180}{2} = 39^\circ \quad (22)$$

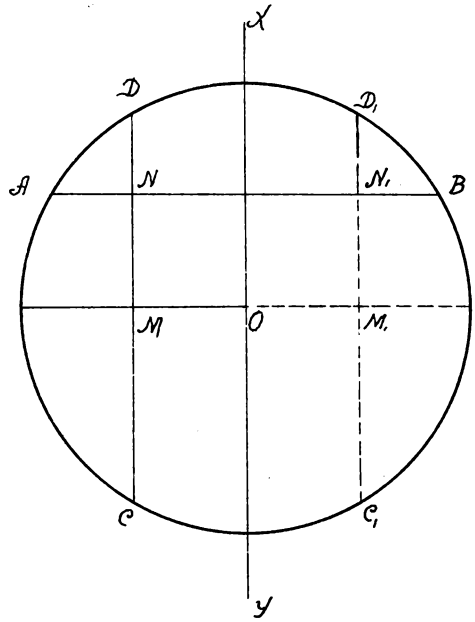
$$x = \frac{180 - 60 - 36}{2} = 42^\circ \quad \text{или} \quad \frac{120 + 144 - 180}{2} = 42^\circ \quad (23)$$

Итак, можно построить ряд дуг, кратных 3°. Соединяя концы дуг с центром, получим углы кратные 3°. Соединяя концы дуг с точкой, лежащей на окружности, получим углы, кратные 1, 5°. Кроме того, помощью указанных построений, возможно составить таблицу синусов чрез 1, 5°.

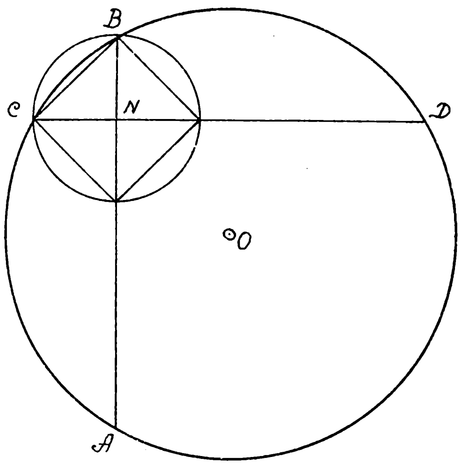
С. Зетель.



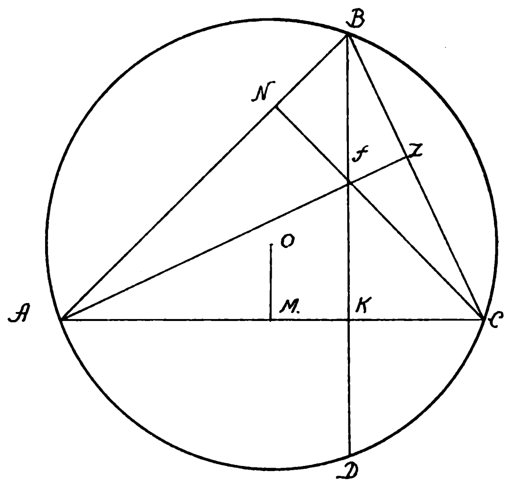
Чер.1



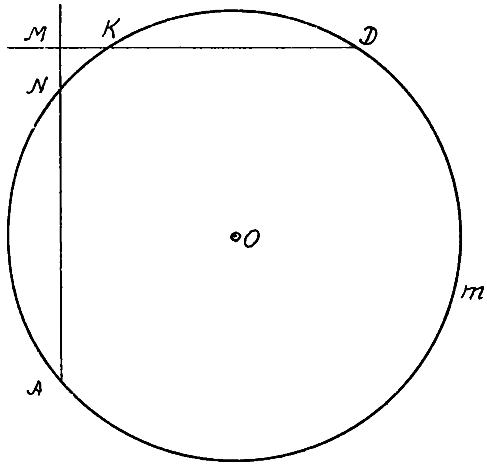
Чер. 2



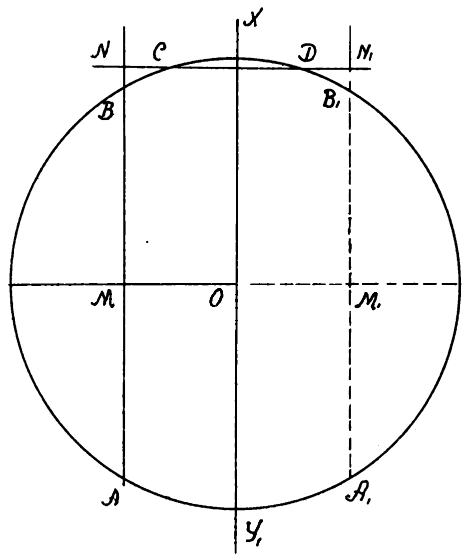
Чер.3



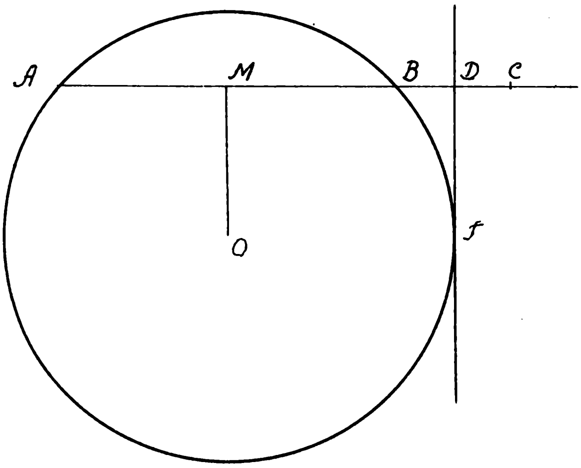
Чер.4



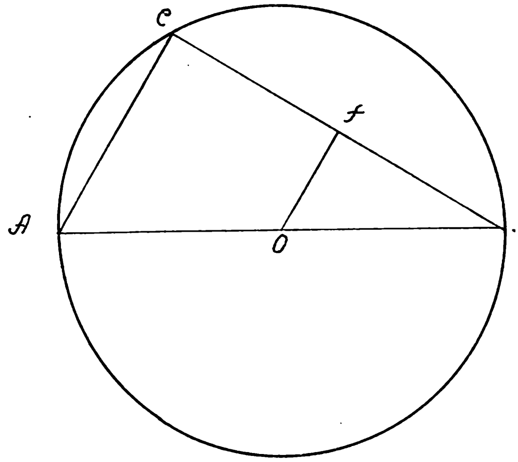
Чер.5



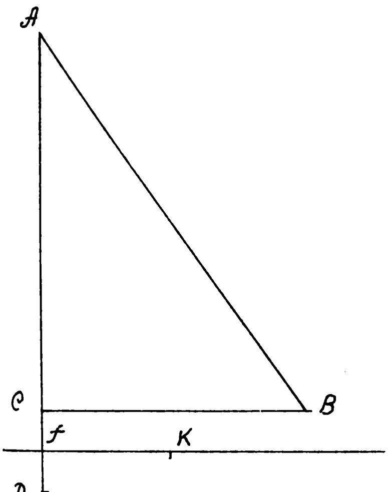
Чер. 6



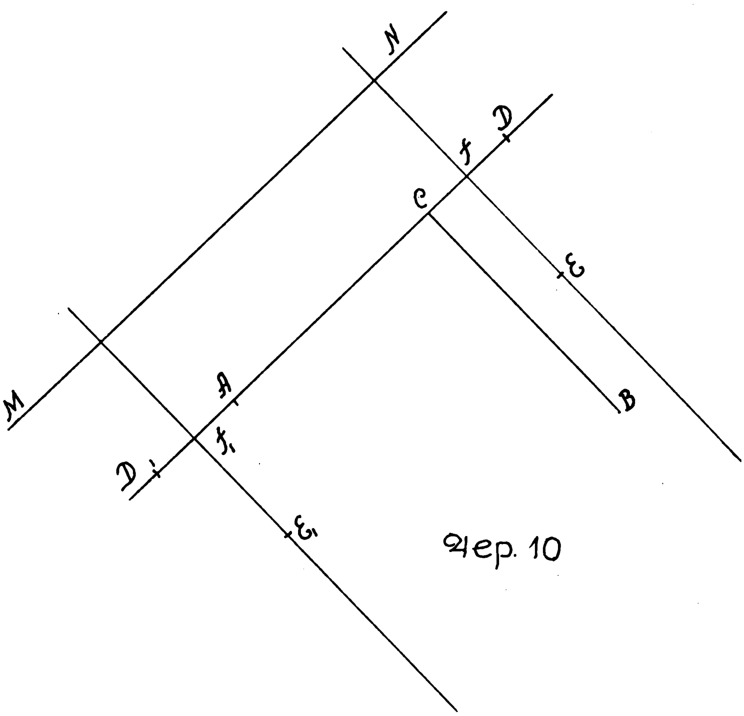
Чер. 7



Чер. 8



Чер. 9



Чер. 10