УДК 517.929

Ю. Ф. Долгий

АСИМПТОТИКИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

1. Введение

При построении асимптотических разложений для решений линейной системы функционально-дифференциальных уравнений используются асимптотики характеристических показателей [1–4]. При описании системы функционально-дифференциальных уравнений в функциональном пространстве состояний [5] знание характеристических показателей требуется при построении ее канонического разложения [1, 4]. Последнее разложение используется в теории оптимальной стабилизации систем функционально-дифференциальных уравнений [6] для нахождения условий стабилизируемости системы и построения оптимального стабилизирующего управления [7–10]. Приведенные в данной работе асимптотики характеристических показателей могут быть использованы для оценки точности приближенных стабилизирующих управлений, которые строятся для конечномерных подсистем канонических разложений системы функционально-дифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная система функционально-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-r_0}^{0} d_\vartheta \eta_0\,(\vartheta)\, x\,(t+\vartheta) + \int_{-r_1}^{0} d_\vartheta \eta_1\,(\vartheta)\,\frac{dx(t+\vartheta)}{dt}, \qquad (2.1)$$

где $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; матричные функции η_0, η_1 имеют ограниченные вариации на $[-r_0, 0]$ и $[-r_1, 0]$ соответственно, $0 < r_0 < +\infty$, $0 < r_1 < +\infty$, $\eta_0\,(0) = 0$, $\eta_1\,(0) = \eta_1\,(-0) = 0$.

Характеристическими показателями указанной системы будем называть корни характеристического уравнения

$$\widehat{D}(\lambda) = \det\left(\lambda I_n - \int_{-r_0}^{0} d_\vartheta \eta_0\,(\vartheta)\exp(\lambda\vartheta) - \lambda\int_{-r_1}^{0} d_\vartheta \eta_1\,(\vartheta)\exp(\lambda\vartheta)\right) = 0, \quad (2.2)$$

*Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 22 «Процессы управления» и гранта РФФИ № 06-01-00399.

где $\lambda \in \mathbb{C}$, I_n – единичная матрица порядка n. Требуется найти асимптотические формулы для больших по модулю корней этого уравнения.

Решение указанной задачи получено для отдельных характеристических уравнений с функциями $\widehat{D}$, описываемыми квазиполиномами [2, 3, 11–16]. Квазиполиномами задаются характеристические уравнения для функционально-дифференциальных уравнений (2.1) с дискретными мерами Стилтьеса η_0 и η_1, которые имеют конечное число точек разрыва. Наиболее изучен случай, когда квазиполиномы имеют соизмеримые показатели экспонент. В общей постановке задачи о нахождении асимптотик больших по модулю корней характеристических уравнений, представленной в данной работе, функции $\widehat{D}$ являются целыми. При изучении проблемы асимптотического поведения нулей целых функций мы будем опираться на специальные свойства их аналитического определения.

3. Целые функции экспоненциального типа

Целая функция является функцией экспоненциального типа, если ее порядок ρ меньше или равен единице, в последнем случае тип функции σ должен быть конечен [17, с. 152]. При изучении корней характеристического уравнения функции $\widehat{D}$ будем ставить в соответствие функцию D, полагая $D(\lambda) = \exp(nr\lambda)\widehat{D}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $r = \max(r_0, r_1)$. Нули этих функций, очевидно, совпадают.

Теорема 3.1. *Пусть матричные функции η_0, η_1 имеют ограниченные вариации на $[-r_0, 0]$ и $[-r_1, 0]$ соответственно, $\eta_0(0) = 0$, $\eta_1(0) = \eta_1(-0) = 0$, а также*

$$\int_{-r_1}^{0} d_\vartheta \eta_1(\vartheta)\,(\vartheta + r)^{k-1} = o\big(r^{k-1}\big) \tag{3.1}$$

при $k \to +\infty$. Тогда характеристическое уравнение (2.2) *порождается целой функцией D экспоненциального типа.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу-функцию A, определенную формулой

$$A(\lambda) = \lambda \exp(\lambda r) I_n - \int_{-r_0}^{0} d_\vartheta \eta_0(\vartheta) \exp(\lambda(\vartheta + r)) - \lambda \int_{-r_1}^{0} d_\vartheta \eta_1(\vartheta) \exp(\lambda(\vartheta + r)),$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$. Ее элементы являются целыми функциями. Поэтому она допускает представление

$$A(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \lambda^k, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

коэффициенты которого определяются формулами $A_0 = \eta_0\,(-r_0)$,

$$A_k = \frac{1}{(k-1)!}\left(r^{k-1}I_n - k^{-1}\int_{-r_0}^{0} d_\vartheta \eta_0\,(\vartheta)\,(\vartheta + r)^k - \int_{-r_1}^{0} d_\vartheta \eta_1\,(\vartheta)\,(\vartheta + r)^{k-1}\right),$$

$k \geq 1$. При выполнении условий теоремы имеют место асимптотические формулы

$$A_k = \frac{r^{k-1}}{(k-1)!}(I_n + o(1)), \quad k \to +\infty.$$

Тогда для целой функции D справедливо представление

$$D(\lambda) = detA(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \lambda^k, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

коэффициенты которого определяются асимптотическими формулами

$$a_k = \frac{(nr)^{k-n}}{(k-n)!}(1 + o(1)),\ k \to +\infty.$$

Используя известные формулы [18, с. 12], находим порядок роста и тип функции D. Имеем

$$\varrho = \lim_{k\to+\infty} \frac{k \ln(k)}{\ln|1/a_k|} = 1, \quad \sigma = e^{-1} \lim_{k\to+\infty}\left(k\sqrt[k]{|a_k|}\right) = nr.$$

Значит, целая функция D является функцией экспоненциального типа.

Можно показать, что условие (3.1) выполняется для абсолютно непрерывных ядер Стилтьеса с ограниченными в существенном производными, а также для дискретных ядер с конечным числом точек разрыва.

Если функция D имеет бесконечное число нулей λ_1, $\lambda_2, \ldots$, то [17, с. 17] $\limsup\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k}{|\lambda_k|} \leq nre$. Следовательно, имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_N^{-1} = O(N^{-1}), \quad N \to +\infty.$$

4. Асимптотики характеристических показателей уравнений с сосредоточенными запаздываниями

Для систем уравнений (2.1) с дискретными ядрами Стилтьеса, имеющих конечное число точек разрыва, функция $\widehat{D}$ имеет вид

$$\widehat{D}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{kj}\lambda^k \exp(-\tau_j\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где a_{kj} ($k = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,m}$) – вещественные коэффициенты, $a_{n0} = 1$; $0 = \tau_0 < < \tau_1, \ldots, < \tau_m$. Асимптотики нулей различных классов квазиполиномов описаны в работах [2, 3, 11–16]. В настоящей работе предлагается общая методика нахождения таких асимптотик.

Для нахождения больших по модулю корней характеристического уравнения преобразуем его к виду

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{kj}\lambda^{k-n}\exp((\tau_m - \tau_j)\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.1}$$

Рассмотрим уравнение

$$\Delta(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{m} a_{nj}\varepsilon^{\tau_m - \tau_j} = 0, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}. \tag{4.2}$$

Все корни этого уравнения лежат в ограниченной области комплексной плоскости.

Введем замены

$$z = \lambda^{-1}, \quad \varepsilon = \exp(\lambda), \quad z, \lambda, \varepsilon \in \mathbb{C}, \tag{4.3}$$

и вспомогательное уравнение

$$\widetilde{D}(z,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{kj} z^{n-k}\varepsilon^{\tau_m - \tau_j} = 0, \quad z, \varepsilon \in \mathbb{C}. \tag{4.4}$$

Для существования больших по модулю корней уравнения (4.1) необходимо, чтобы уравнение (4.2) имело корень. Через ε_0 обозначим произвольный корень этого уравнения. При выполнении условия $d\Delta(\varepsilon_0)/d\varepsilon \neq 0$ этот корень будем называть простым. Вопросы существования и вычисления больших по модулю корней характеристического уравнения тесно связаны с вопросами разрешимости уравнения (4.4) в области комплексных чисел в малой окрестности точки $(0, \varepsilon_0)$.

Теорема 4.1. *Каждому простому корню $\varepsilon_0 \neq 0$ уравнения* (4.2) *отвечает счетная последовательность корней уравнения* (4.1), *описываемая асимптотической формулой*

$$\lambda_N^{-1} = \chi(1/(2\pi N i)), \quad N \to +\infty.$$

Здесь χ – некоторая аналитическая функция в малой окрестности точки $\mu = 0$, $\chi(0) = 0$, $i = \sqrt{-1}$.

Доказательство. В малой окрестности точки $(0,\varepsilon_0)$ функция $\widetilde{D}$ является аналитической и удовлетворяет условиям теоремы о существовании неявной функции [19, с. 27]. Тогда в некоторой окрестности этой точки уравнение (4.4) имеет единственное решение $\varepsilon = \varphi(z)$, удовлетворяющее условию $\varphi(0) = \varepsilon_0$. При этом функция φ является аналитической в некоторой окрестности точки $z = 0$. Учитывая замены (4.3), получим счетное число уравнений $z\ln(\varphi(z)) + 2\pi N i z = 1$, где $N = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Нас интересуют решения этих уравнений при больших значениях N. Введем малый параметр $\mu = (2\pi N i)^{-1}$ и рассмотрим вспомогательное уравнение

$$g(z,\mu) = z + \mu z\ln(\varphi(z)) - \mu = 0. \tag{4.5}$$

В малой окрестности точки $(0,0)$ функция g удовлетворяет условиям теоремы о существовании неявной функции [19, с. 27]. Тогда в некоторой окрестности точки $\mu = 0$ последнее уравнение имеет единственное решение $z = \chi(\mu)$, удовлетворяющее условию $\chi(0) = 0$. При этом функция χ является аналитической в некоторой окрестности точки $\mu = 0$. Учитывая проведенные замены, заканчиваем доказательство теоремы.

При использовании приближенных асимптотических формул для корней характеристического уравнения можно функцию χ заменить конечным отрезком степенного ряда в ее разложении в окрестности точки $\mu = 0$. Для нахождения коэффициентов этого разложения достаточно ограничиться вычислением коэффициентов конечного отрезка степенного ряда функции φ в ее разложении в окрестности точки $z = 0$.

Пример 4.1. Дано скалярное дифференциальное уравнение с запаздыванием нейтрального типа

$$\frac{dx(t)}{dt} + a\frac{dx(t-1)}{dt} + bx(t-1) = 0, \quad a \neq 0,\ b \neq 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda + (a\lambda + b)\exp(-\lambda) = 0$. Находим функцию $\varepsilon = \varphi(z) = -a - bz$ и составляем уравнение (4.5)

$$g(z,\mu) = z + \mu z\ln(-a - bz) - \mu = 0.$$

Решение последнего уравнения определяем в форме асимптотического разложения

$$z = \chi(\mu) = \mu + z_2\mu^2 + z_3\mu^3 + z_4\mu^4 + O(\mu^5).$$

Находим

$$z_2 = -\ln(-a), \quad z_3 = -b/a + \ln^2(-a), \quad z_4 = 3(b/a)\ln(-a) + b^2/(2a^2) - \ln^3(-a)$$

и асимптотику корней характеристического уравнения

$$\lambda_N^{-1} = (2\pi Ni)^{-1} + z_2(2\pi Ni)^{-2} + z_3(2\pi Ni)^{-3} + z_4(2\pi Ni)^{-4} + O(N^{-5}), \quad N \to \infty.$$

Теорема 4.2. *Пусть* $a_{nm} = 0$*,* $a_{nm-1} \neq 0$*,* $a_{n-1m} \neq 0$*. Тогда существует счетная последовательность корней уравнения* (4.1)*, описываемая асимптотической формулой*

$$\lambda_N^{-1} = \frac{1}{2\pi Ni}\xi\left((2\pi Ni)^{-1}, (2\pi Ni)^{-\sigma_1}, \ldots, (2\pi Ni)^{-\sigma_{m-1}}, -(2\pi Ni)^{-1}\ln(2\pi Ni)\right),$$

при $N \to +\infty$*. Здесь* ξ *– некоторая голоморфная функция в малой окрестности точки* $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m) = (0, 0, \ldots, 0)$*,* $\xi(0, 0, \ldots, 0) = \tau_m - \tau_{m-1}$ *и* $\sigma_k = (\tau_{m-1} - \tau_{m-1-k})/(\tau_m - \tau_{m-1})$*,* $k = \overline{1, m-1}$*.*

Доказательство. Произведем замены

$$\varepsilon = (\widetilde{\varepsilon}z)^{1/(\tau_m - \tau_{m-1})}, \quad z_k = z^{\sigma_k},\ k = \overline{1, m-1}, \tag{4.6}$$

и вспомогательное уравнение (4.4) преобразуем к виду

$$\check{D}\left(z, z_1, \ldots, z_{m-1}, \widetilde{\varepsilon}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{km} z^{n-1-k} + \widetilde{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n} a_{km-1} z^{n-k} + \\ + \widetilde{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-2} a_{kj} z^{n-k} z_{m-1-j} \widetilde{\varepsilon}^{\sigma_{m-1-j}} = 0, \quad z,\ z_1, \ldots,\ z_{m-1},\ \widetilde{\varepsilon} \in \mathbb{C}. \tag{4.7}$$

В малой окрестности точки $(0, 0, \ldots, 0, \widetilde{\varepsilon}_0)$, $\widetilde{\varepsilon}_0 = -a_{n-1m}/a_{nm-1} \neq 0$, функция $\check{D}$ является голоморфной и удовлетворяет условиям теоремы о существовании неявной функции [19, с. 27]. Тогда в некоторой окрестности этой точки уравнение (4.7) имеет единственное решение $\widetilde{\varepsilon} = \psi(z, z_1, \ldots, z_{m-1})$, удовлетворяющее условию $\psi(0, 0, \ldots, 0) = \widetilde{\varepsilon}_0$. При этом функция ψ является голоморфной в некоторой окрестности точки $(z, z_1, \ldots, z_{m-1}) = (0, 0, \ldots, 0)$. Учитывая замены (4.6), получим счетное число уравнений

$$z\ln(z) + z\ln(\psi(z, z_1, \ldots, z_{m-1})) + 2\pi Niz = \tau_m - \tau_{m-1},$$

где $N = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Введем малый параметр $\mu = (2\pi Ni)^{-1}$ и положим $z = \mu p$. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$G(p, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m) = p\left(1 + \mu_0\ln(p) + \mu_m\right) + \\ + p\mu_0\ln\left(\psi\left(\mu_0 p, \mu_1 p^{\sigma_1}, \ldots, \mu_{m-1}p^{\sigma_{m-1}}\right)\right) - (\tau_m - \tau_{m-1}) = 0. \tag{4.8}$$

Здесь $\mu_0 = \mu$, $\mu_k = \mu^{\sigma_k}$, $k = \overline{1, m-1}$, $\mu_m = \mu \ln(\mu)$. В малой окрестности точки $(p_0, 0, 0 \ldots, 0)$, $p_0 = \tau_m - \tau_{m-1}$, функция G является голоморфной и удовлетворяет условиям теоремы о существовании неявной функции [19, с. 27]. Тогда в некоторой окрестности точки $(p, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m) = (p_0, 0, 0, \ldots, 0)$ последнее уравнение имеет единственное решение $p = \xi(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m)$, удовлетворяющее условию $\xi(0, 0 \ldots, 0) = p_0$. При этом функция ξ является голоморфной в некоторой окрестности точки $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m) = (0, 0, \ldots, 0)$. Учитывая проведенные замены, заканчиваем доказательство теоремы.

При использовании приближенных асимптотических формул для корней характеристического уравнения голоморфные функции можно заменять конечными отрезками степенных рядов.

Пример 4.2. Дано скалярное дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_2 x(t) + b_1 \frac{dx(t-1)}{dt} + b_2 x(t-1) = 0, \quad b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + a_2 + (b_1\lambda + b_2)\exp(-\lambda) = 0$. Используя замены (4.6), преобразуем его к виду $(1 + a_2 z^2)\widetilde{\varepsilon} + b_1 + b_2 z = 0$. Находим функцию $\widetilde{\varepsilon} = \psi(z) = -(b_1 + b_2 z)/(1 + a_2 z^2) = -b_1 - b_2 z + b_1 a_2 z^2 + O(z^3)$ и составляем уравнение (4.8)

$$G(p, \mu_0, \mu_1) = p(1 + \mu_0 \ln(p) + \mu_1) + \mu_0 p \ln(\psi(\mu_0 p)) - 1 = 0.$$

Решение последнего уравнения ищем в форме асимптотического разложения

$$p = \xi(\mu_0, \mu_1) = 1 + p_{10}\mu_0 + p_{01}\mu_1 + p_{20}\mu_0^2 + p_{11}\mu_0\mu_1 + p_{02}\mu_1^2 + O\left(\left(\mu_0^2 + \mu_1^2\right)^{3/2}\right).$$

Находим $p_{10} = -\ln(-b_1)$, $p_{01} = -1$, $p_{20} = -b_2/b_1 + 2\ln(-b_1)$, $p_{11} = 1 + \ln(-b_1)$, $p_{02} = 1$ и асимптотику корней характеристического уравнения

$$\lambda_N^{-1} = (2\pi N i)^{-1} + p_{10}(2\pi N i)^{-2} - p_{01}(2\pi N i)^{-2}\ln(2\pi N i) + p_{20}(2\pi N i)^{-3} -$$
$$- p_{11}(2\pi N i)^{-3}\ln(2\pi N i) + p_{02}(2\pi N i)^{-3}\ln^2(2\pi N i) + o\left(N^{-3}\ln^2(N)\right),\ N \to \infty.$$

5. Асимптотики характеристических показателей уравнений с распределенными запаздываниями

Переходим к рассмотрению общей ситуации, когда меры Стилтьеса не являются дискретными. Пусть ядро Стилтьеса η допускает представление

$\eta = \eta^1 + \eta^2$, где η^1 имеет конечное число точек разрыва и порождает дискретную меру, η^2 порождает абсолютно непрерывную меру, производная которой является функцией с ограниченной вариацией. Тогда

$$\int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(\vartheta)\exp((\vartheta + r)\lambda) = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta^1(\vartheta)\exp((\vartheta + r)\lambda) +$$
$$+ \lambda^{-1}\left(\dot{\eta}^2(0)\exp(\lambda r) - \dot{\eta}^2(-r)\right) - \lambda^{-1}\int_{-r}^{0} d_\vartheta \dot{\eta}^2(\vartheta)\exp((\vartheta + r)\lambda).$$

Из последней формулы следует, что в области $\{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda) \le c, \lambda \in \mathbb{C}\}$, где c – некоторое вещественное число,

$$\int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(\vartheta)\exp((\vartheta + r)\lambda) = P(\lambda) + O(\lambda^{-1}).$$

Здесь матрица-функция P задается как линейная комбинация экспонент с матричными коэффициентами. Если ядро Стилтьеса $\dot{\eta}^2$ удовлетворяет указанным выше условиям для ядра η, то описаную процедуру можно продолжить.

Предположим, что ядра η_0, η_1 в области $\{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda) \le c, \lambda \in \mathbb{C}\}$ при больших по модулю λ удовлетворяют условиям, которые гарантируют наличие асимптотических представлений:

$$\int_{-r_0}^{0} d_\vartheta \eta_0(\vartheta)\exp((\vartheta + r)\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{-k} P_k^0(\lambda) + O(\lambda^{-m}),$$
$$\int_{-r_1}^{0} d_\vartheta \eta_1(\vartheta)\exp((\vartheta + r)\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \lambda^{-k} P_k^1(\lambda) + O(\lambda^{-m-1}).$$

Здесь матрицы-функции P_k^0, $k = \overline{0, m-1}$; P_k^1, $k = \overline{0, m}$, задаются как линейные комбинации экспоненциальных функций с различными показателями, имеющие постоянные матричные коэффициенты. При нахождении больших по модулю корней характеристическое уравнение в области $\{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda) \le \le c, \lambda \in \mathbb{C}\}$ преобразуется к виду

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{M} b_{kj}\lambda^{-k}\exp(\beta_j\lambda) + O(\lambda^{-m-1}) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $0 = \beta_0 < \beta_1, \ldots, < \beta_M$. При нахождении асимптотик корней последнего характеристического уравнения можно использовать методики, предложенные для квазиполиномов. Принципиальное отличие этого случая состоит в том, что используемые в теоремах 4.1 и 4.2 функции в данной ситуации имеют конечную гладкость.

Пример 5.1. Дано скалярное дифференциальное уравнение с распределенным запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\int_{-1}^{0} \cos\left(\pi\vartheta^2\right) x\left(t+\vartheta\right) d\vartheta.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda - a\int_{-1}^{0} \cos\left(\pi\vartheta^2\right) \exp(\lambda\vartheta)\, d\vartheta = 0.$$

В области $\{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda) \leq c, \lambda \in \mathbb{C}\}$, где c – произвольное вещественное число, используя асимптотическую формулу

$$\int_{-1}^{0} \cos\left(\pi\vartheta^2\right) \exp(\lambda\vartheta)\, d\vartheta = \lambda^{-1}(\exp(\lambda)+1) - 4\pi^2\lambda^{-3} + O\left(\lambda^{-4}\right)$$

и замены (4.3), $\varepsilon = z^2\widetilde{\varepsilon}$, преобразуем характеристическое уравнение к виду $\widetilde{\varepsilon} - a\left(1 + z^2\widetilde{\varepsilon}\right) + 4\pi^2 z^2 a + O\left(z^3\right) = 0$. Находим функцию $\widetilde{\varepsilon} = \psi(z) = a + \left(a - 4\pi^2\right) z^2 a + O\left(z^3\right)$ и составляем уравнение (4.8)

$$G(p,\mu_0,\mu_1) = p(1 + 2\mu_0\ln(p) + 2\mu_1) + \mu_0 p\ln(\psi(\mu_0 p)) - 1 = 0.$$

Решение последнего уравнения ищем в форме асимптотического разложения:

$$p = \xi(\mu_0,\mu_1) = 1 + p_{10}\mu_0 + p_{01}\mu_1 + p_{20}\mu_0^2 + p_{11}\mu_0\mu_1 + p_{02}\mu_1^2 + O\left(\left(\mu_0^2+\mu_1^2\right)^{3/2}\right).$$

Находим $p_{10} = -\ln(a)$, $p_{01} = -2$, $p_{20} = 2\ln(a) + \ln^2(a)$, $p_{11} = 4(1+\ln(a))$, $p_{02} = 4$ и асимптотику корней характеристического уравнения

$$\lambda_N^{-1} = (2\pi Ni)^{-1} - (\ln(a) + 2\ln(2\pi Ni))\,(2\pi Ni)^{-2} + \ln(a)\,(2+\ln(a))\,(2\pi Ni)^{-3} - \\ - 4\,(1+\ln(a) - \ln(2\pi Ni))\,(2\pi Ni)^{-3}\ln(2\pi Ni) + o\left(N^{-3}\ln^2(N)\right),\ N\to\infty.$$

Литература

1. Шиманов С. Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 102–116.

2. Зверкин А. М. Разложение в ряд решений линейных дифференциально-разностных уравнений // Тр. семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., 1965. Т. 3. С. 3–38.

3. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

5. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1959.

6. Красовский Н. Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 1. С. 39–51.

7. Красовский Н. Н., Осипов Ю. С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.

8. Осипов Ю. С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 5. С. 605–618.

9. Маркушин Е. М., Шиманов С. Н. Приближенное решение задачи аналитического конструирования регулятора для уравнения с запаздыванием // Там же. 1966. Т. 2, № 8. С. 1018–1026.

10. Маркушин Е. М., Шиманов С. Н. Приближенное решение задачи аналитического конструирования регулятора для систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1968. Т. 29, № 3. С. 13–20.

11. Пинии Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М.: Иностр. лит., 1961.

12. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющим аргументом. М.: Наука, 1971.

13. Sutherland A. B. Serie for the distant zeros of exponential polynomials // Proc. London Math. Soc. (3). 1959. Vol. 9, № 33. P. 150–160.

14. Громова П. С. Асимптотика больших по модулю корней квазиполиномов, лежащих вблизи мнимой оси // Тр. семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., 1968. Т. 6. С. 109–124.

15. Неймарк Ю. И. D-разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линеаризованных систем) // Прикладная математика и механика. 1949. Т. 13. С. 349–380.

16. Чистяков А. В. К вопросу о множестве корней квазиполинома с несоизмеримыми показателями // Краевые задачи. Пермь: Перм. политехи. ин-т, 1986. С. 32–35.

17. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. Дальнейшее построение теории. М.: Наука, 1968.

18. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983.

19. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.