УДК 519.172

И. А. Вакула, В. В. Кабанов

О НАТЯГИВАЕМЫХ НА 3-КОКЛИКУ ГРАФАХ БЕЗ 3-ЛАП С НЕКЛИКОВЫМИ μ-ПОДГРАФАМИ*

Введение

Мы рассматриваем только конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Пусть $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ – граф. Далее под подграфом графа Γ будем понимать порожденный подграф. Рассмотрение только порожденных подграфов позволяет использовать одно и то же обозначение для подмножества из $V(\Gamma)$ и порожденного им подграфа. Если a – вершина графа Γ, то через $[a]$ будем обозначать *окрестность вершины* a – множество вершин графа Γ, смежных с a, а через $a^\perp$ – объединение $[a] \cup \{a\}$, которое назовем *замкнутой окрестностью.* Пусть $X \subseteq V(\Gamma)$. Тогда через $X^\perp$ (соответственно $[X]$) обозначим множество $\bigcap\limits_{x\in X} x^\perp$ (соответственно $\bigcap\limits_{x\in X} [x]$). Для двух несмежных вершин a, b графа Γ положим $M(a,b) = \{a,b\}^\perp$. Подграф, порожденный множеством $M(a,b)$, будем называть *μ-подграфом* вершин a и b, если вершины a и b находятся на расстоянии два.

Для двух непересекающихся множеств $V_1, V_2 \subseteq V(\Gamma)$ будем писать $V_1 \approx \approx V_2$, если все вершины из V_1 содержат в своей окрестности множество V_2, т. е. $[V_1] \supseteq V_2$ или, что эквивалентно, $V_1 \subseteq [V_2]$. Если $\mathcal{V} = \{V_i | 1 \le i \le n\}$ – набор попарно непересекающихся подмножеств множества вершин графа Γ, то отношение $\approx$ является симметричным и антирефлексивным отношением на $\mathcal{V}$, следовательно, задает некоторый граф на $\mathcal{V}$.

Пусть x и y – вершины графа Γ. Положим $x \equiv y$ тогда и только тогда, когда $x^\perp = y^\perp$. Легко видеть, что $\equiv$ является отношением эквивалентности. Фактор-граф $\overline{\Gamma}$ графа Γ по отношению $\equiv$ будем называть *редукцией* графа Γ, а граф, изоморфный редукции некоторого графа, – *редуцированным.* Для графа Γ рассмотрим Γ^*– граф, полученный из Γ добавлением в него одной вершины a так, что $E(\Gamma^*) \setminus E(\Gamma)$ состоит только из ребер, содержащих вершину a, а для некоторой вершины b из $V(\Gamma)$ в Γ^* выполняется равенство $a^\perp = b^\perp$. Граф Δ, полученный из Γ посредством конечного числа таких операций, называется *кликовым расширением* графа Γ. Нетрудно заметить, что

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 02-01-00772.

если граф Γ был редуцированным, то он изоморфен редукции $\overline{\Delta}$ графа Δ. Также ясно, что любой нередуцированный граф изоморфен некоторому кликовому расширению своей редукции.

Реберный граф $L(\Gamma)$ графа Γ – это граф на ребрах графа Γ, причем два ребра смежны в том и только в том случае, когда они имеют общую вершину. Реберный граф полного двудольного графа с долями из n и m вершин называется $n \times m$*-решеткой.*

3*-лапа* $K_{1,3}$ – это полный двудольный граф с долями, состоящими из одной и трех вершин. *Вполне несвязный граф* – это дополнение полного графа. Подграф H графа Γ назовем *кликой*, если H – полный, и *кокликой*, если H – вполне несвязный.

Рассмотрим следующие условия, налагаемые на граф Γ:

(i) Γ *не содержит* 3*-лап;*

(ii) *всякие две вершины, находящиеся в* Γ *на расстоянии* 2 *друг от друга, лежат в порожденном* 4*-цикле;*

(iii) Γ *содержит* 3*-коклику.*

Понятно, что любое кликовое расширение графа одновременно с ним удовлетворяет или не удовлетворяет условиям (i)–(iii). Это означает, что можно ограничиться изучением лишь редуцированных графов с условиями (i)–(iii):

(iv) *для любых вершин* a, b *графа* Γ *условие* $a^{\perp} = b^{\perp}$ *влечет* $a = b$.

Заметим, что условие (ii) эквивалентно тому, что любой μ-подграф содержит пару несмежных вершин, т. е. не является кликой.

Обозначим через K класс графов, удовлетворяющих условиям (i)–(iv).

Пусть Γ – граф без 3-лап. Скажем, что граф Γ *натягивается на* 3*-коклику*, если Γ *натягивается на некоторую* 3*-коклику*, т. е. существует 3-коклика $\{a, b, c\} \subset \Gamma$, любые две вершины которой находятся друг от друга на расстоянии два, такая, что $\Gamma = \{a, b, c\} \cup M(a, b) \cup M(a, c) \cup M(b, c)$.

В работе [1] описаны графы из K, содержащие 4-коклику, а в работе [2] – графы из K, не содержащие 4-коклик, но содержащие 3-коклику, на которую граф не натягивается. В последнем случае описание графов не столь полно, как в первом. В настоящей работе оно уточняется для некоторой части таких графов. Последним шагом в изучении графов из класса K должно стать описание графов, натягиваемых на любую свою 3-коклику. Эта задача на сегодняшний день не решена.

Прежде чем сформулировать основной результат данной работы, дадим еще одно определение. Пусть C_m – цикл длины $m \geq 2$ и пусть натуральные числа $k_1, k_2, \ldots, k_l$ таковы, что $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. *Циркулянтом* $C(m; k_1, k_2, \ldots, k_l)$ называется граф с множеством вершин $V(C_m)$ такой, что две его вершины смежны тогда и только тогда, когда расстояние между ними в C_m принадлежит множеству $\{k_1, k_2, \ldots, k_l\}$. Если в качестве вершин цикла C_m выбрать элементы кольца $\mathbb{Z}_m$, расположив их друг за другом, то вершины u, v из $C(m; k_1, k_2, \dots, k_l)$ смежны тогда и только тогда, когда $u - v \in \{\pm k_1, \pm k_2, \dots, \pm k_l\}$. Рассмотрим кликовое расширение графа $C(3n; 1, 2, \dots, n-1)$, в котором каждая вершина $in+j$, где $1 \le i \le 3, 1 \le j \le n$, заменена на клику $\Omega(i, j)$ мощности q_j, для некоторых натуральных чисел $q_1, q_2, \dots, q_n$. Соединим в этом кликовом расширении вершины каждого объединения $\bigcup\limits_{1 \le i \le 3} \Omega(i, j)$ таким образом, чтобы получилась $q_j \times 3$-решетка, и получим граф $\Omega(n; q_1, q_2, \dots, q_n)$.

Теорема. *У связного редуцированного графа Γ без 3-лап с некликовыми μ-подграфами, натягиваемого на одну свою 3-коклику и не натягиваемого на другую, каждая вершина лежит в некоторой 3-коклике тогда и только тогда, когда граф Γ изоморфен графу $\Omega(n; q_1, q_2, \dots, q_n)$ для $n \ge 2$ и натуральных чисел $q_1, q_2, \dots, q_n$ таких, что каждое из них больше двух, одно равно трем, а одно больше трех.*

Приведем некоторые утверждения, касающиеся графов без 3-лап с некликовыми μ-подграфами, которые будут полезны нам в дальнейшем.

Следующая лемма воспроизводит пункт (3) леммы 1 из [1].

Лемма 1. *Пусть Γ – связный граф без 3-лап, в котором две пары несмежных вершин a, b и c, d порождают 4-цикл. Тогда $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$.*

Соотношение окрестностей вершин порожденного 4-цикла из леммы 1 назовем *прямоугольным соотношением.*

Лемма 2. ([1, лемма 2]) *Диаметр любого связного графа без 3-лап с некликовыми μ-подграфами равен двум.*

Лемму 2 можно было бы перефразировать, сказав, что в графе, удовлетворяющем ее условию, для вершин равноценно быть несмежными и находиться на расстоянии два. В дальнейшем мы всегда будем иметь в виду это обстоятельство, в частности говоря о μ-подграфах вершин произвольной 3-коклики.

Лемма 3. ([1, лемма 5]) *Пусть связный граф Γ удовлетворяет условиям (i)–(iv), a, b и c – попарно несмежные вершины из Γ.*

(1) *Если u, v – несмежные вершины из $M(a, b)$, то $M(b, c) \subseteq [u] \cup [v]$, а $[u] \cap [v]$ не пересекает $M(b, c)$, т. е. $[u]$ и $[v]$ расщепляют $M(b, c)$.*

(2) *$M(a, b)$ является полным многодольным графом с долями, состоящими не более чем из двух вершин.*

Лемма 4. *Пусть* Γ *– связный граф без* 3*-лап с некликовыми* μ*-подграфами, вершины* a*,* b*,* c *графа* Γ *попарно несмежны, а вершина* d *из* Γ *смежна среди них только с вершиной* a*. Тогда подграфы* $([a]\cap([b]\cup[c]))\setminus[d]$*,* $([d]\cap([b]\cup[c]))\setminus[a]$*,* $[a]\cap[b]\cap[d]$ *и* $[a]\cap[c]\cap[d]$ *не пусты и являются кликами.*

Лемма 4 суммирует часть результатов лемм 6, 7 и 8 из [1].

Лемма 5. ([1, лемма 9]) *Пусть* Γ *– связный граф без* 3*-лап с некликовыми* μ*-подграфами, вершины* a*,* b*,* c *графа* Γ *попарно несмежны, а вершина* d *из* Γ *смежна среди них только с вершиной* a*. Никакое ребро графа* Γ *не соединяет вершины из следующих пар подмножеств:* $M(a,b)\setminus[d]$ *и* $M(d,c)$*,* $M(d,b)\setminus[a]$ *и* $M(a,c)$*,* $M(a,c)\setminus[d]$ *и* $M(d,b)$*,* $M(d,c)\setminus[a]$ *и* $M(a,b)$*.*

Лемма 6. ([1, лемма 10]) *Пусть* Γ *– связный граф без* 3*-лап с некликовыми* μ*-подграфами, вершины* a*,* b*,* c *графа* Γ *попарно несмежны, а вершина* d *из* Γ *смежна среди них только с вершиной* a*. Если для вершины* $y\in[a]\cap[b]\cap[d]$ *существует несмежная с ней вершина из* $M(a,b)\setminus[d]$*, то* $[a]\cap[c]\cap[d]\subseteq[y]$*.*

Следующая лемма является простым следствием леммы 12 [1]. Для проверки утверждения леммы 7 достаточно в списке возможностей, указанном в лемме 12 [1], выбрать подграфы, удовлетворяющие легкому условию.

Лемма 7. *Пусть* Γ *– связный граф без* 3*-лап с некликовыми* μ*-подграфами, вершины* a*,* b*,* c *графа* Γ *попарно несмежны, а вершина* d *из* Γ *смежна среди них только с вершиной* a*. Предположим, что в* $[a]\cap[b]\cap[d]$ *нашлась вершина* y *такая, что* $M(a,b)\cup M(d,b)\subseteq y^{\perp}$*. Тогда граф* $M(a,b)\cup M(d,b)$ *изоморфен полному графу с числом вершин не меньшим четырех, из которого удалена пара смежных ребер, общая вершина которых лежит в* $[a]\cap[b]\cap[d]$*, а из двух оставшихся вершин одна составляет* $([a]\cap[b])\setminus[d]$*, а другая –* $([d]\cap[b])\setminus[a]$*.*

Сформулируем теперь результат пункта (2) леммы 13 [1].

Лемма 8. *Пусть* Γ *– связный граф без* 3*-лап с некликовыми* μ*-подграфами, вершины* a*,* b*,* c *графа* Γ *попарно несмежны, а вершина* d *из* Γ *смежна среди них только с вершиной* a*. Тогда любые две различные вершины из* $[a]\cap[b]\cap[d]$*, из которых хотя бы одна не содержит в своей замкнутой окрестности все множество* $M(a,b)\cup M(d,b)$*, не имеют общих смежных вершин из* $M(b,c)$*.*

Перейдем к доказательству результатов данной работы. Через Γ обозначим произвольный связный граф, удовлетворяющий условиям (i)–(iv), натягиваемый на одну свою 3-коклику и не натягиваемый на другую. Отметим, что Γ может не удовлетворять условию теоремы, – мы не требуем, чтобы каждая его вершина лежала в 3-коклике.

Лемма 9. *Пусть* $\Theta = \{u, v, w\}$ *– произвольная* 3*-коклика, на которую натягивается граф* Γ*. Тогда*

(1) $V(\Gamma) \setminus (u^\perp \cup v^\perp) = \{w\}$*;*

(2) $V(\Gamma) \setminus w^\perp = \{u, v\} \cup M(u, v)$*;*

(3) *если* a *и* b *– несмежные вершины из* $M(u, v)$*, то* $V(\Gamma)\setminus(a^\perp \cup b^\perp) = \{w\}$*.*

(4) Θ *не пересекается ни с одной* 3*-кокликой, на которую граф не натягивается.*

Доказательство. Утверждения (1) и (2) следуют из того, что Γ редуцирован и натягивается на 3-коклику Θ.

Утверждение (3) следует из прямоугольного соотношения и (1).

Утверждение (4) следует из (1) и (2).

Лемма 10. *Граф* Γ *не содержит* 4*-коклик, а любая* 3*-коклика, на которую граф* Γ *не натягивается, содержится в некоторой* 4×3*-решетке.*

Доказательство. Пусть $\Theta = \{u, v, w\}$ – 3-коклика, на которую натягивается граф Γ.

Докажем сначала, что Γ не содержит 4-коклик. Если $\widetilde{\Theta}$ – произвольная 4-коклика из Γ, то легко видеть, что граф Γ не натягивается ни на какую 3-коклику из $\widetilde{\Theta}$. Следовательно, в силу пункта (4) леммы 9 ни одна из вершин u, v или w не содержится ни в какой 4-коклике в Γ. Тогда $\widetilde{\Theta}$ лежит в объединении μ-подграфов, образованных вершинами из u, v и w. А значит, некоторые два из них содержат три вершины из $\widetilde{\Theta}$, тогда если x – это вершина из Θ такая, что $[x]$ содержит оба указанных μ-подграфа, то $\{x\} \cup (\widetilde{\Theta} \cap [x])$ содержит 3-лапу, противоречие.

Пусть $\widehat{\Theta} = \{a, b, c\}$ – 3-коклика, на которую граф Γ не натягивается. Согласно пункту (4) леммы 9 коклики Θ и $\widehat{\Theta}$ не пересекаются, более того, в силу пункта (3) леммы 9 каждый μ-подграф вершин из Θ содержит точно по одной вершине из $\widehat{\Theta}$. Отсюда каждый μ-подграф вершин из $\widehat{\Theta}$ содержит точно по одной вершине из Θ. Таким образом, объединение любой пары 3-коклик из Γ, на одну из которых граф натягивается, а на другую нет, порождает 6-цикл, в котором вершины 3-коклик чередуются. Будем считать, что $aubwcva$ – 6-цикл из Γ.

Пусть d – вершина, не лежащая в подграфе, натянутом на вершины коклики $\widehat{\Theta}$. Поскольку граф Γ не содержит 4-коклик, вершина d смежна с одной из вершин коклики $\widehat{\Theta}$, и легко видеть, что точно с одной. Пусть это вершина a. Поскольку $\{b, c, d\}$ – 3-коклика, на которую граф не натягивается, $\{b, c, d\} \cup \Theta$ – 6-цикл. Учитывая принятое ранее соглашение о смежности вершин из Θ с вершинами из $\widehat{\Theta}$, будем иметь $d \in ([u] \cap [v]) \setminus [w]$.

В силу леммы 4 из двух несмежных вершин в $M(a,b)$ одна должна принадлежать $M(a,b)\setminus[d]$, а другая $[a]\cap[b]\cap[d]$. Аналогично, из двух несмежных вершин в $M(d,b)$ одна обязана лежать в $M(d,b)\setminus[a]$, а другая в $[a]\cap[b]\cap[d]$. Используя лемму 6, отсюда получаем, что если некоторая вершина из $[a]\cap[b]\cap[d]$ не содержит в своей замкнутой окрестности весь подграф $M(a,b)\cup M(d,b)$, то она смежна со всеми вершинами из $[a]\cap[c]\cap[d]$. Вершины u и v не смежны и лежат соответственно в $[a]\cap[b]\cap[d]$ и $[a]\cap[c]\cap[d]$. Из сказанного следует, что $u^\perp\supseteq M(a,b)\cup M(d,b)$. Аналогично доказывается, что $v^\perp\supseteq M(a,c)\cup M(a,d)$.

Из леммы 7 следует, что если в $[a]\cap[b]\cap[d]$ найдется вершина, содержащая в своей замкнутой окрестности все множество $M(a,b)\cup M(d,b)$, то найдутся вершины $y_1\in[a]\cap[b]\cap[d]$, $x_{y_1}\in M(a,b)\setminus[d]$ и $z_{y_1}\in M(b,d)\setminus[a]$ такие, что среди них смежны только x_{y_1} и z_{y_1}. Симметричным образом, выберем вершины $y_2\in[a]\cap[c]\cap[d]$, $x_{y_2}\in M(a,c)\setminus[d]$ и $z_{y_2}\in M(c,d)\setminus[a]$ такие, что среди них смежны только x_{y_2} и z_{y_2}. Вершины x_{y_1} и x_{y_2}, а также z_{y_1} и z_{y_2} смежны в силу леммы 4, а вершины y_1 и y_2 – в силу леммы 6. Кроме указанных других смежностей между рассматриваемыми шестью вершинами нет, это следует из выбора этих вершин и леммы 5. Нетрудно видеть, что $\{u,v\}\cap\{x_{y_1},x_{y_2},y_1,y_2,z_{y_1},z_{y_2}\}=\emptyset$.

Покажем, что вершина w смежна со всеми вершинами в $M(b,c)$. Предположим, что нашлась вершина $\overline{w}\in M(b,c)$, не смежная с вершиной w. Тогда граф Γ не натягивается на 3-коклику $\{a,w,\overline{w}\}$, что противоречит пункту (4) леммы 9 – вершина w лежит в пересечении Θ и $\{a,w,\overline{w}\}$. Теперь мы можем выбрать пару несмежных вершин y_3 и x_{y_3} в $M(b,c)$, отличных от w.

Поскольку $M(b,c)\subseteq w^\perp$ и w не смежна с u и v, то $[u]\cap[v]\cap M(b,c)=\emptyset$. Согласно пункту (1) леммы 3 пары $[x_{y_1}]$ и $[y_1]$, $[x_{y_2}]$ и $[y_2]$, $[y_1]$ и $[z_{y_1}]$, $[y_2]$ и $[z_{y_2}]$ расщепляют $M(b,c)$. По лемме 8 имеем, что $[u]\cap[y_1]\cap M(b,c)=\emptyset$, аналогично $[v]\cap[y_2]\cap M(b,c)=\emptyset$. Теперь видно, что вершина y_3 смежна с y_i, x_j и z_j для некоторых $i\neq j$ из $\{1,2\}$, при этом x_{y_3} смежна с y_j, x_i и z_i. Других смежностей между вершинами x_{y_3}, y_3 и вершинами x_{y_1}, x_{y_1}, y_1, y_2, z_{y_1} и z_{y_2} нет. Таким образом, $\Delta=\{a,b,c,y_1,y_2,y_3,x_{y_1},x_{y_2},x_{y_3},z_{y_1},z_{y_2},z_{y_3}\}$ – это 4×3-решетка и $\Theta\subseteq\Delta$, что и требовалось доказать.

Введем новые обозначения. Пусть Σ – полный двудольный граф с долями $\Sigma'=\{\sigma^1,\dots,\sigma^m\}$ и $\Sigma''=\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\}$ мощности соответственно m и n. Если $\Delta=L(\Sigma)$ – $m\times n$-решетка и $\delta_i^j=\{\sigma^j,\sigma_i\}$, то δ_i^j – вершина графа Δ для любых $\sigma^j\in\Sigma'$ и $\sigma_i\in\Sigma''$. Максимальные клики графа Δ – это в точности множества всех ребер Σ, содержащих выбранную вершину из Σ. Следовательно, в Δ мы имеем два набора попарно непересекающихся клик (прямых) $\{\Delta_i\}$ и $\{\Delta^j\}$ соответственно из n и m элементов, где $\Delta_i=\{\delta_i^1,\dots,\delta_i^m\}$ и $\Delta^j=\{\delta_1^j,\dots,\delta_n^j\}$ для всех i,j таких, что $1\le i\le n$ и $1\le j\le m$. Каждая из вершин графа Δ определяет пару (определяется парой) клик (прямых), которым она инцидентна (проходящих через нее), т. е. $\Delta_i \cap \Delta^j = \{\delta_i^j\}$.

Пусть теперь Λ – произвольный граф, изоморфный $m \times n$-решетке Δ, где Δ определен, как выше, а $\varphi : \Delta \to \Lambda$ – изоморфизм. Положим $\lambda_i^j = \varphi(\delta_i^j)$, $\Lambda^j = \varphi(\Delta^j)$ и $\Lambda_i = \varphi(\Delta_i)$ для всех i, j таких, что $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$.

Лемма 11. *Если Δ – подграф из Γ, изоморфный $m \times n$-решетке с $m, n \geq 2$, а v – вершина из $\Gamma \setminus \Delta$, смежная с некоторой вершиной w графа Δ, то v смежна со всеми вершинами одной из прямых, проходящих через w.*

Доказательство. Пусть $w = \delta_1^1$. Тогда мы должны проверить, что $\Delta_1 \subseteq [v]$ или $\Delta^1 \subseteq [v]$. Предположим без ограничения общности, что $\delta_2^1 \notin [v]$, откуда $\Delta^1 \nsubseteq [v]$. Тогда $\{w, \delta_2^1, \delta_1^i, v\}$ не будет порождать 3-лапу для некоторого $i \geq 2$ только в том случае, когда $\Delta_1 \subseteq [v]$.

Лемма 12. *Пусть Δ – подграф из Γ, изоморфный $m \times n$-решетке с $m, n \geq 3$, и пусть вершина v из $\Gamma \setminus \Delta$ смежна со всеми вершинами из Δ_i и смежна с вершиной $\delta_{i_0}^j$ для некоторых различных i и i_0 таких, что $1 \leq i, i_0 \leq n$, и некоторого j, $1 \leq j \leq m$. Тогда $\Delta \cap [v] = \Delta_i \cup \Delta_{i_0}$.*

Доказательство. Для начала установим, что $\Delta_{i_0} \subset [v]$, Для любого j_0, отличного от j, $1 \leq j_0 \leq m$, вершины $\delta_{i_0}^{j_0}$ и δ_i^j не смежны и лежат в 3-коклике в Δ. В самом деле, выбрав $i' \notin \{i, i_0\}$ и $j' \notin \{j, j_0\}$, что можно сделать поскольку m и n не меньше 3, получим, что вершина $\delta_{i'}^{j'}$ не смежна с указанными вершинами. В таком случае вершина v смежна с вершиной $\delta_{i_0}^{j_0}$ для любого j_0, отличного от j, $1 \leq j_0 \leq m$. Действительно, $\{\delta_i^{j_0}, \delta_{i_0}^j, v\} \subset M(\delta_{i_0}^{j_0}, \delta_i^j)$ и $\delta_i^{j_0}$ и $\delta_{i_0}^j$ не смежны, откуда по пункту (2) леммы 3 вершина v смежна с $\delta_i^{j_0}$. Таким образом, $\Delta \cap [v] \supseteq \Delta_i \cup \Delta_{i_0}$.

Остается отметить, что если u – произвольная вершина из $\Delta \setminus (\Delta_i \cup \Delta_{i_0})$, то $(\Delta_i \cup \Delta_{i_0}) \setminus [u]$ содержит пару несмежных вершин. Поэтому если u смежна с v, то u лежит в 3-коклике в $[v]$, что противоречит отсутствию 3-лап. Этим доказано, что $\Delta \cap [v] \subseteq \Delta_i \cup \Delta_{i_0}$.

Лемма 13. *Пусть Δ – подграф из Γ, изоморфный $q \times 3$-решетке с $q \geq 3$, а $\{u_1, u_2, u_3\}$ – 3-коклика, на которую натягивается граф Γ. Тогда*

(1) *если $q = 3$ и $\{u_1, u_2, u_3\} \subseteq \Gamma \setminus \Delta$, то множество пересечений μ-подграфов вершин 3-коклики $\{u_1, u_2, u_3\}$ с Δ совпадает с одним из множеств параллельных прямых $\{\Delta_i | 1 \leq i \leq 3\}$ либо $\{\Delta^j | 1 \leq j \leq 3\}$;*

(2) *если $q \geq 4$, то множество пересечений μ-подграфов вершин 3-коклики $\{u_1, u_2, u_3\}$ с Δ совпадает с $\{\Delta_i | 1 \leq i \leq 3\}$;*

(3) *если* $q \geq 4$, *то для произвольной вершины* u *из* $\Gamma \setminus (\Delta \cup \{u_1, u_2, u_3\})$ *будем иметь, что либо* $[u] \cap \Delta = \Delta_k$ *для некоторого* k, $1 \leq k \leq 3$, *либо* $[u] \cap \Delta = \Delta_k \cup \Delta_l$ *для некоторых различных* k *и* l, $1 \leq k, l \leq 3$.

Доказательство. Будем доказывать пункты (1) и (2) одновременно. Но прежде отметим, что если $q \geq 4$, то условие $\{u_1, u_2, u_3\} \subseteq \Gamma \setminus \Delta$ выполнено в силу пункта (4) леммы 9. Итак, Δ – подграф графа Γ, изоморфный $q \times 3$-решетке такой, что $\{u_1, u_2, u_3\} \subseteq \Gamma \setminus \Delta$.

Если предположить, что для каждого i пересечение $M(u_i, u_{i+1}) \cap \Delta$ (индекс по модулю три) – клика, то в случае, когда Δ – это 3×3-решетка, в качестве набора из трех клик в Δ, покрывающих этот подграф, можно выбрать любой набор из указанных в формулировке пункта (1) настоящей леммы и никакой другой. Если же $q \geq 4$, то покрытие Δ тремя кликами существует и единственно, и оно также указано в пункте (2) формулировки. Таким образом, в данном случае утверждения (1) и (2) доказаны.

Допустим теперь, что $M(u_1, u_2)$ содержит пару несмежных вершин. Без ограничения общности предположим, что это δ_1^1 и δ_2^2. Тогда никакая из вершин, дополняющих пару вершин δ_1^1 и δ_2^2 до 3-коклики, не смежна ни с u_1, ни с u_2. Тогда, в частности, вершина δ_3^3 не лежит в $M(u_1, u_2) \cup M(u_1, u_3) \cup M(u_2, u_3)$. Это противоречит тому, что Γ натягивается на 3-коклику $\{u_1, u_2, u_3\}$. Тем самым утверждения (1) и (2) доказаны.

(3) Поскольку $\Gamma \setminus \{u_1, u_2, u_3\} \subseteq M(u_1, u_2) \cup M(u_1, u_3) \cup M(u_2, u_3)$, то $u \in M(u_i, u_j)$ для некоторых $i \neq j$ и $1 \leq i, j \leq 3$. Тогда согласно (2) для некоторого k, $1 \leq k \leq 3$, $\Delta_k \subseteq M(u_i, u_j)$, откуда с учетом пункта (2) леммы 3 получаем, что $|\Delta_k \cap [u]| \geq q - 1$. Если предположить, что $\Delta_k \not\subseteq [u]$, то в силу леммы 11 будем иметь, что $\Delta^l \subseteq [u]$ по всем l таким, что $\delta_k^l \in \Delta_k$. Тогда из того, что $q \geq 4$, следует, что $[u]$ содержит подграф из Δ, изоморфный 3×3-решетке, а, следовательно, и 3-коклику. Последнее противоречит отсутствию 3-лап в Γ. В итоге получаем, что $\Delta_k \subseteq [u]$. Если теперь $(\Delta \cap [u]) \setminus \Delta_k \neq \emptyset$, то в силу леммы 12 для некоторого l, отличного от k, будем иметь $\Delta \cap [u] = \Delta_k \cup \Delta_l$.

Лемма 14. *Пусть* Δ *– подграф графа* Γ, *изоморфный* $q \times 3$*-решетке с* $q \geq 3$ *такой, что если* u *– произвольная вершина из* $\Gamma \setminus \Delta$, *то* $[u] \cap \Delta$ *– это либо* Δ_k *для некоторого* $k \in \{1, 2, 3\}$, *либо* $\Delta_k \cup \Delta_l$ *для некоторых* $k, l \in \{1, 2, 3\}$. *Пусть также* w_1 *– вершина из* $\Gamma \setminus \Delta$. *Тогда либо* $[w_1] \cap \Delta = \Delta_k \cup \Delta_l$ *для некоторых различных* k *и* l *таких, что* $1 \leq k, l \leq 3$, *либо* $\Delta \cup \{w_1\}$ *содержится в некоторой* $(q+1) \times 3$*-решетке.*

Доказательство. Пусть $\{u_1, u_2, u_3\}$ – 3-коклика, на которую натягивается граф Γ.

Если $w_1 \in \{u_1, u_2, u_3\}$, то утверждение леммы следует из пунктов (1) и (2) леммы 13.

Пусть теперь $w_1 \in \Gamma \setminus (\Delta \cup \{u_1, u_2, u_3\})$. По условию если $[w_1] \cap \Delta$ не совпадает с объединением двух q-элементных прямых из $\{\Delta_i | 1 \le i \le 3\}$, то $\Delta \cap [w_1] = \Delta_k$ для некоторого k, $1 \le k \le 3$. Предположим без ограничения общности, что $k = 1$.

Рассмотрим μ-подграф вершин δ_2^1 и w_1. Предположим, что в $M(\delta_2^1, w_1)$ есть пара несмежных вершин v_1 и v_2, отличных от δ_1^1. Тогда, во-первых, эти вершины лежат вне Δ, во-вторых, в силу пункта (2) леммы 3 смежны с δ_1^1, и, следовательно, по условию леммы вершины v_1 и v_2 смежны со всеми вершинами $\Delta_1 \cup \Delta_2$ и не смежны ни с одной вершиной из Δ_3. Но в таком случае $\{\delta_1^1, \delta_3^1, v_1, v_2\}$ – 3-лапа. Отсюда можно заключить, что единственная пара несмежных вершин в $M(\delta_2^1, w_1)$ – это δ_1^1 и w_2, где w_2 – некоторая вершина из $M(\delta_2^1, w_1) \setminus \{\delta_1^1\}$. Из условия леммы вытекает, что $[w_2] \cap \Delta_1 = \emptyset$ и вершина w_2 смежна со всеми вершинами Δ_2. Отсюда, поскольку $[w_1]$ содержит w_2 и не содержит ни одной вершины из $\Delta_2 \cup \Delta_3$, w_2 не смежна ни с одной вершиной в Δ_3. Действительно, в противном случае $\{w_2, w_1, x, y\}$ – 3-лапа, где $x \in [w_2] \cap \Delta_3$, а $y \in \Delta_2 \setminus [x]$.

Аналогично выберем w_3 – вершину из $M(\delta_3^1, w_1)$, не смежную с δ_1^1, такую, что $[w_3] \cap \Delta = \Delta_3$. Вершины w_2 и w_3 смежны, так как они смежны с w_1, и $\Delta_1 \cap ([w_2] \cup [w_3]) = \emptyset$. Для завершения доказательства остается заметить, что подграф $\Delta \cup \{w_1, w_2, w_3\}$ изоморфен $(q+1) \times 3$-решетке. Лемма доказана.

Пусть Δ – подграф некоторого графа без 3-лап Ω, изоморфный $q \times 3$-решетке с $q \ge 3$. Скажем, что Δ *связан с дополнением по правилу* 6*-цикла*, если $\Omega \setminus \Delta$ разбивается на три множества C_1, C_2 и C_3 так, что $\Delta_i \approx C_i$ и $C_i \approx \Delta_{i+1}$ (индекс по модулю 3) для каждого i, $1 \le i \le 3$. Заметим, что в этом случае каждое C_i – клика, а граф Ω разбивается на три клики – $\{C_i \cup \Delta_i \mid 1 \le i \le 3\}$.

Лемма 15. *Пусть Δ – подграф графа Γ, изоморфный $q \times 3$-решетке с $q \ge 4$, не содержащийся ни в каком подграфе графа Γ, изоморфном $(q+1) \times 3$-решетке. Тогда Δ связан с дополнением по правилу* 6*-цикла.*

Доказательство. Положим $C_i = [\Delta_i] \cap [\Delta_{i+1}]$ (индекс по модулю 3). Применяя лемму 14, получим, что Δ связан с дополнением по правилу 6-цикла.

Лемма 16. *Граф Γ разбивается на* 3 *клики. Кроме того, если Δ – подграф, изоморфный* 3×3*-решетке, не содержащийся ни в каком подграфе графа Γ, изоморфном* 4×3*-решетке, то Δ связан с дополнением по правилу* 6*-цикла.*

Доказательство. Поскольку граф Γ не натягивается на некоторую свою 3-коклику, то в силу леммы 10 он содержит подграф, изоморфный 4×3-решетке. Следовательно, Γ содержит подграф, максимальный относительно свойства быть изоморфным $p \times 3$-решетке для некоторого p, большего трех. Откуда с учетом леммы 15 получаем, что Γ разбивается на три клики, обозначим их Γ_1, Γ_2 и Γ_3. Предположим без ограничения общности, что $\Delta_i \subseteq \Gamma_i$ для каждого i, $1 \leq i \leq 3$. Ясно, что для каждого i окрестность любой вершины $u \in \Gamma_i \setminus \Delta$ пересекает Δ по прямой Δ_i. В силу леммы 12 отсюда следует, что к графу Γ и его подграфу Δ применима лемма 14. Но Δ по условию не может содержаться ни в какой 4×3-решетке, следовательно, для любой вершины $u \in \Gamma \setminus \Delta$ имеем $[u] \cap \Delta = \Delta_k \cup \Delta_l$, для некоторых различных k и l, $1 \leq k, l \leq 3$. То, что Δ связан с дополнением по правилу 6-цикла, теперь доказывается как в лемме 15.

Лемма 17. *Пусть Λ и Σ – различные подграфы графа Γ, изоморфные соответственно $p \times 3$-решетке и $q \times 3$-решетке, где $p, q \geq 3$, не содержащиеся ни в каком подграфе графа Γ, изоморфном соответственно $(p+1) \times 3$-решетке и $(q+1) \times 3$-решетке. Тогда Λ и Σ не пересекаются.*

Доказательство. В силу лемм 15 и 16 в объединении окрестностей любой пары несмежных вершин из дополнения до Λ в Σ содержится весь граф Λ. Откуда следует, что любая несмежная с ними вершина лежит вне Λ. Вместе с тем для вершины $v \in \Sigma \setminus \Lambda$ множество $\Lambda \setminus [v]$ – клика. Из сказаного следует, что произвольная 3-коклика из Σ либо не пересекается с Λ, либо в нем содержится. В любой $q \times 3$-решетке с $q \geq 3$ отношение на вершинах принадлежать одной 3-коклике, очевидно, совпадает с отношением быть не смежными, а потому задает граф, дополнительный к данному. Как легко видеть, дополнительный граф к любой $q \times 3$-решетке с $q \geq 3$ связен. Откуда получаем, что либо Λ и Σ не пересекаются, либо один из них содержит другой. Второй случай противоречит условию. Следовательно, Λ и Σ не пересекаются. Что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть Λ и Σ – различные подграфы графа Γ, изоморфные $p \times 3$-решетке и $q \times 3$-решетке соответственно, где $p, q \geq 3$, а кроме того, Λ не содержится ни в каком подграфе графа Γ, изоморфном $(p+1) \times 3$-решетке. Тогда либо Λ и Σ не пересекаются, либо Λ содержит Σ.*

Лемма 18. *Пусть Γ удовлетворяет условию теоремы, тогда любая вершина графа Γ лежит в некотором подграфе, изоморфном 3×3-решетке.*

Доказательство. Пусть v_1 – произвольная вершина графа Γ. По условию она лежит в некоторой 3-коклике $\Theta = \{v_1, v_2, v_3\}$ из Γ. Для каждого i, $1 \leq i \leq 3$, выберем произвольную пару несмежных вершин w_i^1 и w_i^2 из $M(v_i, v_{i+1})$ (индекс по модулю 3). Тогда в силу пункта (1) леммы 3 граф

$W = \{w_1^1,\ w_1^2,\ w_2^1,\ w_2^2,\ w_3^1,\ w_3^2\}$ является графом валентности 2. Следовательно, либо W изоморфен 6-циклу, в этом случае $W \cup \Theta$ изоморфен 3×3-решетке, либо W является объединением двух независимых треугольников. Пусть $W^1 = \{w_1^1, w_2^1, w_3^1\}$ и $W^2 = \{w_1^2, w_2^2, w_3^2\}$ – треугольники. С учетом того что по лемме 16 граф Γ разбивается на три клики, обозначим их Γ_1, Γ_2 и Γ_3, последний случай невозможен. Действительно, поскольку вершины разных треугольников W^j не могут лежать в одной клике, то, как нетрудно видеть, $W^p \subseteq \Gamma_q$, для некоторых $1 \le p \le 2$ и $1 \le q \le 3$. Но поскольку Θ – 3-коклика, то некоторая вершина $v_r \in \Theta$ лежит в Γ_q. Это противоречит тому, что никакая вершина из Θ не содержит в своей окрестности целиком ни один из треугольников W^j. Этим доказано, что $\Sigma = W \cup \Theta$ является 3×3-решеткой.

Лемма 19. *Пусть Ξ – связный граф без 3-лап, в котором каждая вершина лежит в 3-коклике такой, что граф Ξ натягивается на эту 3-коклику, а все μ-подграфы этой 3-коклики являются кликами. Тогда Ξ изоморфен циркулянту $C(3n; 1, 2, \ldots, n-1)$, где $n > 1$.*

Доказательство. Заметим, во-первых, что число вершин графа Ξ делится на три, это легко следует из того, что каждая вершина лежит в 3-коклике с кликовыми μ-подграфами, более того, последние μ-подграфы равномощны. Докажем утверждение настоящей леммы индукцией по $n = \frac{|V(\Xi)|}{3}$. Ясно, что при $n = 2$ граф Ξ изоморфен 6-циклу, т. е. графу $C(6; 1)$. Выберем в Ξ произвольную вершину v_1 и какую-либо 3-коклику $\Theta = \{v_1, v_2, v_3\}$ из условия леммы, содержащую эту вершину. Тогда нетрудно видеть, что граф Ξ', полученный из Ξ удалением Θ, удовлетворяет условию настоящей леммы и содержит меньшее число вершин. Пусть φ – изоморфизм графа Ξ' на граф $C(3(n-1); 1, 2, \ldots, n-1)$. Заметим, что μ-подграфы вершин из Θ образуют разбиение графа Ξ' на три клики. Все такие разбиения графа $C(3(n-1); 1, 2, \ldots, n-1)$ переводятся друг в друга автоморфизмами этого графа, следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi(M(v_i, v_{i+1})) = \{i(n-1)+1, i(n-1)+2, \ldots, i(n-1)+n-1\}$, где мы полагаем, что вершины циркулянтов естественным образом помечены элементами кольца вычетов по модулю числа вершин циркулянта. Определим отображение $\psi : V(\Xi) \to V(C(3n; 1, 2, \ldots, n-1))$, по правилу $\psi(v_i) = in$ и $\psi(w) = i + \varphi(w)$ для вершины $w \in M(v_i, v_{i+1})$. Легко видеть, что это отображение задает изоморфизм графов Ξ и $C(3n; 1, 2, \ldots, n-1)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\Delta(1), \ldots, \Delta(n)$ – максимальный набор различных подграфов графа Γ такой, что каждый из подграфов $\Delta(j)$ изоморфен $k_j \times 3$-решетке, где k_j больше двух, при этом $\Delta(j)$ не содержится ни в каком подграфе, изоморфном $(k_j + 1) \times 3$-решетке. Тогда в силу лемм 10, 17 и 18 каждая вершина графа Г лежит точно в одном из этих графов. Рассмотрим теперь граф Ξ на множестве вершин $\Delta(j)_i$ по всем возможным i и j. Две такие вершины будем считать смежными, если они находятся в отношении $\approx$ как подмножества из Г. Из лемм 15–17 вытекает, что граф Ξ удовлетворяет условию леммы 19 и, следовательно, изоморфен циркулянту $C(3n; 1, 2, \ldots, n-1)$. Пусть φ – произвольный изоморфизм графа $C(3n; 1, 2, \ldots, n-1)$ на граф Ξ. Положим $q_j = |\varphi(j)|$ для всех $1 \leq j \leq n$. Тогда граф Г изоморфен графу $\Omega(n; q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Действительно, если две вершины v и w графа Г принадлежат соответственно $\Delta(l)_m$ и $\Delta(p)_q$ таким, что $l \neq p$, то v и w смежны в том и только в том случае, когда $\Delta(l)_m \approx \Delta(p)_q$. Объединение $\bigcup_{1 \leq i \leq 3} \varphi(in + j)$ порождает $q_j \times 3$-решетку. Сказанное с точностью до переобозначений практически повторяет определение $\Omega(n; q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Поскольку граф Г содержит 3-коклику, на которую он не натягивается, то в силу леммы 10 одно из q_j больше трех. Коль скоро граф Г содержит 3-коклику, на которую он натягивается, то одно из q_j равно трем. В самом деле вершины любой 3-коклики, на которую Г натягивается, обязаны лежать в одном из $\Delta(j)$, так как дополнение в $\Delta(j)$ до окрестности в Г любой вершины из $\Gamma \setminus \Delta(j)$ – клика.

Вместе с тем легко видеть, что граф $\Omega(n; q_1, q_2, \ldots, q_n)$ удовлетворяет условию из первой части формулировки настоящей теоремы, если и только если каждое из q_j больше двух, одно равно трем, а другое больше трех. Теорема доказана.

Литература

1. Вакула И. А., Кабанов В. В. О графах без 3-лап с некликовыми μ-подграфами // Дискретный анализ и исследование операций. (В печати).

2. Вакула И. А. О графах без 3-лап с некликовыми μ-подграфами // Алгебра и линейная оптимизация: Тр. Международ. конф. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2002. С. 66–80.

Статья поступила 15.12.2004 г.