УДК 517.9 : 519.62

В. Г. Пименов, Д. А. Короткий

О РЕШЕНИИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРЕЖЕНИЕМ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

1. Введение

Математическая теория дифференциальных уравнений с запаздыванием, бурно развивавшаяся в последние десятилетия [1–6], во многом приобрела законченный вид и сейчас активно применяется при моделировании различных объектов. Разработаны также численные алгоритмы решения уравнений с запаздыванием различных видов [7, 8].

В то же время уравнения с опережением времени практически не изучены, хотя упоминания о них встречаются давно, в основном в связи с классификацией уравнений с отклоняющимся аргументом [2, 9]. Причинами такого невнимания можно назвать отсутствие свойства «физической осуществимости» в математическом моделировании, а также сложность и зачастую некорректность математических постановок задач с опережением времени. Из общих результатов можно упомянуть результаты работ пермской школы [10], в которые, в частности, можно вложить и многие постановки задач с опережением, но эти результаты зачастую являются неконструктивными. Линейным уравнениям второго порядка с опережением и запаздыванием посвящена третья глава в книге [9].

Между тем интерес к задачам с одновременным наличием опережения и запаздывания обусловлен рядом задач, в которых такие системы появляются как необходимый объект изучения. Упомянем три такие задачи.

В теории управления движением, если система имеет запаздывание, то в необходимых условиях оптимальности в форме принципа максимума соответствующая сопряженная система будет иметь опережение [6, 11, 12].

В некоторых прикладных задачах, например из области электротехники, математические модели приводят к дифференциальным уравнениям с опережением и запаздыванием [3, 13–16].

В численных методах решения краевых задач одним из основных алгоритмов является метод прогонки [18–20], сводящий краевую задачу к начальной путем обращения времени [17]. Если система имела запаздывание, то при обращении времени возникнет опережение.

---

*Работа поддержана РФФИ (проекты № 05-01-00330, 05-01-00732).

Эти и другие модельные задачи дифференциальных систем с одновременным запаздыванием и опережением делают актуальным разработку методики подобных задач, причем по нашему убеждению, в силу сложности задач, основным инструментом решения должны стать численные методы.

В данной работе изучаются линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с опережением и запаздыванием. Для таких систем формулируется краевая задача на конечном промежутке времени. Для этой задачи исследуется вопрос о существовании и единственности решения, исследуются свойства решения, а также предлагаются методы приближенного нахождения этого решения.

Вопрос о существовании и единственности решения исследуется с помощью принципа сжимающих отображений. При этом условие, состоящее в том, что соответствующий показатель сжатия строго меньше единицы, выступает достаточным условием как для существования, так и для единственности решения рассматриваемой краевой задачи. Приводятся примеры, показывающие, что это достаточное условие является существенным условием, без него краевая задача может иметь несколько (и даже бесконечное число) решений, а может и не иметь решений. Приводятся также примеры, показывающие, что это условие не является необходимым условием как для существования, так и для единственности решения.

Показано, что решение сформулированной краевой задачи непрерывно зависит как от исходных данных (начальной функции, начального состояния системы, финальной функции), так и от матричных коэффициентов системы, при варьировании всех этих параметров в их естественных пространствах.

Доказаны теоремы о сходимости приближенных решений, найденных по явной разностной схеме Эйлера, к точному решению исходной дифференциальной задачи при стремлении шага разностной сетки к нулю. Приводятся также некоторые оценки, показывающие скорость сходимости приближенных решений к точному решению дифференциальной задачи.

В последнем разделе работы описываются результаты численного моделирования рассматриваемых краевых задач. Исходная дифференциальная задача аппроксимируется по явной разностной схеме Эйлера (из-за наличия опережения схема в целом является неявной). Получившаяся в результате аппроксимации система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) решается тремя различными итерационными методами: методом Гаусса–Зейделя, методом сопряженных градиентов и методом минимальных невязок. Результаты расчетов сравниваются между собой и сравниваются с точным решением исходной дифференциальной задачи. Для каждого из методов решения СЛАУ указаны условия их сходимости. Проведены вычислительные эксперименты и приведены сравнительные характеристики результатов вычислений.

2. Постановка задачи

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с опережением и запаздыванием следующего вида:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + C(t)x(t+\tau) + D(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{2.1}$$

где $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ – заданные непрерывные матрицы-функции (матрицы размерности $n \times n$, элементами которой являются непрерывные функции), определенные на заданном отрезке $[a, b]$ числовой прямой $\mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$; $D(\cdot)$ – известная непрерывная n-мерная вектор-функция, определенная на том же отрезке; τ – величина запаздывания и опережения (величины запаздывания и опережения считаются одинаковыми). Пусть заданы также какой-либо элемент $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и какие-либо непрерывные n-мерные вектор-функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, определенные на промежутках $[a-\tau, a)$ и $(b, b+\tau]$ соответственно. Будем считать, что вектор-функция $\varphi(\cdot)$ имеет конечный односторонний предел в точке $t = a$, а вектор-функция $\psi(\cdot)$ имеет конечный односторонний предел в точке $t = b$. Пусть также $\ell = b - a \geqslant \tau > 0$.

Под решением системы (2.1) будем понимать кусочно-непрерывную n-мерную вектор-функцию $x = x(t)$, $a - \tau \leqslant t \leqslant b + \tau$, которая непрерывна на отрезке $[a, b]$, почти во всех точках этого отрезка дифференцируема и удовлетворяет системе (2.1), в точке $t = a$ принимает значение x_0, на промежутке $[a-\tau, a)$ совпадает с функцией $\varphi(\cdot)$, а на промежутке $(b, b+\tau]$ совпадает с функцией $\psi(\cdot)$:

$$x(t) = \varphi(t),\ a - \tau \leqslant t < a; \quad x(a) = x_0; \quad x(t) = \psi(t),\ b < t \leqslant b + \tau. \tag{2.2}$$

Задачу нахождения решения системы (2.1), удовлетворяющего условиям (2.2), будем называть краевой задачей.

Требуется исследовать вопрос о существовании и единственности решения краевой задачи (2.1)–(2.2), исследовать свойства решения, а также разработать методы приближенного нахождения этого решения.

3. Теорема существования и единственности решения

Пусть X обозначает множество всех кусочно-непрерывных на отрезке $[a-\tau, b+\tau]$ n-мерных вектор-функций, которые непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют разрывы первого рода только в точках $t = a$ и $t = b$. На множестве X рассмотрим метрику

$$\rho_\lambda(x_1, x_2) = \sup\Big[e^{-\lambda t}\|x_1(t) - x_2(t)\| \ :\ a - \tau \leqslant t \leqslant b + \tau \Big]$$

и согласованную с ней норму

$$||x||_\lambda = \sup\Big[e^{-\lambda t}||x(t)|| \ : \ a-\tau \leqslant t \leqslant b+\tau\Big],$$

где $||\cdot||$ — какая-либо норма в $\mathbb{R}^n$; λ – какое-либо положительное число.

Во множестве X рассмотрим подмножество Ω, состоящее из всех функций, которые непрерывны на отрезке $[a,b]$ и совпадают с функциями $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ на полуинтервалах $[a-\tau,a)$ и $(b,b+\tau]$ соответственно:

$$\Omega = \Big\{ x \in X \ : \ x(t) = \varphi(t), \ t \in [a-\tau, a); \quad x(t) = \psi(t), \ t \in (b, b+\tau] \Big\}.$$

Из полноты пространства непрерывных функций $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ следует, что множество Ω с метрикой ρ_λ является полным метрическим пространством.

Рассмотрим оператор $T : \Omega \to \Omega$, определяемый равенством

$$(Tx)(t) = \varphi(t), \ a-\tau \leqslant t < a; \quad (Tx)(t) = \psi(t), \ b < t \leqslant b+\tau;$$

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_a^t \Big[A(\xi)x(\xi) + B(\xi)x(\xi-\tau) + C(\xi)x(\xi+\tau) + D(\xi)\Big]\,d\xi, \ a \leqslant t \leqslant b.$$

Включение $Tx \in \Omega$ следует из непрерывности интеграла с переменным верхним пределом для кусочно-непрерывной подынтегральной функции.

Найдем условия, при которых оператор T является сжимающим.

Для элементов x_1 и x_2 из Ω при $t \in [a,b]$ справедлива цепочка оценок

$$e^{-\lambda t}||\,(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)\,|| \leqslant$$

$$\leqslant \Big\| \int_a^t A(\xi)\Big[e^{-\lambda\xi}(x_1(\xi) - x_2(\xi))\Big]e^{-\lambda(t-\xi)}\,d\xi \Big\| +$$

$$+\Big\| \int_a^t B(\xi)\Big[e^{-\lambda(\xi-\tau)}(x_1(\xi-\tau) - x_2(\xi-\tau))\Big]e^{-\lambda(t-\xi+\tau)}\,d\xi \Big\| +$$

$$+\Big\| \int_a^t C(\xi)\Big[e^{-\lambda(\xi+\tau)}(x_1(\xi+\tau) - x_2(\xi+\tau))\Big]e^{-\lambda(t-\xi-\tau)}\,d\xi \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\,||A||_C \int_0^{t-a} e^{-\lambda u}\,du + ||B||_C \int_\tau^{t-a+\tau} e^{-\lambda u}\,du +$$

$$+ ||C||_C \int_{a+\tau-t}^{\tau} e^{\lambda u}\,du\Big]||x_1 - x_2||_\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\,||A||_C \frac{1-e^{-\lambda\ell}}{\lambda} + ||B||_C \frac{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(\ell+\tau)}}{\lambda} + ||C||_C \frac{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda(\tau-\ell)}}{\lambda}\Big]||x_1 - x_2||_\lambda.$$

Правая часть этой цепочки неравенств не зависит от $t \in [a,b]$, поэтому, взяв максимум по $t \in [a,b]$ в левой части этой цепочки неравенств, получим

$$\rho_\lambda(Tx_1, Tx_2) = \max_{a \leqslant t \leqslant b}\Big[\, e^{-\lambda t}\|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)\| \,\Big] \leqslant \sigma_\lambda \rho_\lambda(x_1, x_2),$$

$$\sigma_\lambda = \|A\|_C \frac{1 - e^{-\lambda \ell}}{\lambda} + \|B\|_C \frac{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(\ell+\tau)}}{\lambda} + \|C\|_C \frac{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda(\tau-\ell)}}{\lambda}.$$

Если при некотором $\lambda > 0$ выполняется условие

$$\sigma_\lambda < 1\ , \tag{3.1}$$

то оператор T является сжимающим на Ω.

При выполнении условия (3.1), согласно принципу сжимающих отображений [21], оператор T имеет единственную неподвижную точку. Эта неподвижная точка, как легко проверить, и является единственным решением исходной краевой задачи (2.1)–(2.2).

Сформулируем доказанное утверждение в виде теоремы.

Теорема 3.1. *Если при некотором* $\lambda > 0$ *выполняется условие* (3.1), *то краевая задача* (2.1)–(2.2) *имеет единственное решение.*

4. Примеры неединственности и несуществования решения

В связи с использованием условия (3.1) встает вопрос о его существенности. Ниже в примерах показано, что это условие существенно для единственности решения задачи.

Пример 4.1. Рассмотрим частный случай исходной задачи (2.1)–(2.2), когда $n = 1$. Пусть величина запаздывания τ укладывается ровно два раза в отрезок $[a,b]$, т. е. $b - a = 2\tau$, и сама задача имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = bx(t-\tau) + cx(t+\tau), & a = 0 \leqslant t \leqslant 2\tau = b; \\ x(t) = 0, & -\tau \leqslant t < 0; \\ x(0) = 0; & \\ x(t) = 0, & 2\tau < t \leqslant 3\tau. \end{cases} \tag{4.1}$$

Сразу отметим, что эта задача, очевидно, имеет тривиальное решение. Но она может иметь и много других решений. Выясним это. Сведем данную задачу к соответствующей задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений посредством замены

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t), & 0 \leqslant t \leqslant \tau; \\ x_2(t) = x(t+\tau), & 0 \leqslant t \leqslant \tau. \end{cases}$$

Система (4.1) равносильна следующей задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = cx_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \qquad x_1(0) = 0; \\ \dot{x}_2(t) = bx_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \qquad x_2(0) = x_1(\tau). \end{cases}$$

Найдем сначала общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Находим корни характеристического уравнения и соответствующие собственные векторы:

$$\lambda_1 = \sqrt{bc}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{bc}, \quad h_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{c} \\ \sqrt{b} \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{c} \\ \sqrt{b} \end{pmatrix}.$$

Предположим далее, что $b > 0$, $c < 0$, тогда удобно переписать

$$\lambda_1 = i\sqrt{-bc}\ , \quad \lambda_2 = -i\sqrt{-bc}\ , \quad h_1 = \begin{pmatrix} i\sqrt{-c} \\ \sqrt{b} \end{pmatrix},\ h_2 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{-c} \\ \sqrt{b} \end{pmatrix}.$$

Общее вещественное решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \gamma_1 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{-c} \cdot \sin(t\sqrt{-bc}) \\ \sqrt{b} \cdot \cos(t\sqrt{-bc}) \end{pmatrix} + \gamma_2 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{-c} \cdot \cos(t\sqrt{-bc}) \\ \sqrt{b} \cdot \sin(t\sqrt{-bc}) \end{pmatrix},$$

где γ_1 и γ_2 — произвольные вещественные константы.

Нетрудно проверить, что для выполнения первого начального условия $x_1(0) = 0$ следует положить $\gamma_2 = 0$, а для выполнения второго начального условия $x_2(0) = x_1(\tau)$ необходимо выполнить равенство

$$\sqrt{-c} \cdot \sin(\tau\sqrt{-bc}) = -\sqrt{b}. \tag{4.2}$$

Поскольку $(-\sqrt{b}/\sqrt{-c}) < 0$, то для определения из этого равенства τ необходимо выполнение неравенства $-1 \leqslant (-\sqrt{b}/\sqrt{-c})$ или, что то же самое, неравенства $b \leqslant -c$. Пусть неравенства $b > 0$, $c < 0$, $b \leqslant -c$ далее выполняются.

Решение соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно переписать в виде (переобозначим $\gamma = -\gamma_1$)

$$\begin{cases} x_1(t) = \gamma\sqrt{-c}\,\sin(t\sqrt{-bc}), & 0 \leqslant t \leqslant \tau; \\ x_2(t) = -\gamma\sqrt{b}\,\cos(t\sqrt{-bc}), & 0 \leqslant t \leqslant \tau. \end{cases}$$

Отсюда сразу вытекает, что при выполнении равенства (4.2) решение исходной краевой задачи (4.1) имеет следующий вид:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\tau, 0]; \\ \gamma\sqrt{-c}\,\sin(t\sqrt{-bc}), & t \in [0, \tau]; \\ -\gamma\sqrt{b}\,\cos((t-\tau)\sqrt{-bc}), & t \in [\tau, 2\tau]; \\ 0, & t \in (2\tau, 3\tau]. \end{cases}$$

Здесь γ — произвольная константа, значит, получено целое однопараметрическое семейство решений задачи (4.1). Равенству (4.2) всегда можно удовлетворить при

$$b > 0, \quad c < 0, \quad b \leqslant -c, \quad \tau = \frac{(-1)^k}{\sqrt{-bc}} \arcsin\Big(-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{-c}}\Big) + \frac{\pi k}{\sqrt{-bc}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Если, например, взять $b = 1$, $c = -1$, то из условия (4.2) получим, что $\sin(\tau) = -1$ и соответственно $\tau = -2^{-1}\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$, а решение задачи (4.1) будет иметь вид

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\tau, 0]; \\ \gamma \cdot \sin(t), & t \in [0, \tau]; \\ -\gamma \cdot \cos(t-\tau), & t \in [\tau, 2\tau]; \\ 0, & t \in (2\tau, 3\tau], \end{cases}$$

где γ – произвольная константа. Итак, задача имеет неединственное решение.

Условие (3.1) в данном случае имеет вид

$$\sigma_\lambda = \Big[\, b\, \frac{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(\ell+\tau)}}{\lambda} - c\, \frac{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda(\tau-\ell)}}{\lambda}\, \Big] < 1, \tag{4.3}$$

оно не выполняется ни при каком $\lambda > 0$. Действительно, перепишем неравенство в виде

$$b\Big[e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(\ell+\tau)}\Big] - c\Big[e^{\lambda\tau} - e^{\lambda(\tau-\ell)}\Big] - \lambda < 0.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(\lambda) = b\Big[e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(\ell+\tau)}\Big] - c\Big[e^{\lambda\tau} - e^{\lambda(\tau-\ell)}\Big] - \lambda, \quad \lambda \in [0, \infty).$$

Поскольку $f(0) = 0$ и $f'(\lambda) \geqslant 0$ всюду при $\lambda \geqslant 0$, т. е. функция $f(\cdot)$ является монотонно возрастающей на промежутке $[0, \infty)$, то $f(\lambda) \geqslant 0$ всюду при $\lambda \geqslant 0$. Это означает, что неравенство $f(\lambda) < 0$ невозможно ни при каком $\lambda > 0$.

Построенный пример показывает, что условие (3.1) является существенным для единственности решения задачи (2.1)–(2.2).

Пример 4.2. Рассмотрим другой частный случай исходной задачи (2.1)–(2.2) в одномерном случае ($n = 1$). Пусть величина запаздывания τ укладывается ровно три раза в отрезок $[a, b]$, т. е. $b - a = 3\tau$, и сама задача имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b \cdot x(t-\tau) + c \cdot x(t+\tau), & a = 0 \leqslant t \leqslant 3\tau = b; \\ x(t) = 0, & -\tau \leqslant t < 0; \\ x(0) = 0; & \\ x(t) = 0, & 3\tau < t \leqslant 4\tau. \end{cases} \tag{4.4}$$

Сразу отметим, что данная задача, очевидно, имеет тривиальное решение. Выясним, существуют ли нетривиальные решения. Сведем решение задачи к решению соответствующей задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений посредством следующей замены:

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t), & 0 \leqslant t \leqslant \tau; \\ x_2(t) = x(t+\tau), & 0 \leqslant t \leqslant \tau; \\ x_3(t) = x(t+2\tau), & 0 \leqslant t \leqslant \tau. \end{cases}$$

Тогда задача (4.4) будет равносильна задаче

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = c \cdot x_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant 3\tau; \\ \dot{x}_2(t) = b \cdot x_1(t) + c \cdot x_3(t), & 0 \leqslant t \leqslant 3\tau; \\ \dot{x}_3(t) = b \cdot x_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant 3\tau; \\ x_1(0) = 0, & x_2(0) = x_1(\tau),\ x_3(0) = x_2(\tau). \end{cases} \tag{4.5}$$

Найдем сначала общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений из (4.5). Находим соответствующие корни и собственные векторы:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \sqrt{2bc}, \quad \lambda_3 = -\sqrt{2bc},$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} c \\ \sqrt{2bc} \\ b \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} c \\ -\sqrt{2bc} \\ b \end{pmatrix}.$$

Как и в предыдущем примере, возьмем $b > 0, c < 0$. Тогда общее вещественное решение системы уравнений из (4.5) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \gamma_1 \cdot \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} + \gamma_2 \cdot \begin{pmatrix} c \cdot \cos(t\sqrt{-2bc}) \\ -\sqrt{-2bc} \cdot \sin(t\sqrt{-2bc}) \\ b \cdot \cos(t\sqrt{-2bc}) \end{pmatrix} +$$

$$+ \gamma_3 \cdot \begin{pmatrix} c \cdot \sin(t\sqrt{-2bc}) \\ \sqrt{-2bc} \cdot \cos(t\sqrt{-2bc}) \\ b \cdot \sin(t\sqrt{-2bc}) \end{pmatrix}.$$

Подберем параметры γ_1, γ_2, γ_3 так, чтобы выполнялись начальные условия из (4.5):

$$\begin{cases} \gamma_2 = -\gamma_1, \\ \gamma_1 \cdot \left[c - c \cdot \cos(\tau\sqrt{-2bc}) \right] + \gamma_3 \cdot \left[c \cdot \sin(\tau\sqrt{-2bc}) - \sqrt{-2bc} \right] = 0, \\ \gamma_1 \cdot \left[\sqrt{-2bc} \cdot \sin(\tau\sqrt{-2bc}) + 2b \right] + \gamma_3 \cdot \left[\sqrt{-2bc} \cdot \cos(\tau\sqrt{-2bc}) \right] = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений (4.6) относительно γ_1 и γ_3 имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю. Условие равенства нулю определителя можно записать в виде

$$c \cdot \cos(\tau\sqrt{-2bc}\,) + 2\sqrt{-2bc} \cdot \sin(\tau\sqrt{-2bc}\,) = c - 2b. \tag{4.7}$$

Это равенство, для удобства определения из него τ, перепишем в виде

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 - 8bc}} \cdot \cos(\tau\sqrt{-2bc}\,) + \frac{2\sqrt{-2bc}}{\sqrt{c^2 - 8bc}} \cdot \sin(\tau\sqrt{-2bc}\,) = \frac{c - 2b}{\sqrt{c^2 - 8bc}}$$

или в виде

$$\sin(\alpha + \tau\sqrt{-2bc}\,) = (c - 2b)/\sqrt{c^2 - 8bc}\ ,$$

где α – некоторый подходящий вспомогательный угол, определяемый из условий

$$\cos(\alpha) = c/\sqrt{c^2 - 8bc}, \quad \sin(\alpha) = 2\sqrt{-2bc}/\sqrt{c^2 - 8bc}.$$

Поскольку $c - 2b < 0$, то для определения из рассматриваемого равенства τ необходимо выполнение неравенства $-1 \leqslant (c - 2b)/\sqrt{c^2 - 8bc}$ или, что то же самое, неравенства $b \leqslant -c$.

Пусть условие (4.7) выполняется, тогда

$$\gamma_3 = \gamma_1 \cdot [\, c - c \cdot \cos(\tau\sqrt{-2bc}\,)\,]/[\,\sqrt{-2bc} - c \cdot \sin(\tau\sqrt{-2bc}\,)\,]$$

и решение задачи (4.5) можно записать так:

$$\begin{cases} x_1(t) = \gamma(c - c\cos(t\sqrt{-2bc}\,)\ ) + \gamma\sin(t\sqrt{-2bc}\,)\dfrac{c^2 - c^2\cos(\tau\sqrt{-2bc}\,)}{\sqrt{-2bc} - c\sin(\tau\sqrt{-2bc}\,)}; \\ x_2(t) = \gamma\sqrt{-2bc}\,\sin(t\sqrt{-2bc}\,) + \gamma\cos(t\sqrt{-2bc}\,)\dfrac{\sqrt{-2bc}\,[c - c\cos(\tau\sqrt{-2bc}\,)]}{\sqrt{-2bc} - c\sin(\tau\sqrt{-2bc}\,)}; \\ x_3(t) = -\gamma b(\ 1 + \cos(t\sqrt{-2bc}\,)) + \gamma\sin(t\sqrt{-2bc}\,)\dfrac{b[c - c\cos(\tau\sqrt{-2bc}\,)]}{\sqrt{-2bc} - c\sin(\tau\sqrt{-2bc}\,)}. \end{cases}$$

Здесь γ — произвольная константа, значит, в выписанных формулах представлено однопараметрическое семейство решений задачи (4.5). С его помощью легко выписывается однопараметрическое семейство решений исходной задачи (4.4)

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\tau, 0]; \\ x_1(t), & t \in [0, \tau]; \\ x_2(t - \tau), & t \in [\tau, 2\tau]; \\ x_3(t - 2\tau), & t \in [2\tau, 3\tau]; \\ 0, & t \in (3\tau, 4\tau]. \end{cases}$$

Равенству (4.7) всегда можно удовлетворить при $b > 0$, $c < 0$, $b \leqslant -c$,

$$\tau = \frac{-\alpha}{\sqrt{-2bc}} + \frac{(-1)^k}{\sqrt{-2bc}} \arcsin\Big(\frac{c-2b}{\sqrt{c^2-8bc}}\Big) + \frac{\pi\ k}{\sqrt{-2bc}} > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Полученное семейство решений записывается довольно громоздко. Если, например, взять $b > 0$, $c = -b$, то условию (4.7) можно удовлетворить, положив

$$b = \sqrt{2}/2, \quad c = -\sqrt{2}/2, \quad \tau = \arcsin(1/3) + 3\pi/2,$$

при этом семейство решений задачи (4.4) выписывается достаточно просто:

$$x(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in [-\tau, 0]; \\ x_1(t) = \gamma \cdot \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t) + \sin(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big), \quad t \in [0, \tau]; \\ x_2(t-\tau) = \gamma \cdot \Big(\sin(t-\tau) - \sqrt{2}\cos(t-\tau)\Big), \quad t \in [\tau, 2\tau]; \\ x_3(t-2\tau) = \gamma \cdot \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t-2\tau) - \sin(t-2\tau) - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big), \quad t \in [2\tau, 3\tau]; \\ 0, \quad t \in (3\tau, 4\tau]. \end{cases}$$

Итак, задача имеет неединственное решение. Условие (3.1) в данном примере имеет вид (4.3). При $b > 0$, $c < 0$, $b \leqslant -c$ оно не выполняется ни при каком $\lambda > 0$. Доказательство этого факта проведено при рассмотрении предыдущего примера.

Построенный пример также показывает, что условие (3.1) является существенным для единственности решения задачи (2.1)–(2.2).

Приведенные примеры показали также, что условие (3.1) является существенным достаточным условием для единственности решения задачи (2.1)–(2.2). Однако, как доказывает следующий пример, оно не является необходимым условием для единственности решения задачи (2.1)–(2.2).

Пример 4.3. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t+\tau), & a = 0 \leqslant t \leqslant 2\tau = b; \\ x(t) = 0, & -\tau \leqslant t < 0; \\ x(0) = 0; & \\ x(t) = 0, & 2\tau < t \leqslant 3\tau, \quad \tau \neq 1. \end{cases}$$

Условие (3.1) для нее принимает вид

$$\sigma_\lambda = \frac{e^{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} < 1\ .$$

Это условие не выполняется ни при каком $\lambda > 0$. Действительно, перепишем неравенство в виде
$$e^{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} - \lambda < 0.$$
Рассмотрим вспомогательную функцию
$$f(\lambda) = e^{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} - \lambda, \quad \lambda \in [0, \infty).$$
Поскольку $f(0) = 0$ и $f'(\lambda) \geqslant 0$ всюду при $\lambda \geqslant 0$, то $f(\lambda) \geqslant 0$ всюду при $\lambda \geqslant 0$. Это означает, что неравенство $f(\lambda) < 0$ невозможно ни при каком $\lambda > 0$.

Рассматриваемая задача имеет только нулевое решение:
$$x(t) = 0, \quad t \in [-\tau, 3\tau].$$

Действительно, из финального условия $x(t) = 0$, $2\tau < t \leqslant 3\tau$, следует, что $\dot{x}(t) = 0$ на промежутке $\tau < t \leqslant 2\tau$, значит,
$$x(t) = C_2 = \mathrm{const}, \quad t \in (\tau, 2\tau].$$
Отсюда вытекает, что
$$\dot{x}(t) = C_2, \quad x(t) = C_1 + C_2 t, \quad t \in (0, \tau], \quad C_1 = \mathrm{const}.$$
Поскольку решение должно быть непрерывным в точке $t = \tau$, то получаем равенство
$$C_1 + C_2\tau = C_2,$$
которое удобно записать в виде
$$C_1 = C_2 \cdot (1 - \tau).$$
Решение должно быть также непрерывно слева в точке $t = 0$, значит,
$$C_1 = C_2 \cdot (1 - \tau) = 0.$$
Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, поэтому
$$x(t) = 0, \quad t \in [-\tau, 3\tau].$$

Таким образом, задача имеет единственное решение (тривиальное), хотя условие (3.1) не выполнено.

Ниже в примерах показано, что условие (3.1) существенно для того, чтобы задача имела решение. Однако оно не является необходимым для существования решения задачи. В этих примерах условие (3.1) не выполняется, в первом и втором примерах соответствующие задачи не имеют решений, в третьем – имеет единственное решение.

Пример 4.4. Рассмотрим пример, аналогичный 4.3, но в отличие от примера 4.3 возьмем $x_0 \neq 0$, $\tau = 1$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t+\tau), & a = 0 \leqslant t \leqslant 2\tau = b; \\ x(t) = 0, & -\tau \leqslant t < 0; \\ x(0) = x_0 \neq 0; & \\ x(t) = 0, & 2\tau < t \leqslant 3\tau, \quad \tau = 1. \end{cases}$$

Для этой краевой задачи условие (3.1) не выполняется ни при каком $\lambda > 0$. Это показано при рассмотрении примера 4.3. Там же показано, что решение этой задачи на промежутке $(0, 3\tau]$ должно иметь вид

$$x(t) = \begin{cases} C_2 t, & t \in (0, \tau]; \\ C_2, & t \in (\tau, 2\tau]; \\ 0, & t \in (2\tau, 3\tau]. \end{cases}$$

Поскольку решение должно быть непрерывным слева в точке $t = 0$, то получаем противоречивое равенство

$$0 \neq x_0 = 0 = C_2 \cdot 0,$$

следовательно, решения рассматриваемой краевой задачи не существует.

Пример 4.5. Рассмотрим пример, аналогичный примеру 4.1, но с ненулевыми начальными данными:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-\tau) - x(t+\tau), & a = 0 \leqslant t \leqslant 2\tau = b; \\ x(t) = \varphi = \text{const}, & -\tau \leqslant t < 0; \\ x(0) = x_0; & \\ x(t) = \psi = \text{const}, & 2\tau < t \leqslant 3\tau. \end{cases}$$

Для этой краевой задачи условие (3.1) не выполняется ни при каком $\lambda > 0$. Это показано при исследовании примера 4.1. Исследуем задачу на разрешимость.

Сведем исходную задачу к соответствующей задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений посредством следующей замены:

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t), & 0 \leqslant t \leqslant \tau; \\ x_2(t) = x(t+\tau), & 0 < t \leqslant \tau. \end{cases}$$

Исходная задача равносильна следующей задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) + \varphi, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, & x_1(0) = x_0; \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - \psi, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, & x_2(0) = x_1(\tau) \ . \end{cases}$$

Общее решение этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (без учета начальных данных) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \gamma_1 \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + \gamma_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Для выполнения начальных условий $x_1(0) = x_0$ и $x_2(0) = x_1(\tau)$ необходимо выполнение двух равенств

$$\gamma_2 = x_0 - \psi, \quad \gamma_1 \cdot (1 + \sin(\tau)) - \gamma_2 \cdot \cos(\tau) = \psi - \varphi.$$

Пусть величина запаздывания τ такова, что $1 + \sin(\tau) = 0$, например $\tau = 3\pi/2$. Тогда $\cos(\tau) = 0$ и второе из равенств будет иметь вид

$$\gamma_1 \cdot 0 - \gamma_2 \cdot 0 = \psi - \varphi.$$

Если $\psi - \varphi \neq 0$, то это равенство невозможно. Итак, при $\psi \neq \varphi$ рассматриваемая задача не имеет решения.

Пример 4.6. Рассмотрим задачу из примера 4.2.

Дальнейший анализ задачи показывает, что при $1 + \sin(\tau) = 0$ и $\psi = \varphi$ она имеет однопараметрическое семейство решений:

$$x(t) = \begin{cases} \varphi, & t \in [-\tau, 0); \\ x_0, & t = 0; \\ x_1(t) = -\gamma_1 \cdot \sin(t) + \gamma_2 \cdot \cos(t) + \psi, & t \in [0, \tau]; \\ x_2(t-\tau) = \gamma_1 \cdot \cos(t-\tau) + \gamma_2 \cdot \sin(t-\tau) + \varphi, & t \in [\tau, 2\tau]; \\ \psi, & t \in (2\tau, 3\tau], \end{cases}$$

где γ_1 – произвольная константа; $\gamma_2 = x_0 - \psi$.

При $1 + \sin(\tau) \neq 0$ задача имеет единственное решение:

$$x(t) = \begin{cases} \varphi, & t \in [-\tau, 0); \\ x_0, & t = 0; \\ x_1(t) = -\gamma_1 \cdot \sin(t) + \gamma_2 \cdot \cos(t) + \psi, & t \in [0, \tau]; \\ x_2(t-\tau) = \gamma_1 \cdot \cos(t-\tau) + \gamma_2 \cdot \sin(t-\tau) + \varphi, & t \in [\tau, 2\tau]; \\ \psi, & t \in (2\tau, 3\tau], \end{cases}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\psi - \varphi + \gamma_2 \cdot \cos(\tau)}{1 + \sin(\tau)}; \qquad \gamma_2 = x_0 - \psi \ .$$

Таким образом, условие существования и единственности решения (3.1) в данном примере не выполнено. Однако при этом задача может иметь одно или несколько решений.

5. Непрерывная зависимость решения от параметров

Сначала докажем непрерывную зависимость решения краевой задачи (2.1)–(2.2) от начальной функции φ, финальной функции ψ и начального состояния x_0 при выполнении условия существования и единственности решения (3.1).

Пусть решение $x_1(\cdot)$ соответствует исходным функциям $\varphi_1(\cdot)$, $\psi_1(\cdot)$ и начальному состоянию x_1^0, а решение $x_2(\cdot)$ соответствует исходным функциям $\varphi_2(\cdot)$, $\psi_2(\cdot)$ и начальному состоянию x_2^0. Рассмотрим разности $x(\cdot) = x_1(\cdot) - x_2(\cdot)$, $\varphi(\cdot) = \varphi_1(\cdot) - \varphi_2(\cdot)$, $\psi(\cdot) = \psi_1(\cdot) - \psi_2(\cdot)$, $x^0 = x_1^0 - x_2^0$. Тогда $x(\cdot)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + C(t)x(t+\tau), & a \leqslant t \leqslant b; \\ x(t) = \varphi(t), & a - \tau \leqslant t < a; \\ x(a) = x^0; & \\ x(t) = \psi(t), & b < t \leqslant b + \tau. \end{cases}$$

Оценим сверху величину $||x(\cdot)||_\lambda$, воспользовавшись равенством

$$x(t) = x^0 + \int_a^t [\,A(\xi)x(\xi) + B(\xi)x(\xi - \tau) + C(\xi)x(\xi + \tau)\,]\,d\xi, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Предварительно отметим, что

$$||x(\cdot)||_\lambda \leqslant \max\Big\{ e^{-\lambda(a-\tau)}||\varphi||_C,\ \max_{a\leqslant t\leqslant b}\Big[e^{-\lambda t}||x(t)||\Big],\ e^{-\lambda b}||\psi||_C \Big\} \leqslant \tag{5.1}$$

$$\leqslant e^{-\lambda(a-\tau)}||\varphi||_C + \max_{a\leqslant t\leqslant b}\Big[e^{-\lambda t}||x(t)||\Big] + e^{-\lambda b}||\psi||_C. \tag{5.2}$$

Оценку второго слагаемого выполним по аналогии с тем, как выполнялась подобная оценка при доказательстве теоремы существования и единственности:

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}\Big[e^{-\lambda t}||x(t)||\Big] \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}\Big[e^{-\lambda t}||x^0||\Big] +$$

$$+\max_{a\leqslant t\leqslant b}\Big[e^{-\lambda t}\Big\|\int_a^t\Big[\|A(\xi)x(\xi)+B(\xi)x(\xi-\tau)+C(\xi)x(\xi+\tau)\Big]\,d\xi\Big\|\Big]\leqslant$$
$$\leqslant e^{-\lambda a}\|x^0\|+\sigma_\lambda\|x(\cdot)\|_\lambda.$$

Таким образом,

$$\|x(\cdot)\|_\lambda\leqslant e^{-\lambda a}\|x^0\|+e^{-\lambda(a-\tau)}\|\varphi\|_C+e^{-\lambda b}\|\psi\|_C+\sigma_\lambda\|x(\cdot)\|_\lambda.$$

Отсюда, учитывая неравенство $1>\sigma_\lambda$, получаем оценку

$$\|x(\cdot)\|_\lambda\leqslant\frac{1}{1-\sigma_\lambda}\Big[e^{-\lambda a}\|x^0\|+e^{-\lambda(a-\tau)}\|\varphi\|_C+e^{-\lambda b}\|\psi\|_C\Big].$$

Далее,

$$\|x(\cdot)\|_C=\sup_{a-\tau\leqslant t\leqslant b+\tau}\|x(t)\|\leqslant\frac{e^{\lambda(\ell+2\tau)}}{1-\sigma_\lambda}\Big[\|x^0\|+\|\varphi\|_C+\|\psi\|_C\Big].$$

Итак, при выполнении условия (3.1) из последней оценки следует устойчивость (непрерывная зависимость) решения краевой задачи (2.1)–(2.2) по начальному состоянию x_0, начальной функции φ и финальной функции ψ при малом варьировании последних в нормах $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{C=C[a,a-\tau)}$ и $\|\cdot\|_{C=C(b,b+\tau]}$ соответственно.

Докажем теперь устойчивость решения краевой задачи (2.1)–(2.2) по матричным коэффициентам $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$, $D(\cdot)$. Последовательно проверим устойчивость сначала по $A(\cdot)$, затем по $B(\cdot)$ и т. д. Тогда, в силу линейности системы уравнений, будет показана общая устойчивость решения рассматриваемой краевой задачи по указанным коэффициентам. Здесь, как и в предыдущем случае, будем считать выполненным условие (3.1) для всех варьируемых матричных коэффициентов.

Пусть решение $x_1(\cdot)$ соответствует матричным коэффициентам $A_1(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$, $D(\cdot)$; решение $x_2(\cdot)$ соответствует матричным коэффициентам $A_2(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$, $D(\cdot)$; начальные состояния как в одном, так и в другом случе являются одинаковыми. Запишем равенства

$$\dot{x_1}(t)=A_1(t)x_1(t)+B(t)x_1(t-\tau)+C(t)x_1(t+\tau)+D(t),\qquad a\leqslant t\leqslant b;$$
$$\dot{x_2}(t)=A_2(t)x_2(t)+B(t)x_2(t-\tau)+C(t)x_2(t+\tau)+D(t),\qquad a\leqslant t\leqslant b.$$

Вычтем второе уравнение из первого и положим $x(\cdot)=x_1(\cdot)-x_2(\cdot)$. Тогда для $x(\cdot)$ получим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A_1(t)x(t)+B(t)x(t-\tau)+C(t)x(t+\tau)+\Big[(A_1(t)-A_2(t))x_2(t)\Big];\\ x(t)=0,\quad t\in[a-\tau,a)\cup(b,b+\tau];\\ x(a)=0.\end{cases}$$

Теперь проведем оценку решения этой краевой задачи на отрезке $[a, b]$ точно так же, как она проводилась в предыдущем случае:

$$e^{-\lambda t}\|x(t)\| \leqslant e^{-\lambda t}\int_a^t \|A_1(\xi)x(\xi) + B(\xi)x(\xi-\tau) + C(\xi)x(\xi+\tau)\|\,d\xi\ +$$

$$+\,e^{-\lambda t}\|A_1 - A_2\|_C \int_a^b \|x_2(\xi)\|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_\lambda^{(1)}\|x(\cdot)\|_\lambda + \|A_1 - A_2\|_C \int_a^b e^{-\lambda t}\|x_2(\xi)\|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_\lambda^{(1)}\|x(\cdot)\|_\lambda + \|A_1 - A_2\|_C \int_a^b e^{-\lambda t}\Big[\,\|x(\xi)\| + \|x_1(\xi)\|\,\Big]\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_\lambda^{(1)}\|x(\cdot)\|_\lambda + \|A_1 - A_2\|_C\|x(\cdot)\|_\lambda\Big[\,\frac{e^{\lambda\ell}-1}{\lambda}\,\Big] + \|A_1 - A_2\|_C e^{-\lambda a}\int_a^b \|x_1(\xi)\|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \Big\{\,\sigma_\lambda^{(1)} + \Big[\,\frac{e^{-\lambda\ell}-1}{\lambda}\,\Big]\delta\,\Big\}\|x(\cdot)\|_\lambda + \delta e^{\lambda a}\int_a^b \|x_1(\xi)\|\,d\xi,$$

где δ таково, что $\|A_1 - A_2\|_C = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\|A_1(t) - A_2(t)\| \leqslant \delta$,

$$\sigma_\lambda^{(1)} = \Big[\,\|A_1\|_C\frac{1-e^{-\lambda\ell}}{\lambda} + \|B\|_C\frac{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(l+\tau)}}{\lambda} + \|C\|_C\frac{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda(\tau-l)}}{\lambda}\,\Big] < 1.$$

Таким образом,

$$\|x(\cdot)\|_\lambda \leqslant \Big\{\,\sigma_\lambda^{(1)} + \Big[\,\frac{e^{\lambda\ell}-1}{\lambda}\,\Big]\delta\,\Big\}\|x(\cdot)\|_\lambda + \delta e^{-\lambda a}\int_a^b \|x_1(\xi)\|\,d\xi.$$

Пусть δ достаточно мало, например, удовлетворяет условию

$$\Big\{\,\sigma_\lambda^{(1)} + \Big[\,\frac{e^{\lambda\ell}-1}{\lambda}\,\Big]\delta\,\Big\} \leqslant \frac{1-\sigma_\lambda^{(1)}}{2},$$

тогда выполняется неравенство

$$\|x(\cdot)\|_C = \sup_{a-\tau\leqslant t\leqslant b+\tau}\|x(t)\| \leqslant \frac{2\delta}{1+\sigma_\lambda^{(1)}}e^{\lambda(\ell+\tau)}\int_a^b \|x_1(\xi)\|\,d\xi \leqslant C_1\delta.$$

Из последнего неравенства, при выполнении для варьируемых матричных коэффициентов условия (3.1), следует непрерывная зависимость решения краевой задачи (2.1)–(2.2) от матричного коэффициента $A(\cdot)$ при его малом варьировании около исходного коэффициента $A_1(\cdot)$ в равномерной метрике.

Аналогичные оценки и аналогичный результат получим при малом варьировании в равномерной метрике коэффициентов $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ и $D(\cdot)$ соответственно.

Итак, установлена непрерывная зависимость решения краевой задачи (2.1)–(2.2) от исходных данных (начальной функции φ, финальной функции ψ, начального состояния x_0) и матричных коэффициентов системы $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$, $D(\cdot)$.

6. Сходимость к точному решению

Укажем некоторые условия, при которых приближенное решение краевой задачи (2.1)–(2.2), найденное по явной схеме Эйлера

$$u^{i+1} = u^i + \Delta\Big[A^i u^i + B^i u^{i-m} + C^i u^{i+m} + D^i\Big], \quad i = 0, \ldots, p-1,$$

сходится к точному решению этой краевой задачи при $\Delta \to 0$.

Предположим, что задача (2.1)–(2.2) имеет непрерывно дифференцируемое решение $x = x(t)$ на отрезке $[a, b]$. Модуль непрерывности первой производной этого решения обозначим символом $\omega(\cdot)$:

$$\omega(\Delta) = \max\{|\dot{x}(t_1) - \dot{x}(t_2)| : \ t_1, t_2 \in [a, b], \ |t_1 - t_2| \leqslant \Delta\}.$$

В силу равномерной непрерывности производной $\dot{x}(\cdot)$ на отрезке $[a, b]$ имеем

$$\omega(\Delta) \to 0, \quad \Delta \to 0.$$

Представим равенство (2.1) в узлах сетки следующим образом:

$$\frac{x^{i+1} - x^i}{\Delta} = A^i x^i + B^i x^{i-m} + C^i x^{i+m} + D^i + \Big[\frac{x^{i+1} - x^i}{\Delta} - \dot{x}(t_i)\Big]. \qquad (6.1)$$

Отметим, что

$$\omega^i(\Delta) = \Big[\frac{x^{i+1} - x^i}{\Delta} - \dot{x}(t_i)\Big] = \frac{1}{\Delta} \cdot \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big[\dot{x}(\xi) - \dot{x}(t_i)\Big]\, d\xi,$$

$$\|\omega^i(\Delta)\| \leqslant \frac{1}{\Delta} \cdot \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{x}(\xi) - \dot{x}(t_i)\|\, d\xi \leqslant \omega(\Delta).$$

Из равенства (6.1) следует, что точное решение в узлах сетки удовлетворяет следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x^{-m} = \varphi^{-m}, \cdots, x^{-1} = \varphi^{-1}, \ x^0 = x_0; \\ x^{i+1} = x^i + \Delta \cdot \Big[A^i x^i + B^i x^{i-m} + C^i x^{i+m} + D^i + \omega^i(\Delta)\Big], \quad i = 0, ..., p-1; \\ x^{p+1} = \psi^{p+1}, \cdots, x^{p+m} = \psi^{p+m}. \end{cases}$$

Приближенное решение удовлетворяет аналогичной системе

$$\begin{cases} u^{-m} = \varphi^{-m}, \cdots, u^{-1} = \varphi^{-1},\ u^0 = x_0; \\ u^{i+1} = u^i + \Delta \cdot \Big[A^i u^i + B^i u^{i-m} + C^i u^{i+m} + D^i \Big], \quad i = 0, ..., p-1; \\ u^{p+1} = \psi^{p+1}, \cdots, u^{p+m} = \psi^{p+m}. \end{cases}$$

Вычитая из первой системы вторую, получим, что разность

$$z^i = x^i - u^i, \quad i = -m, \ldots, p+m,$$

удовлетворяет системе

$$\begin{cases} z^{-m} = 0, \cdots, z^{-1} = 0,\ z^0 = 0; \\ z^{i+1} = z^i + \Delta \cdot \Big[A^i z^i + B^i z^{i-m} + C^i z^{i+m} + \omega^i(\Delta) \Big], \quad i = 0, \ldots, p-1; \\ z^{p+1} = 0, \cdots, u^{p+m} = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует неравенство

$$||z^{i+1}|| \leqslant ||z^i|| + \Delta \cdot \Big[||A||_C \cdot ||z^i|| + ||B||_C \cdot ||z^{i-m}|| + ||C||_C \cdot ||z^{i+m}|| + \omega(\Delta) \Big].$$

Введем обозначение

$$||z||_C = \max\{||z^i|| : \ i = 0, \ldots, p\},$$

тогда из последнего неравенства имеем

$$||z||_C \leqslant \frac{b-a}{1 - (b-a) \cdot \big[\, ||A||_C + ||B||_C + ||C||_C \,\big]} \cdot \omega(\Delta), \tag{6.2}$$

если

$$(b-a) \cdot \Big[||A||_C + ||B||_C + ||C||_C \Big] < 1. \tag{6.3}$$

Из оценки (6.2) следует, что при выполнении условия (6.3) приближенное решение исходной дифференциальной задачи, найденное по явной схеме Эйлера, сходится к точному решению дифференциальной задачи

$$||z||_C \to 0, \quad \Delta \to 0. \tag{6.4}$$

Теорема 6.1. *Пусть задача* (2.1)–(2.2) *имеет непрерывно дифференцируемое на отрезке* $[a, b]$ *решение* $x = x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. *Тогда при выполнении условия* (6.3) *приближенное решение задачи* (2.1)–(2.2), *найденное по явной схеме Эйлера, сходится к точному решению этой задачи при* $\Delta \to 0$ *в смысле* (6.4), *причем для точности приближения справедлива оценка* (6.2).

Укажем еще одно условие сходимости рассматриваемого приближенного решения к точному решению краевой задачи (2.1)–(2.2), которое будет опираться на неравенство (3.1).

Просуммируем равенства

$$z^{k+1} = z^k + \Delta \cdot \Big[A^k z^k + B^k z^{k-m} + C^k z^{k+m} + \omega^k(\Delta) \Big], \quad k = 0, \ldots, i,$$

в результате получим

$$z^{i+1} = \Delta \cdot \sum_{k=0}^{i} \Big[A^k z^k + B^k z^{k-m} + C^k z^{k+m} + \omega^k(\Delta) \Big]. \tag{6.5}$$

Пусть

$$\|z\|_C^{(\lambda)} = \max\{e^{-\lambda t_i} \cdot \|z^i\| : \ i = 0, \ldots, p\}, \quad \lambda = \mathrm{const} > 0.$$

Умножим равенство (6.5) на $e^{-\lambda t_{i+1}} = e^{-\lambda(a+\Delta(i+1))}$ и преобразуем его:

$$e^{-\lambda t_{i+1}} \cdot \|z^{i+1}\| = \Delta \cdot \left\| \sum_{k=0}^{i} e^{-\lambda t_{i+1}} \cdot \Big[A^k z^k + B^k z^{k-m} + C^k z^{k+m} + \omega^k(\Delta) \Big] \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \Delta \cdot \left\| \sum_{k=0}^{i} A^k \cdot e^{-\lambda t_k} \cdot z^k \cdot e^{-\lambda(t_{i+1}-t_k)} \right\| +$$

$$+ \Delta \cdot \left\| \sum_{k=0}^{i} B^k \cdot e^{-\lambda(t_k-\tau)} \cdot z^{k-m} \cdot e^{-\lambda(t_{i+1}-t_k+\tau)} \right\| +$$

$$+ \Delta \cdot \left\| \sum_{k=0}^{i} C^k \cdot e^{-\lambda(t_k+\tau)} \cdot z^{k+m} \cdot e^{-\lambda(t_{i+1}-t_k-\tau)} \right\| + \Delta \cdot \left\| \sum_{k=0}^{i} \omega^k(\Delta) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|A\|_C \cdot \|z\|_C^{(\lambda)} \cdot \Delta \cdot \sum_{k=0}^{i} e^{-\lambda(t_{i+1}-t_k)} + \|B\|_C \cdot \|z\|_C^{(\lambda)} \cdot \Delta \cdot \sum_{k=0}^{i} e^{-\lambda(t_{i+1}-t_k+\tau)} +$$

$$+ \|C\|_C \cdot \|z\|_C^{(\lambda)} \cdot \Delta \cdot \sum_{k=0}^{i} e^{-\lambda(t_{i+1}-t_k-\tau)} + (t_{i+1} - a) \cdot \omega(\Delta) \leqslant$$

$$\leqslant \|A\|_C \cdot \|z\|_C^{(\lambda)} \cdot \int_a^{t_{i+1}} e^{-\lambda(t_{i+1}-\xi)}\, d\xi + \|B\|_C \cdot \|z\|_C^{(\lambda)} \cdot \int_a^{t_{i+1}} e^{-\lambda(t_{i+1}-\xi+\tau)}\, d\xi +$$

$$+ \|C\|_C \cdot \|z\|_C^{(\lambda)} \cdot \int_a^{t_{i+1}} e^{-\lambda(t_{i+1}-\xi-\tau)}\, d\xi + (b-a) \cdot \omega(\Delta), \quad \Longrightarrow$$

$$\|z\|_C^{(\lambda)} \leqslant \sigma_\lambda \cdot \|z\|_C^{(\lambda)} + (b-a) \cdot \omega(\Delta), \quad \Longrightarrow \quad \|z\|_C^{(\lambda)} \leqslant \frac{b-a}{1-\sigma_\lambda} \cdot \omega(\Delta). \tag{6.6}$$

Неравенство (6.6) гарантирует сходимость приближенного решения.

Теорема 6.2. *Если при некотором* $\lambda > 0$ *выполняется условие* (3.1), *то приближенное решение краевой задачи* (2.1)–(2.2), *найденное по явной схеме Эйлера, сходится к точному решению этой задачи при* $\Delta \to 0$, *причем для точности приближения справедлива оценка* (6.6).

7. Численное моделирование

В этом параграфе снова обратимся к исходной краевой задаче и рассмотрим вопрос о численном нахождении ее приближенного решения. Проведем дискретизацию задачи, используя явную схему Эйлера. Для простоты будем считать, что $b - a = k\tau$, $k \in \mathbb{N}$. В схеме Эйлера будем использовать постоянный шаг дискретизации Δ, пусть для простоты он входит целое число раз в величину запаздывания, т.е. $\Delta = \tau/m$, где $m \in \mathbb{N}$. Тогда $b = a + \tau k = a + \Delta km = a + \Delta p$, где $p = km$.

Введем сеточное разбиение отрезка $[a - \tau, b + \tau]$ точками $t_i \in \{t_i\}_{i=-m}^{p+m}$:

$$t_i = a + \Delta \cdot i \quad (t_{-m} = a - \tau, \ldots, t_0 = a, \ldots, t_p = b, \ldots, t_{p+m} = b + \tau).$$

Обозначим

$$\varphi(t_i) = \varphi^i, \quad i = -m, \ldots, -1; \qquad \psi(t_i) = \psi^i, \quad i = p+1, \ldots, p+m;$$

$$A(t_i) = A^i, \quad B(t_i) = B^i, \quad C(t_i) = C^i, \quad D(t_i) = D^i, \quad i = 0, \ldots, p.$$

Пусть $x(t)$ – точное решение задачи (2.1)–(2.2). Будем искать приближение

$$u^i \approx x^i = x(t_i) \quad (u_k^i \approx x_k^i = x_k(t_i), \quad k = 1, \ldots, n), \quad i = 1, \ldots, p.$$

Исходное дифференциальное уравнение аппроксимируем разностной схемой

$$u^{i+1} = u^i + \Delta \Big[A^i u^i + B^i u^{i-m} + C^i u^{i+m} + D^i \Big], \quad i = 0, \ldots, p-1. \tag{7.1}$$

Отсюда получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для нахождения неизвестных u^i, $i = 1, \ldots, p$:

$$\begin{cases} u^{-m} = \varphi^{-m}, \cdots, u^{-1} = \varphi^{-1}, \ u^0 = x_0; \\ \Delta B^i u^{i-m} + (1 + \Delta A^i) u^i - u^{i+1} + \Delta C^i u^{i+m} = -\Delta D^i, \quad i = 0, \ldots, p-1; \\ u^{p+1} = \psi^{p+1}, \cdots, u^{p+m} = \psi^{p+m}. \end{cases}$$

Запишем эту систему в матричной форме:

$$\mathbb{A} u = \mathbb{F}. \tag{7.2}$$

Матрица $\mathbb{A}$ системы является блочной четырехдиагональной. Все блоки имеют размерность $n \times n$.

Систему (7.2) предварительно симметризуем методом Гаусса, т. е. перейдем от системы (7.2) к системе

$$\tilde{\mathbb{A}}u = \tilde{\mathbb{F}}, \qquad \tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A}^T\mathbb{A}, \quad \tilde{\mathbb{F}} = \mathbb{A}^T\mathbb{F}. \tag{7.3}$$

Для решения системы (7.3) воспользуемся следующими итерационными методами: методом Гаусса–Зейделя, методом сопряженных градиентов, методом минимальных невязок [20].

Приступим теперь к описанию вычислительного эксперимента.

Вычислительный эксперимент будет проводиться при $n = 2$.

Эксперимент проведем на контрольном примере, в котором функции

$$x_1(t) = \mu_0^1 + \mu_1^1 t + \mu_2^1 t^2 + \mu_3^1 \sin \mu_4^1 t + \mu_5^1 \cos \mu_6^1 t,$$

$$x_2(t) = \mu_0^2 + \mu_1^2 t + \mu_2^2 t^2 + \mu_3^2 \sin \mu_4^2 t + \mu_5^2 \cos \mu_6^2 t$$

будут решением дифференциального уравнения (2.1) с коэффициентами

$$a_{11}(t) = \alpha_0^{11} + \alpha_1^{11} t + \alpha_2^{11} t^2 + \alpha_3^{11} \sin \alpha_4^{11} t + \alpha_5^{11} \cos \alpha_6^{11} t,$$

$$a_{12}(t) = \alpha_0^{12} + \alpha_1^{12} t + \alpha_2^{12} t^2 + \alpha_3^{12} \sin \alpha_4^{12} t + \alpha_5^{12} \cos \alpha_{\mathbf{6}}^{12} t,$$

$$a_{21}(t) = \alpha_0^{21} + \alpha_1^{21} t + \alpha_2^{21} t^2 + \alpha_3^{21} \sin \alpha_4^{21} t + \alpha_5^{21} \cos \alpha_6^{21} t,$$

$$a_{22}(t) = \alpha_0^{22} + \alpha_1^{22} t + \alpha_2^{22} t^2 + \alpha_3^{22} \sin \alpha_4^{22} t + \alpha_5^{22} \cos \alpha_6^{22} t,$$

$$b_{11}(t) = \beta_0^{11} + \beta_1^{11} t + \beta_2^{11} t^2 + \beta_3^{11} \sin \beta_4^{11} t + \beta_5^{11} \cos \beta_6^{11} t,$$

$$b_{12}(t) = \beta_0^{12} + \beta_1^{12} t + \beta_2^{12} t^2 + \beta_3^{12} \sin \beta_4^{12} t + \beta_5^{12} \cos \beta_{\mathbf{6}}^{12} t,$$

$$b_{21}(t) = \beta_0^{21} + \beta_1^{21} t + \beta_2^{21} t^2 + \beta_3^{21} \sin \beta_4^{21} t + \beta_5^{21} \cos \beta_6^{21} t,$$

$$b_{22}(t) = \beta_0^{22} + \beta_1^{22} t + \beta_2^{22} t^2 + \beta_3^{22} \sin \beta_4^{22} t + \beta_5^{22} \cos \beta_6^{22} t,$$

$$c_{11}(t) = \gamma_0^{11} + \gamma_1^{11} t + \gamma_2^{11} t^2 + \gamma_3^{11} \sin \gamma_4^{11} t + \gamma_5^{11} \cos \gamma_6^{11} t,$$

$$c_{12}(t) = \gamma_0^{12} + \gamma_1^{12} t + \gamma_2^{12} t^2 + \gamma_3^{12} \sin \gamma_4^{12} t + \gamma_5^{12} \cos \gamma_6^{12} t,$$

$$c_{21}(t) = \gamma_0^{21} + \gamma_1^{21} t + \gamma_2^{21} t^2 + \gamma_3^{21} \sin \gamma_4^{21} t + \gamma_5^{21} \cos \gamma_6^{21} t,$$

$$c_{22}(t) = \gamma_0^{22} + \gamma_1^{22} t + \gamma_2^{22} t^2 + \gamma_3^{22} \sin \gamma_4^{22} t + \gamma_5^{22} \cos \gamma_6^{22} t,$$

$$D(t) = D^1(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t) - B(t)\varphi(t) - C(t)x(t+\tau), \ a \leqslant t \leqslant a+\tau,$$

$$D(t) = D^2(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t) - B(t)x(t-\tau) - C(t)x(t+\tau), \ a+\tau < t \leqslant b-\tau,$$

$$D(t) = D^3(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t) - B(t)x(t-\tau) - C(t)\psi(t), \ b-\tau < t \leqslant b,$$

и исходными данными

$$x_1^0 = x_1(a), \quad x_2^0 = x_2(a),$$

$$\varphi_1(t) = \sigma_0^1 + \sigma_1^1 t + \sigma_2^1 t^2 + \sigma_3^1 \sin \sigma_4^1 t + \sigma_5^1 \cos \sigma_6^1 t,$$

$$\varphi_2(t) = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 t + \sigma_2^2 t^2 + \sigma_3^2 \sin \sigma_4^2 t + \sigma_5^2 \cos \sigma_6^2 t,$$

$$\psi_1(t) = \nu_0^1 + \nu_1^1 t + \nu_2^1 t^2 + \nu_3^1 \sin \nu_4^1 t + \nu_5^1 \cos \nu_6^1 t \ .$$

$$\psi_2(t) = \nu_0^2 + \nu_1^2 t + \nu_2^2 t^2 + \nu_3^2 \sin \nu_4^2 t + \nu_5^2 \cos \nu_5^2 t \ .$$

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 7.1. Параметры примера указаны в таблице. В этом примере выполнено условие существования и единственности решения (3.1). Приведенные ниже результаты расчетов показывают, что все три метода достаточно быстро сходятся к решению соответствующей СЛАУ, образовавшейся при дискретизации задачи, при увеличении числа итераций. А решение СЛАУ, как видно из результатов, достаточно близко к заданному точному решению при малых значениях шага дискретизации Δ.

Таблица параметров примера 7.1							
$a = 0$, $\tau = 1$, $b = 3$, $k = 3$							
$i =$	0	1	2	3	4	5	6
$a_{11}\ :\ \alpha_i^{11} =$	0.1	0	0	0	0	0	0
$a_{12}\ :\ \alpha_i^{12} =$	0	0	0	0	0	0	0
$a_{21}\ :\ \alpha_i^{21} =$	0	0	0	0	0	0	0
$a_{22}\ :\ \alpha_i^{22} =$	0.1	0	0	0	0	0	0
$b_{11}\ :\ \beta_i^{11} =$	0	0.1	0	0	0	0	0
$b_{12}\ :\ \beta_i^{12} =$	0	0.5	0	0	0	0	0
$b_{21}\ :\ \beta_i^{21} =$	0	0	0	0	0	0	0
$b_{22}\ :\ \beta_i^{22} =$	0	0	0	0	0	0	0
$c_{11}\ :\ \gamma_i^{11} =$	0.1	0	0	0	0	0	0
$c_{12}\ :\ \gamma_i^{12} =$	0	0	0	0	0	0	0
$c_{21}\ :\ \gamma_i^{21} =$	0	0	0	0	0	0	0
$c_{22}\ :\ \gamma_i^{22} =$	0	0.05	0	0	0	0	0
$\varphi_1\ :\ \sigma_i^1 =$	1	0	0	0	0	0	0
$\varphi_2\ :\ \sigma_i^2 =$	−1	0	0	0	0	0	0
$\psi_1\ :\ \nu_i^1 =$	−2	0	0	0	0	0	0
$\psi_2\ :\ \nu_i^2 =$	2	0	0	0	0	0	0
$x_1\ :\ \mu_i^1 =$	1	2	−1	0	0	0	0
$x_2\ :\ \mu_i^2 =$	−1	1	0	0	0	0	0

Результаты расчетов при шаге сетки $\Delta = 0.02$, числе итераций $k = 1000$ и начальном приближении $u^{(0)} = 0$.

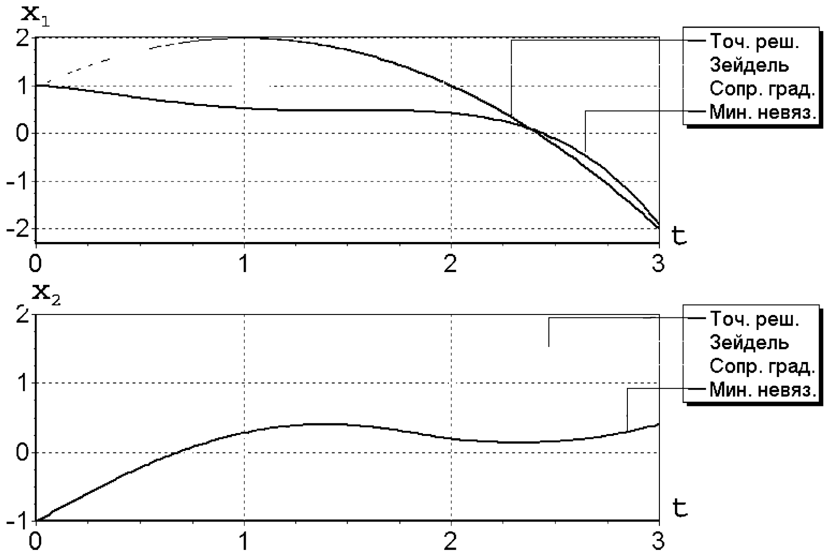

Рис. 1. Зависимость x_1, x_2 и их приближений от t

Результаты расчетов при шаге сетки $\Delta = 0.02$, числе итераций $k = 100000$ и начальном приближении $u^{(0)} = 0$.

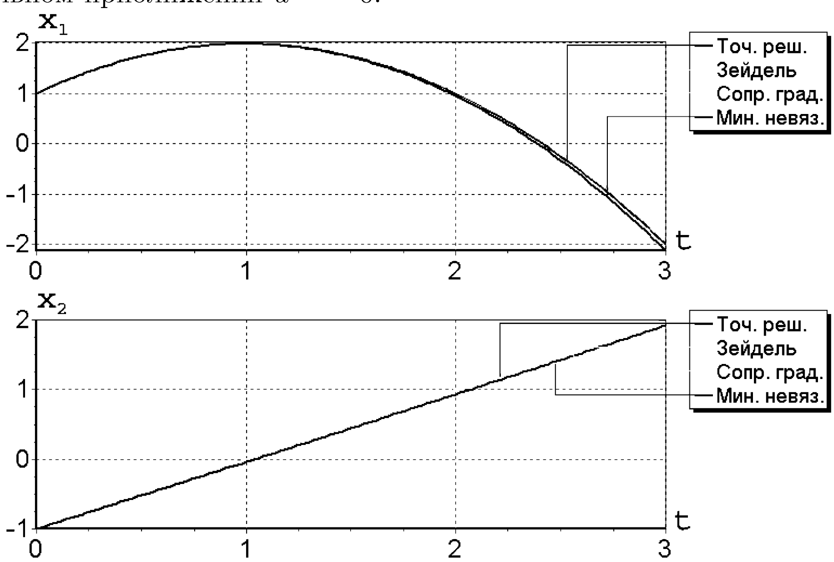

Рис. 2. Зависимость x_1, x_2 и их приближений от t

Пример 7.2. Параметры примера указаны в таблице. В этом примере не выполнено условие существования и единственности решения (3.1). Наименьшее значение σ_λ при $\lambda > 0$ достигается в точке $\lambda = 1.48 \pm 0.01$ и равно 24.76 ± 0.01. Приведенные ниже результаты расчетов показывают, что методы не сходятся к предъявленному точному решению дифференциальной задачи при увеличении числа итераций и уменьшении шага дискретизации Δ. Значит, решение соответствующей СЛАУ, образовавшейся в результате дискретизации, не приближает предъявленное точное решение исходной дифференциальной задачи при уменьшении шага дискретизации Δ. Причем каждый метод дает некоторое свое приближение к решению СЛАУ и, вообще говоря, не наблюдается сходимости к какому-либо одному приближению при увеличении числа итераций. Причина этого может заключаться в неединственности решения дифференциальной задачи и неединственности решения соответствующей СЛАУ.

Таблица параметров примера 7.2							
$a = 0,\ \tau = 1,\ b = 3,\ k = 3$							
$i =$	0	1	2	3	4	5	6
$a_{11}\ :\ \alpha_i^{11} =$	1	1	0	0	0	0	0
$a_{12}\ :\ \alpha_i^{12} =$	1	1	0	0	0	0	0
$a_{21}\ :\ \alpha_i^{21} =$	1	1	0	0	0	0	0
$a_{22}\ :\ \alpha_i^{22} =$	1	1	0	0	0	0	0
$b_{11}\ :\ \beta_i^{11} =$	2	-2	0	0	0	0	0
$b_{12}\ :\ \beta_i^{12} =$	2	2	0	0	0	0	0
$b_{21}\ :\ \beta_i^{21} =$	2	2	0	0	0	0	0
$b_{22}\ :\ \beta_i^{22} =$	2	-2	0	0	0	0	0
$c_{11}\ :\ \gamma_i^{11} =$	3	0	0	0	0	0	0
$c_{12}\ :\ \gamma_i^{12} =$	-3	0	0	0	0	0	0
$c_{21}\ :\ \gamma_i^{21} =$	3	0	0	0	0	0	0
$c_{22}\ :\ \gamma_i^{22} =$	-3	0	0	0	0	0	0
$\varphi_1\ :\ \sigma_i^1 =$	1	1	0	0	0	0	0
$\varphi_2\ :\ \sigma_i^2 =$	-1	1	0	0	0	0	0
$\psi_1\ :\ \nu_i^1 =$	-1	-1	0	0	0	0	0
$\psi_2\ :\ \nu_i^2 =$	-1	1	0	0	0	0	0
$x_1\ :\ \mu_i^1 =$	1	2	-3	0	0	0	0
$x_2\ :\ \mu_i^2 =$	-1	1	0	3	1	0	0

Результаты расчетов при величине шага дискретизации $\Delta = 0.02$, числе итераций $k = 100$ и начальном приближении $u^{(0)} = 0$.

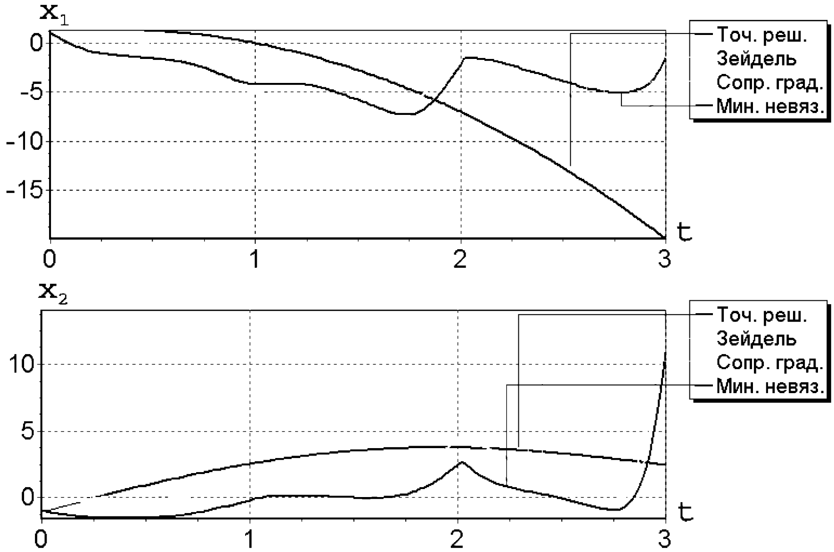

Рис. 3. Зависимость x_1, x_2 и их приближений от t

Результаты расчетов при величине шага дискретизации $\Delta = 0.02$, числе итераций $k = 10000$ и начальном приближении $u^{(0)} = 0$.

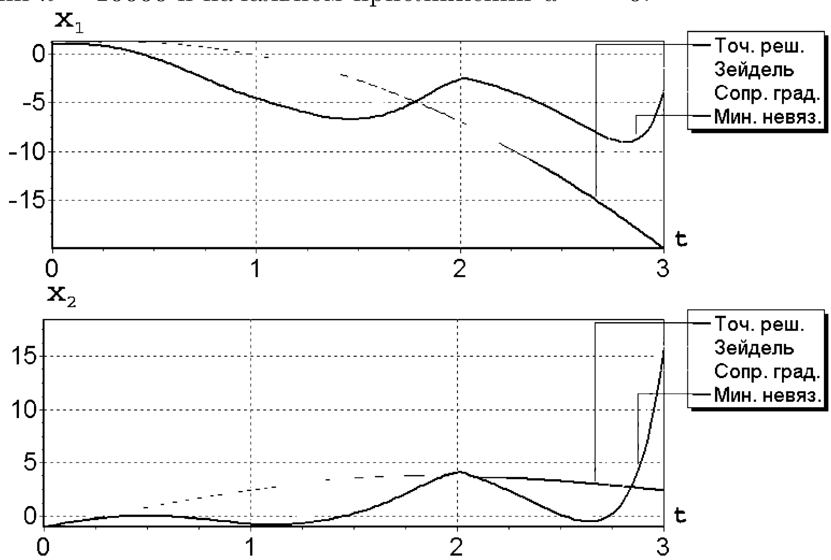

Рис. 4. Зависимость x_1, x_2 и их приближений от t

Результаты расчетов при величине шага дискретизации $\Delta = 0.005$, числе итераций $k = 1000$ и начальном приближении $u^{(0)} = 0$.

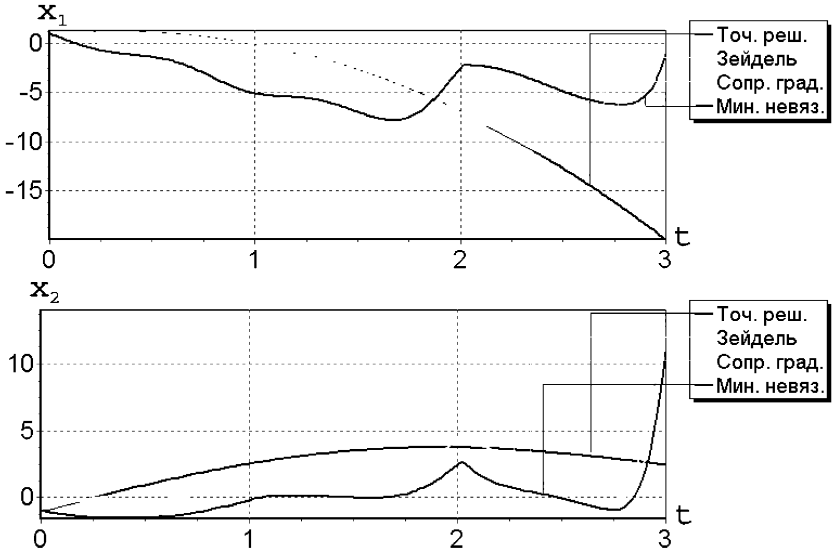

Рис. 5. Зависимость x_1, x_2 и их приближений от t

Литература

1. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.

2. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

3. Веллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

5. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1959.

6. Андреева Е. А., Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992.

7. Пименов В. Г. Функционально-дифференциальные уравнения: численные методы: Учеб. пособие. Екатеринбург: УрГУ, 1998.

8. Ким А. В., Пименов В. Г. i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2004.

9. Каменский Г. А., Скубачевский А. Л. Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: Изд-во МАИ, 1992.

10. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

11. Понтрягин Л. С., Болтенский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

12. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974.

13. Kato T., McLeod J. B. The functional-differential equation $\dot{y}(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77, № 6. P. 891–931.

14. Baotong C. Functional differential equations mixed type in Banach spaces // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1995. Vol. 94. P. 47–54.

15. Diaz L., Naulin R. Bounded solution of nonlinear difference equations with advanced arguments // Comput. Math. Appl. 2003. Vol. 45. P. 1021–1032.

16. Heard M. L. Asymptotic behavior of solutions of the functional differential equation $\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t^\alpha),\ \alpha > 1$ // J. Math. Anal. Appl. 1973. Vol. 44. P. 745–757.

17. Онегова О. В. Некоторые методы численного решения краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений // Изв. Урал. гос. ун-та. 2002. № 22. (Математика и механика. Вып. 4). С. 114–128.

18. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.

19. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989.

20. Вержбицкий В. М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. М.: Высш. шк., 2000.

21. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.